

Εργαστηριακή Άσκηση 4 Διαμόρφωση AM, DSB

Σκοπός της τέταρτης σειράς ασκήσεων είναι η χρήση του MATLAB για επίλυση απλών προβλημάτων αναλογικής διαμόρφωσης. **Προτού ξεκινήσετε την άσκηση θα πρέπει να μελετήσετε με προσοχή τις παραγράφους 1.2.5 και 2.2 του τεύχους των εργαστηριακών ασκήσεων του μαθήματος.** Το MATLAB (www.mathworks.com) είναι ένα διαδραστικό εμπορικό πρόγραμμα (Windows, Linux, Unix) με το οποίο μπορείτε να κάνετε εύκολα αριθμητικές πράξεις με πίνακες. Στο Εργαστήριο Προσωπικών Υπολογιστών (ΕΠΥ) της Σχολής θα βρείτε εγκατεστημένη την έκδοση R2009a. Μπορείτε επίσης να έχετε πρόσβαση στο MATLAB μέσω της ιστοσελίδας <https://cloudfront0.central.ntua.gr/sgd/hierarchy.jsp> του Κέντρου Υπολογιστών (ΚΗΥ) του ΕΜΠ (αφού περάσετε έλεγχο ταυτότητας με τον κωδικό και συνθηματικό που σας έχει δοθεί). Εκεί είναι εγκατεστημένη η έκδοση R2010b και το περιβάλλον είναι Linux. Η πρόσβαση μέσω του ΚΗΥ θα σας είναι χρήσιμη για προετοιμασία από το σπίτι.

Για να εισέλθετε στο σταθμό εργασίας του ΕΠΥ, χρησιμοποιείτε το όνομα χρήστη `labuser` και κωδικό πρόσβασης `labuser` ή ότι άλλο σας δοθεί από τους επιτηρητές. Εάν στην οθόνη δεν εμφανίζεται σχετικό παράθυρο διαλόγου για την εισαγωγή στο σύστημα, πιάστε ταυτόχρονα τα πλήκτρα `Alt+Ctr1+Del`. Στις συγκεκριμένες ασκήσεις, το λειτουργικό σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί είναι τα Windows XP.

Μέρος 1: Πύκνωση και αραιώση

Πολλές φορές αντιμετωπίζουμε στην πράξη το πρόβλημα της αλλαγής του ρυθμού δειγματοληψίας ενός ψηφιακού σήματος. Το κύριο ερώτημα είναι το πώς μπορούμε να το επιτύχουμε χωρίς να πρέπει να ανασκευάσουμε το σήμα και να το δειγματοληπτήσουμε εκ νέου. Οι δύο βασικές λειτουργίες για το σκοπό αυτό είναι η αποδεκάτιση (decimation) και η επέκταση (expansion). Με την αποδεκάτιση (αραιώση) μειώνουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας κατά ένα παράγοντα M έτσι ώστε $f_{s_{\text{new}}} = f_{s_{\text{old}}} / M$. Με την επέκταση (πύκνωση) αυξάνουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας κατά ένα παράγοντα L έτσι ώστε $f_{s_{\text{new}}} = f_{s_{\text{old}}} \times L$. Προφανώς μπορούμε να συνδυάσουμε τις δύο λειτουργίες και να λάβουμε οποιοδήποτε ρητό παράγοντα $f_{s_{\text{new}}} = f_{s_{\text{old}}} \times L / M$.

Στο πεδίο του χρόνου οι δύο λειτουργίες περιγράφονται πολύ εύκολα, όμως η ανάλυση στο πεδίο συχνοτήτων δίνει την πιο χρήσιμη πληροφορία. Χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για την αποδεκάτιση

$$x_{(\downarrow M)}[n] = x[Mn], \quad n \text{ ακέραιος}$$

Έτσι για $M=3$, έχουμε $x_{(\downarrow 3)}[0]=x[0]$, $x_{(\downarrow 3)}[1]=x[3]$, $x_{(\downarrow 3)}[2]=x[6]$, κοκ. Ο αντίστοιχος συμβολισμός για την επέκταση είναι

