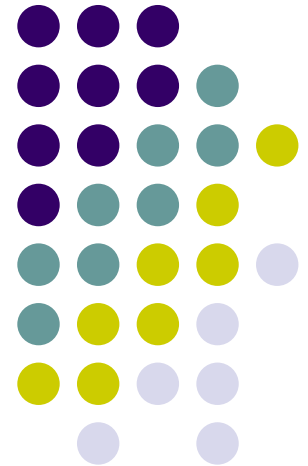
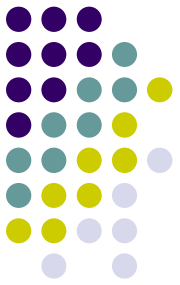


Θόρυβος και λάθη κατά τη μετάδοση

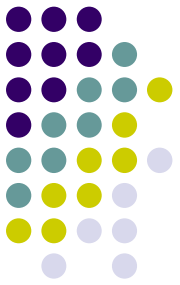




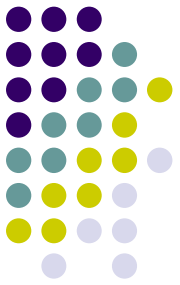
Πότε συμβαίνουν λάθη

- Για **μονοπολική (on-off)** σηματοδότηση το σήμα στην έξοδο είναι $y(kt_s) = a_k + n(kt_s)$, όπου $a_k=0$ όταν μεταδίδεται το bit 0 και $a_k=A$ όταν μεταδίδεται το bit 1
- Εάν $y(kt_s) > V$ θεωρούμε ότι μεταδόθηκε το bit 1
- Εάν $y(kt_s) < V$ θεωρούμε ότι μεταδόθηκε το bit 0
- Λάθη θα συμβούν όταν
 - $a_k=0$ και ο θόρυβος οδηγεί σε $y(kt_s) > V$
 - $a_k=A$ και ο θόρυβος οδηγεί σε $y(kt_s) < V$

Περιγραφή με θεωρία πιθανοτήτων



- Οι τιμές του σήματος και του θορύβου τη στιγμή δειγματοληψίας είναι τυχαίες μεταβλητές Y και N
 - Η τιμή της Y εκτός από το θόρυβο εξαρτάται και από την ύπαρξη ή μη παλμού
 - Οι υποθέσεις
 - $H_0: \alpha_k=0$ και $Y=n$ (μετάδοση 0)
 - $H_1: \alpha_k=A$ και $Y=A+n$ (μετάδοση 1)
- συμβολίζουν τη μετάδοση του bit 0 και 1, αντίστοιχα, και λήψη του σήματος με θόρυβο



Υπό συνθήκη πιθανότητες

- Η υπό συνθήκη κατανομή πυκνότητας πιθανότητας του λαμβανόμενου σήματος Y ανάλογα με το τι μεταδόθηκε είναι