$$x_{(\uparrow L)}[n] = \begin{cases} x[n/L], & \text{εάν } n/L \text{ ακέραιος} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έτσι για $L=3$, έχουμε $x_{(\uparrow 3)}[0]=x[0]$, $x_{(\uparrow 3)}[1]=0$, $x_{(\uparrow 3)}[2]=0$, $x_{(\uparrow 3)}[3]=x[1]$, $x_{(\uparrow 3)}[4]=0$, $x_{(\uparrow 3)}[5]=0$, $x_{(\uparrow 3)}[6]=x[2]$, κοκ. Η ιδιότητα της αντιμετάθεσης δεν ισχύει. Εν γένει $\{x_{(\downarrow M)}\}_{(\uparrow L)} \neq \{x_{(\uparrow L)}\}_{(\downarrow M)}$

εκτός και εάν τα M και L είναι αμοιβαία πρώτοι (co-prime), δηλαδή, δεν έχουν κοινό διαιρέτη, όποτε ισχύει η ισότητα

$$\{x_{(\downarrow M)}\}_{(\uparrow L)} = \{x_{(\uparrow L)}\}_{(\downarrow M)} \quad \text{εάν } M \text{ και } L \text{ αμοιβαία πρώτοι}$$

Ο DTFT του αποδεκατισμένου σήματος μπορεί να υπολογισθεί από την ισότητα

$$x_{(\downarrow M)}[n] = x[nM] = x[nM]c_M[nM]$$

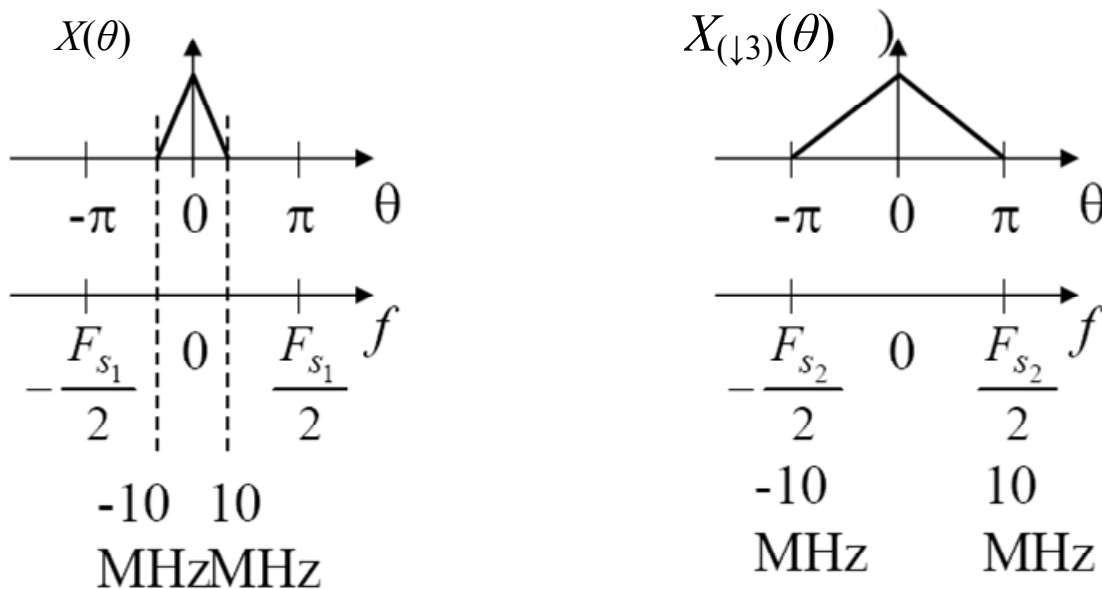
όπου $c_M[n]$ είναι η συνάρτηση χτένι

$$c_M[M] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] = \delta[n \bmod M]$$

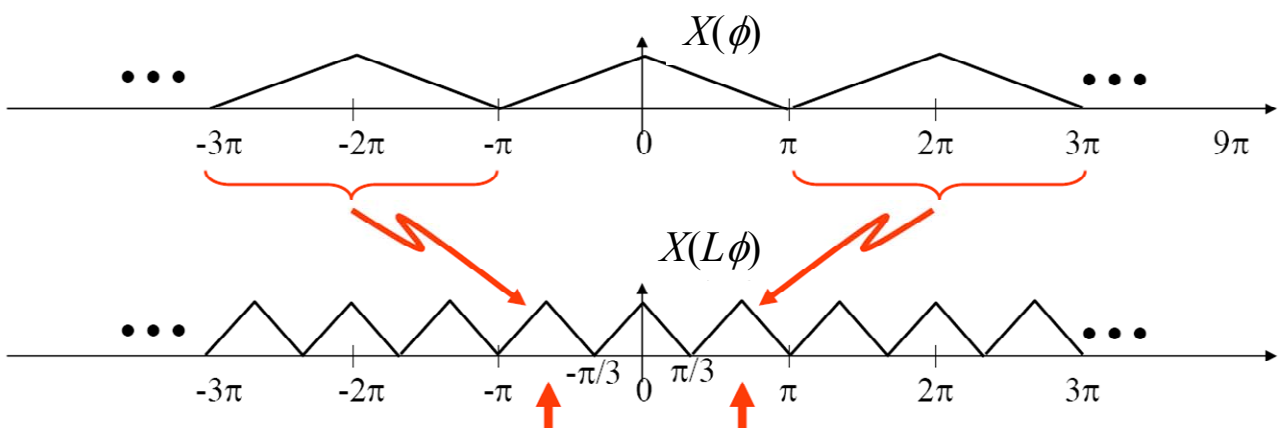
Μετά από υπολογισμό του DTFT του ως άνω γινομένου προκύπτει

$$X_{(\downarrow M)}(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X\left(\frac{\theta - 2\pi m}{M}\right)$$

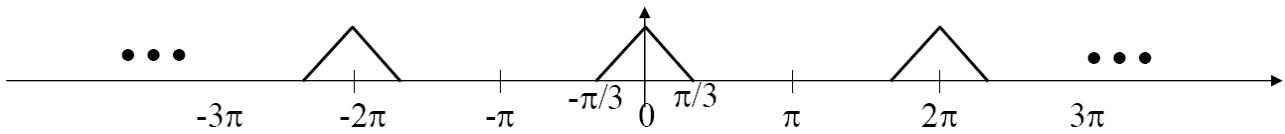
δηλαδή, ο DTFT της αποδεκάτισης ενός σήματος είναι η επανάληψη αντιγράφων υπό κλίμακα του DTFT του αρχικού σήματος. Το φασματικό περιεχόμενο του σήματος επεκτείνεται κατά M , $X(\theta/M)$, και προστίθενται αντίγραφα του εκτεταμένου φάσματος κάθε 2π . Το αποδεκατισμένο σήμα δεν θα εμφανίσει επικάλυψη, εάν $X(\theta) = 0$ για $|\theta| > \pi/M$. Τέτοιου είδους σήματα αποκαλούνται Μ-ζωνικά (M^{th} band). Μετά την αποδεκάτιση το φάσμα καταλαμβάνει όλη την περιοχή $[-\pi, \pi]$. Πρέπει να σημειωθεί ότι παρότι η αποδεκάτιση αλλάζει την ψηφιακή συχνότητα $\theta = 2\pi f/f_s$, η αντίστοιχη φυσική συχνότητα f του σήματος δεν αλλάζει, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Ο DTFT του επεκταμένου σήματος εύκολα υπολογίζεται ότι είναι $X_{(\uparrow L)}(\phi) = X(L\phi)$ δηλαδή, το φασματικό περιεχόμενο συρρικνώνεται, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα για την περίπτωση $L=3$.