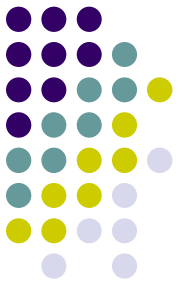
$$p_Y(y | H_0) = p_N(y)$$

$$p_Y(y | H_1) = p_N(y - A)$$

όπου $p_N(n)$ η κατανομή του θορύβου

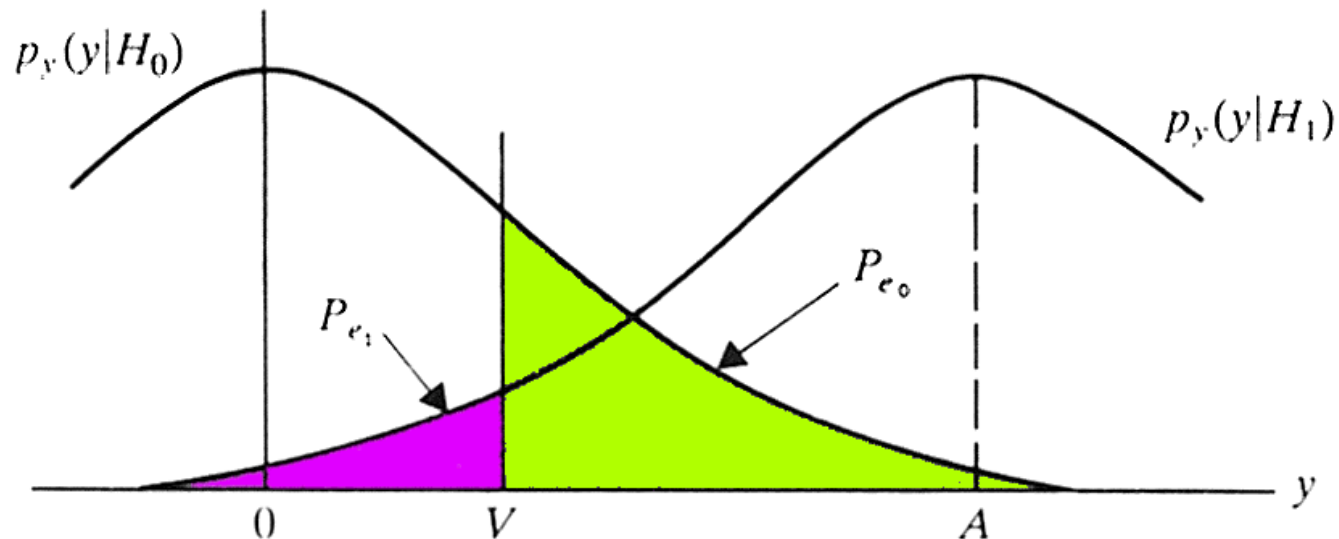
- Στην περίπτωση λευκού θορύβου

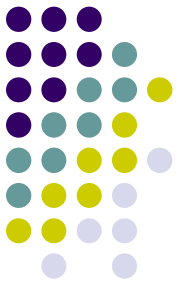
$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$



Πιθανότητα σφάλματος

- Εάν $Y < V$ επιλέγουμε την υπόθεση H_0 μετάδοσης $\alpha_k = 0$
- Εάν $Y > V$ επιλέγουμε την υπόθεση H_1 μετάδοσης $\alpha_k = A$





Πιθανότητα σφάλματος

- Οι πιθανότητες σφάλματος είναι

$$P_{e0} \triangleq P\{Y > V \mid H_0\} = \int_V^{\infty} p_Y(y \mid H_0) dy$$

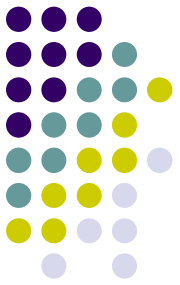
$$P_{e1} \triangleq P\{Y < V \mid H_1\} = \int_{-\infty}^V p_Y(y \mid H_1) dy$$

- Η μέση πιθανότητα σφάλματος P_e είναι

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}$$

$$P_0 = P\{H_0\}, \quad P_1 = P\{H_1\}$$

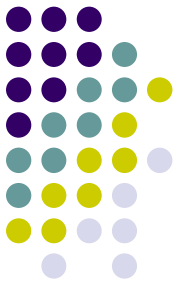
- όπου P_0 και P_1 είναι οι a priori πιθανότητες να γεννηθούν τα bit 0 και 1, αντίστοιχα, στην πηγή πληροφορίας



Βέλτιστο κατώφλι

- Το βέλτιστο κατώφλι V_{opt} προκύπτει από την σχέση
$$dP_e / dV = 0 \Rightarrow P_0 p_Y(V_{opt} | H_0) = P_1 p_Y(V_{opt} | H_1)$$
- Συνήθως αναμένουμε ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1
$$P_0 = P_1 = 1/2 \Rightarrow$$
$$P_e = 1/2 (P_{e0} + P_{e1})$$
$$p_Y(V_{opt} | H_0) = p_Y(V_{opt} | H_1)$$
- το βέλτιστο κατώφλι V_{opt} βρίσκεται στην **τομή** των καμπυλών των υπό συνθήκη κατανομών πυκνότητας πιθανότητας
 - **γιατί;**

Πιθανότητα σφάλματος παρουσία λευκού θορύβου



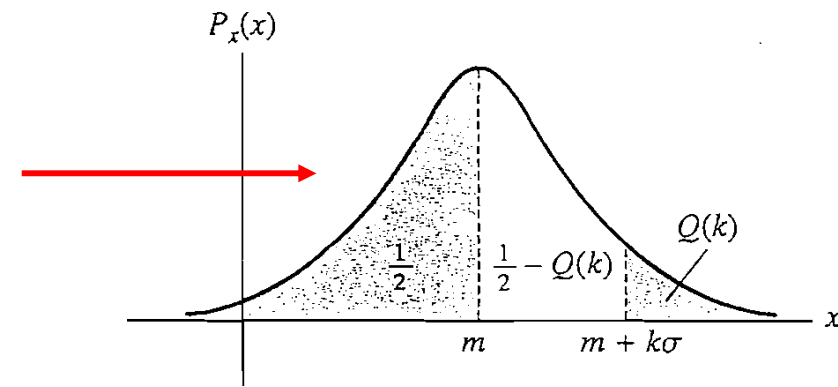
- Οι πιθανότητες σφάλματος για λευκό θόρυβο και κατώφλι V είναι

$$P_{e0} = \int_V^\infty p_N(y) dy = \int_V^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

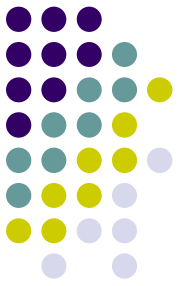
- παρομοίως

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^V p_N(y - A) dy = Q\left(\frac{A - V}{\sigma}\right)$$

όπου $Q(x)$ η συνάρτηση Q



Πιθανότητα σφάλματος παρουσία λευκού θορύβου



- Για ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1

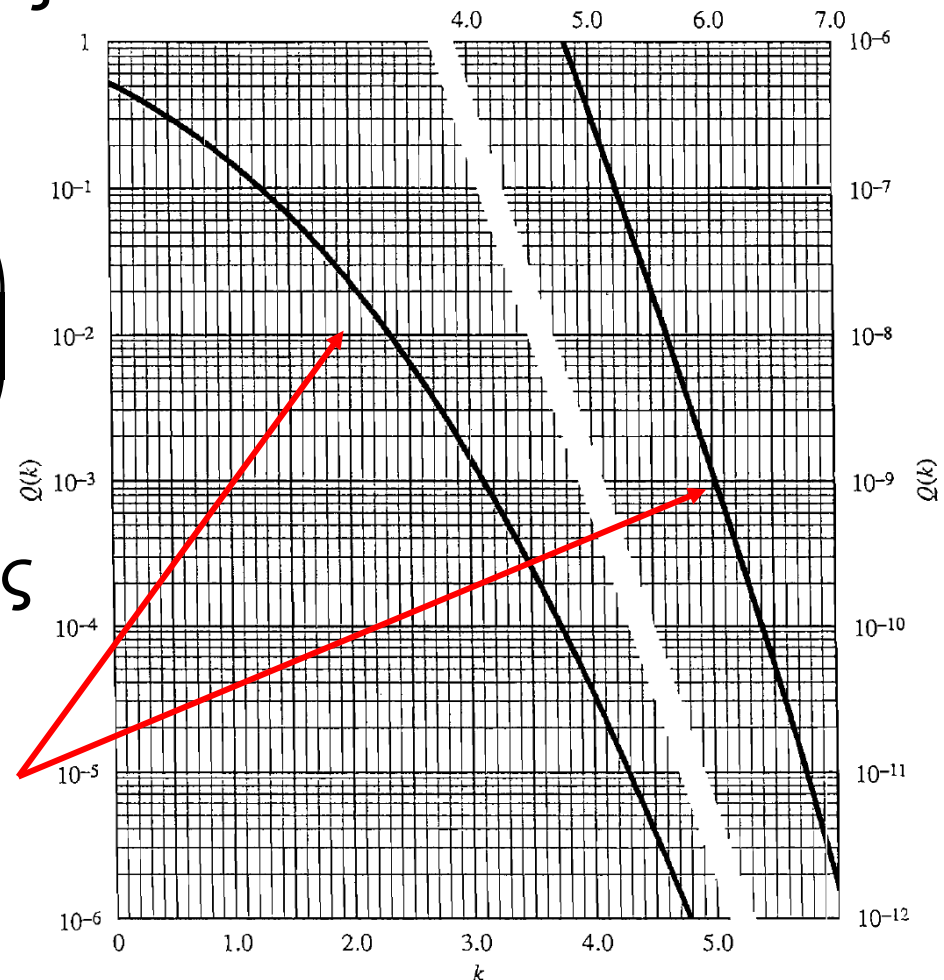
$$V_{opt} = A/2$$

$$P_{e0} = P_{e1} = P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

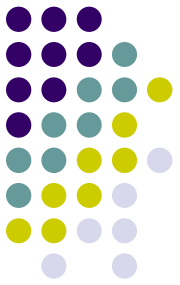
- Η πιθανότητα σφάλματος
μειώνεται **ταχύτατα**