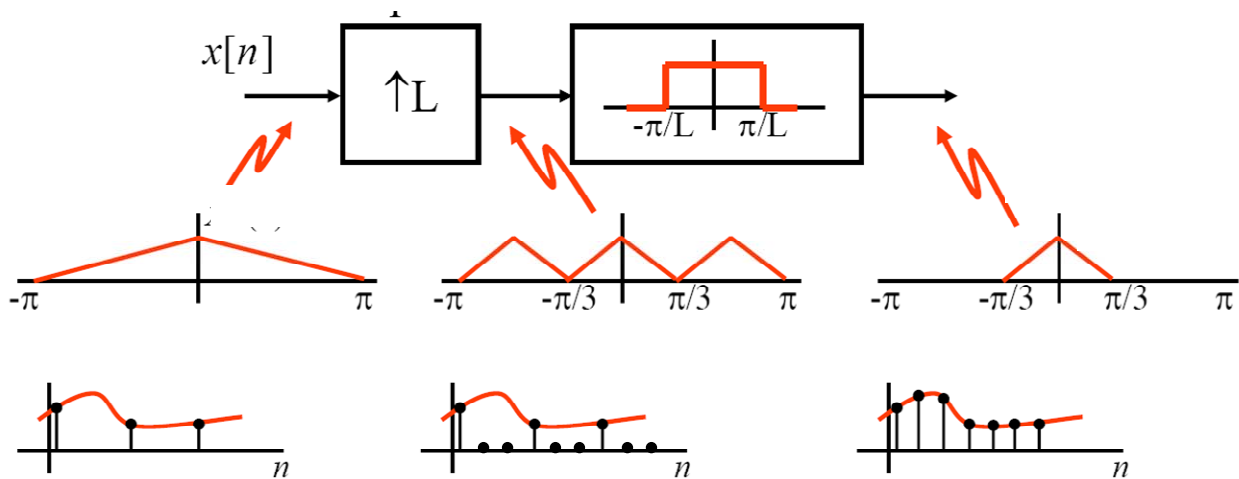


Όμως το ζητούμενο είναι η αύξηση της συχνότητας δειγματοληψίας, που για το σήμα του προηγούμενου σχήματος, θα έδινε το ακόλουθο φάσμα:



Επομένως, για να προκύψει σήμα με πολλαπλάσια συχνότητα δειγματοληψίας θα πρέπει να αφαιρεθεί το πλεονάζον φασματικό περιεχόμενο με τη βοήθεια ενός M-ζωνικού (M^{th} band) βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής π/M .

Συμπερασματικά, πριν την αποδεκάτιση, για να μην υπάρξει επικάλυψη, το σήμα πρέπει να γίνει M-ζωνικό. Το M-ζωνικό βαθυπερατό φίλτρο είναι το διακριτό ισοδύναμο του φίλτρου αντι-επικάλυψης (anti-aliasing). Μετά την επέκταση, το M-ζωνικό βαθυπερατό φίλτρο αφαιρεί τις περιττές φασματικές συνιστώσες και είναι ένα φίλτρο αντι-εικόνας (anti-image). Ουσιαστικά, το φίλτρο αντι-εικόνας μετατρέπει τα επιπρόσθετα μηδενικά σε δείγματα εκ παρεμβολής όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Δείτε επίσης το Σχήμα 1.7 του φυλλαδίου εργαστηριακών ασκήσεων



Το MATLAB διαθέτει σειρά σχετικών με τις παραπάνω λειτουργίες συναρτήσεων. Η συνάρτηση `downsample` του MATLAB εκτελεί τη λειτουργία της αποδεκάτισης, δηλαδή, μειώνει το ρυθμό δειγματοληψίας διατηρώντας ένα κάθε n δείγματα. Με τη συνάρτηση `decimate` γίνεται συνδυασμένα η λειτουργία του φιλτραρίσματος και της αποδεκάτισης. Η συνάρτηση `upsample` του MATLAB εκτελεί τη λειτουργία της επέκτασης, δηλαδή, αυξάνει το ρυθμό δειγματοληψίας παρεμβάλλοντας $n-1$ μηδενικά μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων. Με τη συνάρτηση `interp` γίνεται συνδυασμένα η λειτουργία της επέκτασης και του βαθυπερατού φιλτραρίσματος (παρεμβολή τιμών). Τέλος, η συνάρτηση `resample` αλλάζει το ρυθμό δειγματοληψίας κατά ένα κλασματικό αριθμό. Συμβουλευτείτε την τεκμηρίωση του MATLAB για τον ακριβή τρόπο σύνταξης των συναρτήσεων πληκτρολογώντας `doc 'function name'` στο παράθυρο εντολών, όπου `'function_name'` το όνομα της συνάρτησης.