για $A/2\sigma = 2.0 \rightarrow P_e \approx 10^{-2}$

για $A/2\sigma = 6.0 \rightarrow P_e \approx 10^{-9}$

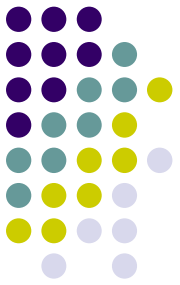


Πιθανότητα σφάλματος σε πολική σηματοδότηση



- Για **πολική (polar)** σηματοδότηση, $\alpha_k = \pm A/2$
- Η απόσταση μεταξύ των συμβόλων είναι ίδια με τη μονοπολική
- Η πιθανότητα σφάλματος προκύπτει από την ίδια σχέση
 - Η μόνη διαφορά $V_{opt} = 0$
- Όμως απαιτείται μικρότερη ισχύς για το ίδιο αποτέλεσμα!

Πιθανότητα σφάλματος για διπολική σηματοδότηση



- Για διπολική (bipolar) σηματοδότηση και ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1

$$P_{e0} = \int_{A/2}^{\infty} p_N(y) dy + \int_{-\infty}^{-A/2} p_N(y) dy = 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

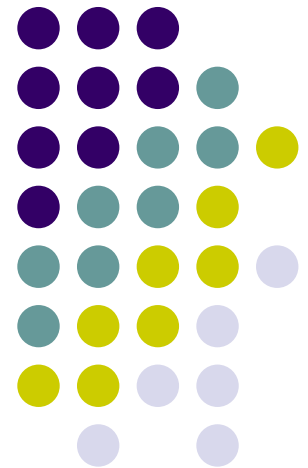
$$P_{e1+} = \int_{-\infty}^{A/2} p_N(y - A) dy = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$P_{e1-} = \int_{-A/2}^{\infty} p_N(y + A) dy = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

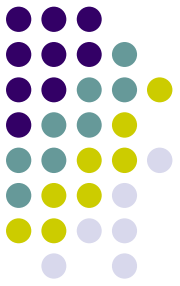
- και τελικά

$$P_e = 1.5Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Πιθανότητα σφάλματος και σηματοθορυβική σχέση



Σηματοθορυβική σχέση εξόδου



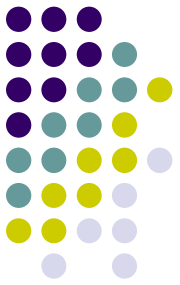
- Η επίδραση της σηματοθορυβικής σχέσης στην πιθανότητα σφάλματος εκδηλώνεται μέσω του πλάτους των παλμών
- Το πλάτος με τη σειρά του εξαρτάται από το είδος σηματοδότησης
 - Για μονοπολική (και διπολική) σηματοδότηση $S_R = A^2/2$
 - Για πολική σηματοδότηση $S_R = A^2/4$

- Επομένως

$$A = \begin{cases} \sqrt{2S_R} & \text{μονο- (δι-) πολική} \\ \sqrt{4S_R} & \text{πολική} \end{cases}$$

- ο παράγων $\sqrt{2}$ μπορεί να έχει σημαντική επίδραση στην P_e

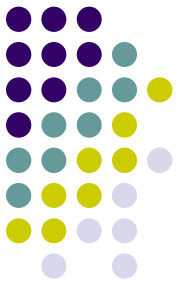
Σηματοθορυβική σχέση εξόδου



- Η μεταβλητότητα σ^2 ισούται με την ισχύ του θορύβου στην έξοδο του φίλτρου N_R
- Ο λόγος $A/2\sigma$ συναρτήσει της σηματοθορυβικής σχέσης $SNR=S_R/N_R$ είναι

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{A^2}{4N_R} = \begin{cases} SNR / 2 & \text{μονο- (δι-) πολική} \\ SNR & \text{πολική} \end{cases}$$

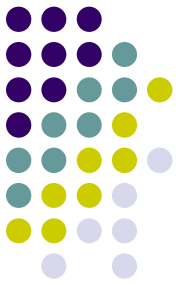
Πιθανότητα σφάλματος ως προς σηματοθορυβική σχέση



- Άρα

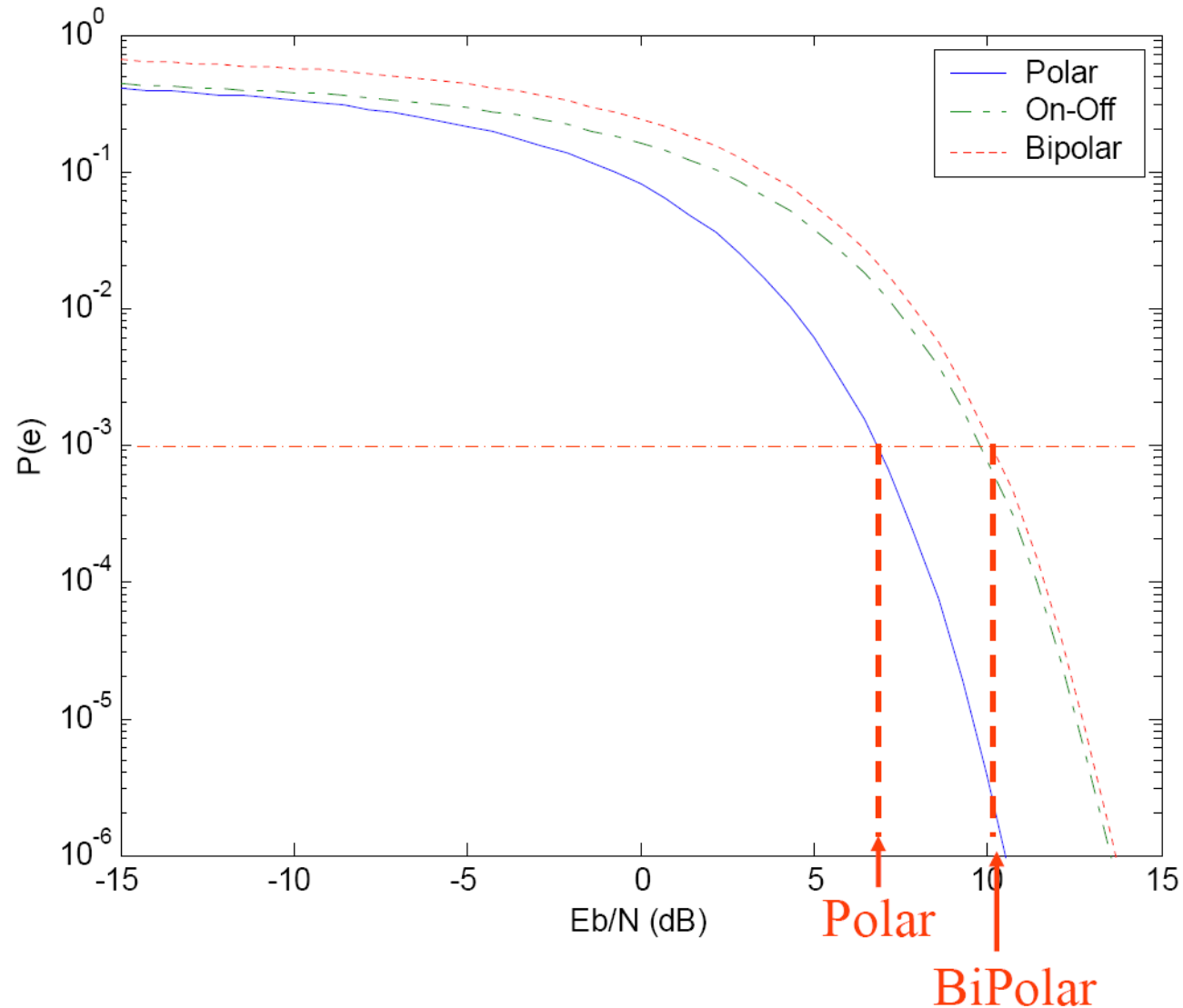
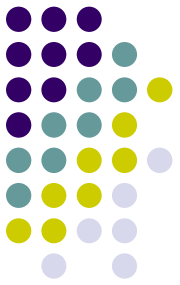
$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{SNR/2}\right) & \text{μονοπολική} \\ 1.5Q\left(\sqrt{SNR/2}\right) & \text{διπολική} \\ Q\left(\sqrt{SNR}\right) & \text{πολική} \end{cases}$$