Εξάσκηση

Δοκιμάστε στο παράθυρο εντολών τα ακόλουθα προκειμένου να εμπεδώσετε τη χρήση των παραπάνω συναρτήσεων για αποδεκάτιση σημάτων.

```
>> clear all; close all;
>> t = 0:.001:1;
>> x = cos(2*pi*30*t) + 0.1*sin(2*pi*300*t);
>> y = downsample(x, 4);
```

% διάνυσμα χρόνος
% ημιτονικό σήμα
% αποδεκάτιση σήματος

Προσθέστε κώδικα για να απεικονίστε σε ένα σχήμα ως μίσχους τα πρώτα 240 δείγματα του σήματος x και τα πρώτα 60 δείγματα του αποδεκατισμένου σήματος y σε κλίμακα από -1.2 έως 1.2. Σε χωριστό σχήμα σχεδιάστε το μέτρο του φάσματος του αποδεκατισμένου σήματος y . Στη συνέχεια προσθέστε κώδικα ώστε να παράγεται το σήμα y με τη βοήθεια της `decimate` και σχεδιάστε τα αντίστοιχα με τα προηγούμενα διαγράμματα. Παρατηρήστε με προσοχή τα διαγράμματα που παρήχθησαν τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας.

Ερώτηση 1: Εξηγείστε τις διαφορές που βλέπετε στα διαγράμματα του σήματος που προκύπτει από την αποδεκτάτιση με χρήση της `downsample` και της `decimate` αντίστοιχα. Γράψτε την απάντησή σας σε ένα αρχείο κειμένου `lab4_nnnnn.txt`, όπου `nnnnn` τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας, χρησιμοποιώντας το Notepad από το μενού των Windows (*Start* → *Programs* → *Accessories* → *Notepad*) και αποθηκεύστε το στον φάκελο My Documents. Θα υποβάλετε το αρχείο αυτό ηλεκτρονικά στο τέλος, αφού απαντήσετε και τις επόμενες ερωτήσεις, οπότε μπορείτε να τα αφήσετε ανοικτό.

Προσθέστε κώδικα ώστε τώρα να κάνετε επέκταση του σήματος x κατά ένα παράγοντα 4 με τη βοήθεια της `upsample`. Απεικονίστε σε ένα σχήμα ως μίσχους τα πρώτα 60 δείγματα του σήματος x και τα πρώτα 240 δείγματα του παρεμβalλομένου σήματος y σε κλίμακα από -1.2 έως 1.2. Σε χωριστό σχήμα σχεδιάστε το μέτρο του φάσματος του παρεμβalλομένου σήματος y . Επαναλάβετε με την συνάρτηση `interp` αντί της `upsample`. Παρατηρήστε με προσοχή τα διαγράμματα που παρήχθησαν τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας.

Ερώτηση 2: Εξηγείστε τις διαφορές που βλέπετε στα διαγράμματα του σήματος που προκύπτει από την παρεμβολή με χρήση της `upsample` και της `interp` αντίστοιχα. Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου `lab4_nnnnn.txt`.

Τέλος, προσθέστε κώδικα ώστε τώρα να κάνετε πρώτα αραιώση του σήματος x κατά ένα παράγοντα $2/3$ και μετά πυκνωσή του κατά ένα παράγοντα $3/2$ με τη βοήθεια της `resample`. Σχεδιάστε αντίστοιχα των προηγούμενων διαγράμματα για το σήμα y .