Πιθανότητα σφάλματος και ρυθμός σηματοδότησης

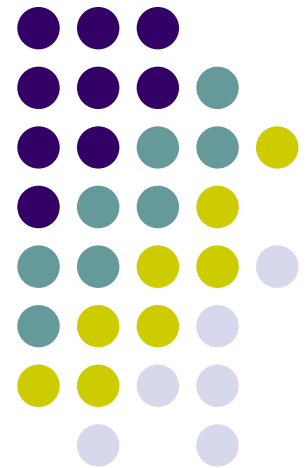


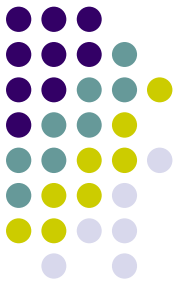
- Η επίδραση του ρυθμού σηματοδότησης r_b είναι κρυμμένη στην ισχύ του θορύβου
- Για να περάσουν παλμοί διάρκειας $T_b = 1/r_b$ από το βαθυπερατό φίλτρο
→ αυτό πρέπει να έχει εύρος ζώνης $B_T \geq r_b/2$
- Άρα
$$N_R = N_0 B_T \geq N_0 r_b / 2$$
- Μεγαλύτεροι ρυθμοί σηματοδότησης απαιτούν μεγαλύτερη ισχύ σήματος για να διατηρήσουν την ίδια πιθανότητα λάθους!

Σύγκριση πιθανοτήτων σφάλματος



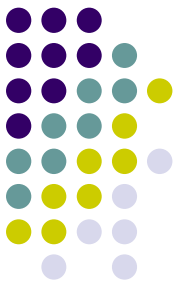
Προσαρμοσμένο φίλτρο (Matched filter)





Προσαρμοσμένο φίλτρο

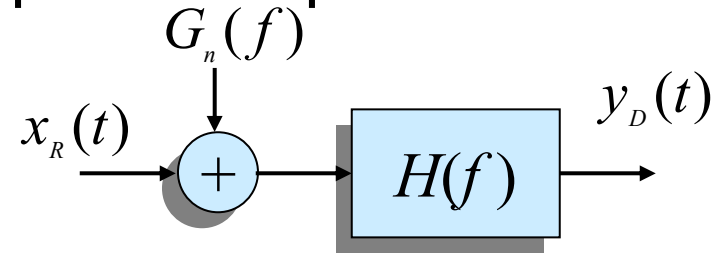
- Κάθε ψηφιακός δέκτης περιλαμβάνει ένα βαθυπερατό φίλτρο για να περιορίσει το θόρυβο χωρίς εισαγωγή ISI
- Ποιο είναι το βέλτιστο φίλτρο;
- Για χρονικά περιορισμένους παλμούς σε λευκό θόρυβο
→ προσαρμοσμένο φίλτρο



Βέλτιστο φίλτρο

- Έστω λαμβανόμενο σήμα με ένα μόνο παλμό

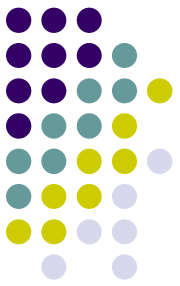
$$\begin{cases} x_R(t) = A_R p(t - t_0) \\ X_R(f) = A_R P(f) \exp(-j2\pi f t_0) \end{cases}$$



με ενέργεια παλμού

$$E_R = \int_{-\infty}^{\infty} |X_R(f)|^2 df = A_R^2 \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df$$

- Το βέλτιστο φίλτρο θα παράγει παλμό μέγιστου πλάτους A κάποια χρονική στιγμή $t=t_0+t_d$
- Η μεγιστοποίηση της σηματοθορυβικής σχέσης $(A/\sigma)^2$ τη στιγμή $t=t_0+t_d$ ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθους



Σηματοθορυβική σχέση

- Το πλάτος του παλμού **μετά το φίλτρο** στη λήψη είναι

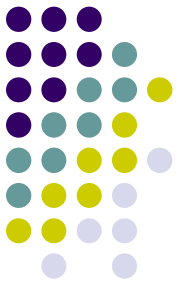
$$A = \mathcal{F}^{-1} [H(f)X_R(f)] \Big|_{t=t_0+t_d}$$
$$= A_R \int_{-\infty}^{\infty} H(f)P(f) \exp(j2\pi f t_d) df$$

- Ο θόρυβος **μετά το φίλτρο** στη λήψη είναι

$$N_R = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_n(f) df$$

και η προς μεγιστοποίηση ποσότητα είναι

$$\left(\frac{A}{\sigma} \right)^2 = A_R^2 \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)P(f) \exp(j2\pi f t_d) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_n(f) df}$$