Υποβάλατε την εργασία σας

Αποθηκεύσατε την τελευταία εκδοχή του κώδικά σας ως αρχείο M-file στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα `lab4_1_nnnnn.m`, όπου `nnnnn` τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας και υποβάλετε την εργασία σας για βαθμολόγηση ως εξής:

1. Επιλέξτε από την ιστοθέση του μαθήματος την [Εργαστηριακή Άσκηση 4](#) στην ενότητα “Υποβολή αναφορών”.
2. Στη σελίδα που θα εμφανισθεί κάντε κλικ στο κουμπί “Browse”.
3. Αναζητήστε το αρχείο σας στο φάκελο εργασίας (My Documents\MATLAB) και επιλέξτε το.
4. Κάντε κλικ στο κουμπί “Αποστολή του αρχείου” για να ανεβάσετε την εργασία σας στον εξυπηρετητή.
5. Εάν θέλετε να κάνετε κάποια διόρθωση, ακολουθήστε την ίδια διαδικασία ανεβάσματος.
6. Μην οριστικοποιήσετε την υποβολή γιατί μετά δε θα μπορείτε να υποβάλετε την απάντηση του επόμενου μέρους της άσκησης.

Μέρος 2: Εφαρμογή

Αντιγράψτε τον κώδικα του παραδείγματος 1.3 της παραγράφου 1.5 από το εργαστηριακό τεύχος σε ένα καινούριο αρχείο M-file και αποθηκεύστε το στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Επίσης, κατεβάστε από την ιστοσελίδα του μαθήματος το αρχείο `sima_lr.mat` και ομοίως αποθηκεύστε το στο φάκελο εργασίας σας.

Στο παράδειγμα αυτό γίνεται ζωνοπερατό φίλτράρισμα του ημιτονικού σήματος που περιέχεται στο αρχείο `sima_lp.mat` και εμφανίζονται τα σχετικά αποτελέσματα τόσο σε πλέγμα Nyquist (συχνότητα δειγματοληψίας F_s) όσο και σε πυκνό πλέγμα με συχνότητα δειγματοληψίας $n_{\text{samp}} * F_s$. Παρεμπιπτόντως επιδεικνύεται και η μεταβολή στην πυκνότητα φάσματος ισχύος του θορύβου που προκύπτει λόγω της υποδειγμάτισης.

Ως εφαρμογή των προηγούμενων, θα τροποποιήσετε τον κώδικα του παραδείγματος, ώστε η λειτουργία της αραιώσης να γίνει με τη βοήθεια της συνάρτησης `downsample`. Επιβεβαιώστε την ορθή λειτουργία του τροποποιημένου κώδικα συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά του φυλλαδίου.

Υποβάλατε την εργασία σας

Αποθηκεύσατε τον τροποποιημένο κώδικα ως αρχείο M-file στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα `lab4_2_nnnnn.m`, όπου `nnnnn` τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας και υποβάλατε την εργασία σας για βαθμολόγηση όπως περιγράφηκε προηγουμένως στο Μέρος 1 της άσκησης.

Μέρος 3: Διαμόρφωση AM, DSB

Θα ασχοληθείτε τώρα με το παράδειγμα 2.1 της παραγράφου 2.2 του τεύχους εργαστηριακών ασκήσεων. Το παράδειγμα αυτό παρουσιάζει τη διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση ενός σήματος DSB σε συνδυασμό με πύκνωση και αραιώση του πλέγματος δειγματοληψίας. Για την εκτέλεση του παραδείγματος 2.1, αντιγράψτε τον κώδικα από το εργαστηριακό τεύχος σε ένα καινούριο αρχείο M-file και αποθηκεύστε το στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα `lab4_3_nnnnn.m`, όπου `nnnnn` τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας. Επίσης, κατεβάστε από την ιστοσελίδα του μαθήματος το αρχείο `sima_lp.mat` και ομοίως αποθηκεύστε το στο φάκελο εργασίας σας. Μελετήστε τον κώδικα για να κατανοήσετε τη λειτουργία του, εκτελέστε τον και παρατηρήστε με προσοχή τα αποτελέσματα.