Μεγιστοποίηση

- Η λύση προκύπτει χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Schwartz

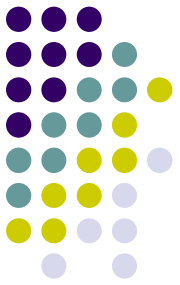
$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} V(f)W(f)df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df$$

και θέτοντας

$$V(f) = H(f)\sqrt{G_n(f)}$$

$$W(f) = A_R H(f) P(f) \exp(j2\pi f t_d) / V(f)$$

$$= A_R P(f) \exp(j2\pi f t_d) / \sqrt{G_n(f)}$$



Βέλτιστο φίλτρο

- Η ισότητα προκύπτει όταν $V(f)$ είναι ανάλογο της μιγαδικής συζυγούς $W^*(f)$, έστω

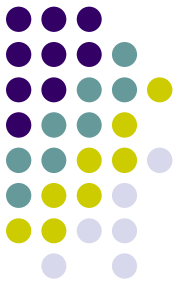
$$V(f) = KW^*(f) / A_R$$

- Τότε λαμβάνουμε τη μέγιστη τιμή

$$\left(\frac{A}{\sigma} \right)^2 \Big|_{\max} = A_R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|^2}{G_n(f)} df$$

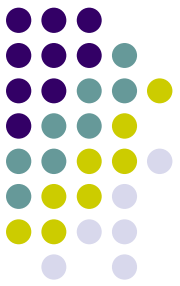
που αντιστοιχεί στο φίλτρο

$$H_{\text{opt}}(f) = \frac{W^*(f)}{\sqrt{G_n(f)}} = K \frac{P^*(f) \exp(-j2\pi f t_d)}{G_n(f)}$$



Βέλτιστο φίλτρο

- Το μέτρο $|H_{opt}(f)|$ είναι ανάλογο του $|P(f)|$ και αντιστρόφως ανάλογο του $G_n(f)$
- Δίνει έμφαση στις συχνότητες όπου το φάσμα του σήματος είναι μεγάλο
- Μειώνει την έμφαση σε συχνότητες όπου ο θόρυβος είναι μεγάλος



Προσαρμοσμένο φίλτρο

- Στην περίπτωση **λευκού θορύβου** η κρουστική απόκριση του βέλτιστου φίλτρου γίνεται

$$h_{\text{opt}}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{2K}{N_0} P^*(f) \exp(-j2\pi f t_d) \right] = \frac{2K}{N_0} p(t_d - t)$$

από όπου προκύπτει ο όρος **προσαρμοσμένο φίλτρο**

- Έχει το σχήμα του παλμού **ανεστραμμένο** στο χρόνο και **μετατοπισμένο** κατά t_d

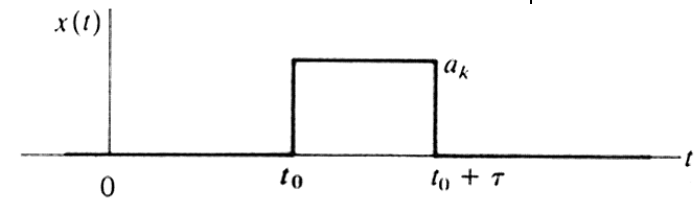
- Επιτυγχάνει τη μέγιστη τιμή

$$\left(\frac{A}{\sigma} \right)^2 \Big|_{\max} = \frac{A_R^2}{N_0 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \frac{2E_R}{N_0}$$

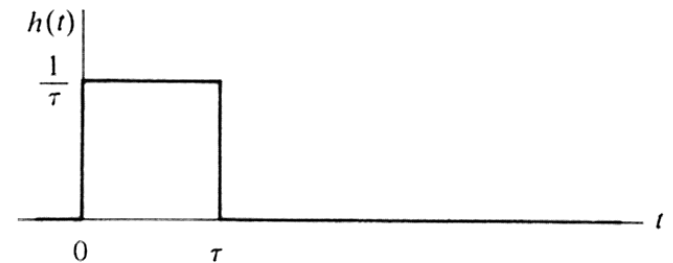
όπου E_R η ενέργεια του παλμού

Παράδειγμα

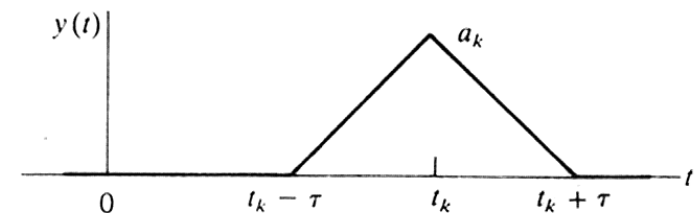
- Λαμβανόμενος παλμός
- Κρουστική απόκριση προσαρμοσμένου φίλτρου
- Παλμός στην έξοδο