Ερώτηση 3: Μπορείτε να παράγετε το σήμα `s` με την εντολή `s=interp(sima_lp,4)` αντί να κάνετε τη συνέλιξη της γραμμής 20 του κώδικα; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου `lab4_nnnnn.txt`.

Με το σήμα `s` να παράγεται σε πιο πυκνό πλέγμα ως αποτέλεσμα παρεμβολής με την βοήθεια της `interp`, υπολογίστε το αποδιαμορφωμένο σήμα (γραμμή 37 του κώδικα) ως αποτέλεσμα της εφαρμογής της `decimate` στο διαμορφωμένο σήμα `s_dsb_dm` που υπολογίζεται στη γραμμή 30 του κώδικα.

Ερώτηση 4: Η προηγούμενη πράξη παράγει το σωστό αποτέλεσμα; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου `lab4_nnnnn.txt` αιτιολογώντας την επαρκώς.

Υποβάλατε την εργασία σας

Αποθηκεύσατε την τελευταία εκδοχή του κώδικά σας ως αρχείο M-file στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα `lab4_3_nnnnn.m`, όπου `nnnnn` τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας και υποβάλατε την εργασία σας για βαθμολόγηση όπως περιγράφηκε προηγουμένως στο Μέρος 1 της άσκησης.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον κώδικα που παράγατε για την παραγωγή σήματος AM. Απλώς αφαιρέσετε το σχόλιο από την εντολή που φαίνεται στη γραμμή 24 του παραδείγματος. Στη συνέ-

χεια τρέξετε το αρχείο και παρατηρείστε τα αποτελέσματα. Η προσεκτική παρατήρηση του τελευταίου σχήματος που θα παραχθεί δείχνει ότι το αποδιαμορφωμένο σήμα AM δεν είναι παρόν στο διάγραμμα.

Ερώτηση 5: Εξηγείστε τι συμβαίνει και ποια επιπλέον διόρθωση πρέπει να γίνει στον κώδικα; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου lab4_nnnnn.txt.

Η φώραση του σήματος στο παράδειγμα γίνεται με τη μέθοδο της ομόδυνης αποδιαμόρφωσης. Όμως για σήματα AM ο συνήθης τρόπος είναι η χρήση του φωρατή περιβάλλουσας. Στο MATLAB για το σκοπό αυτό μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `hilbert`. Παρά το όνομά της, η συνάρτηση `hilbert` υπολογίζει το αναλυτικό σήμα, δηλαδή, επιστρέφει ένα μιγαδικό σήμα το πραγματικό μέρος του οποίου είναι τα αρχικά δεδομένα και το φανταστικό μέρος είναι ο μετασχηματισμός Hilbert αυτών. Η συνάρτηση `hilbert` είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό της περιβάλλουσας και φάσης ενός σήματος. Για περισσότερες λεπτομέρειες συμβουλευθείτε το `help` του MATLAB.

Τροποποιείστε τώρα τον κώδικά σας, ώστε το αποδιαμορφωμένο σήμα AM να προκύψει με τη βοήθεια της συνάρτησης `hilbert`. Αφαιρέστε όσες εντολές δεν χρειάζονται πλέον.

Υποβάλατε την εργασία σας

Αποθηκεύσατε την τελευταία εκδοχή του κώδικά σας ως αρχείο M-file στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα lab4_4_nnnnn.m, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας και υποβάλατε την εργασία σας για βαθμολόγηση όπως περιγράφηκε προηγουμένως στο Μέρος 1 της άσκησης.

Ολοκληρώστε την υποβολή των αρχείων

1. Υποβάλατε το αρχείο lab4_nnnnn.txt ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία.
2. Εάν χρειαστεί μπορείτε να κάνετε διορθώσεις υποβάλλοντας εκ νέου τα διορθωμένα αρχεία.
3. Όταν είστε σίγουροι, προχωρήστε στην οριστικοποίηση κάνοντας κλικ στο κουμπί “Αποστολή για βαθμολόγηση” και απαντήστε καταφατικά στην ερώτηση που θα ακολουθήσει.