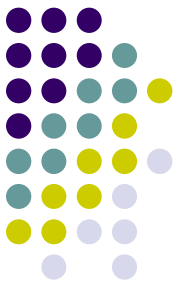
(a)



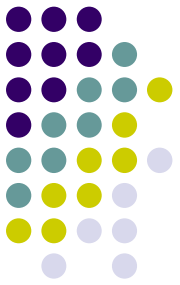
(b)



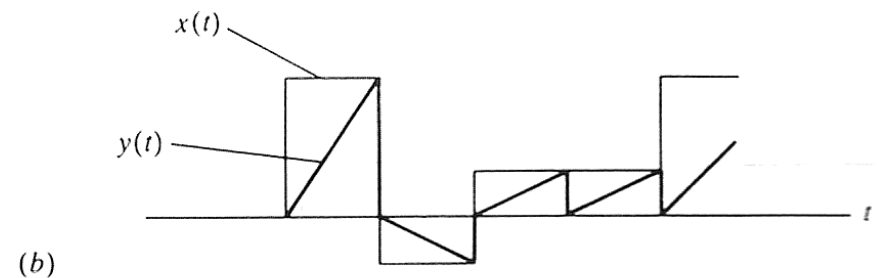
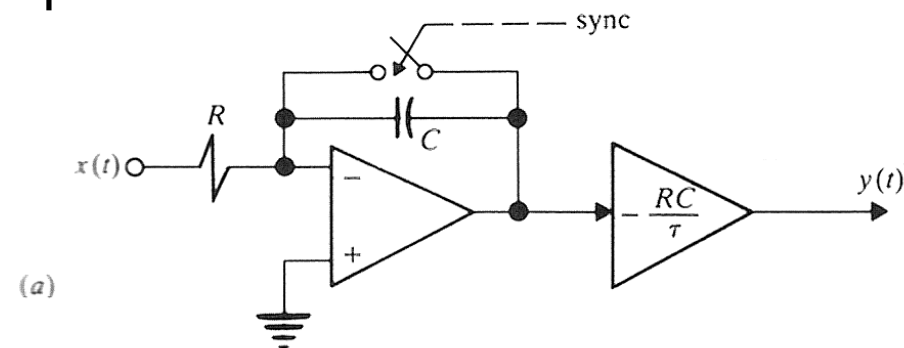
(c)



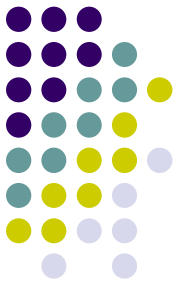
Υλοποίηση με τελεστικό ενισχυτή



- Φίλτρο ολοκλήρωσης και απόρριψης (integrate and dump)
 - Ολοκλήρωση του σήματος μέχρι το τέλος της διάρκειας παλμού
 - Μηδενισμός και επανεκκίνηση

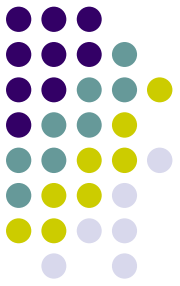


Λόγος ενέργειας bit προς πυκνότητα θορύβου



- Η μέση ενέργεια ανά bit ορίζεται ως
$$E_b \triangleq S_R / r_b$$
- Ο λόγος ενέργειας bit προς πυκνότητα θορύβου είναι
$$E_b / N_0 = S_R / N_0 r_b$$
- Για παλμούς πλάτους a_k η μέση ενέργεια ανά bit είναι
$$E_b = \overline{a_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt = \overline{a_k^2} \tau_{eq}$$
- Επιλέγοντας το προσαρμοσμένο φίλτρο ως
$$h(t) = \frac{1}{\tau_{eq}} p(t_d - t)$$
η μέγιστη έξοδος του φίλτρου είναι a_k

Λόγος ενέργειας bit προς πυκνότητα θορύβου



- Η ισχύς του θορύβου στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

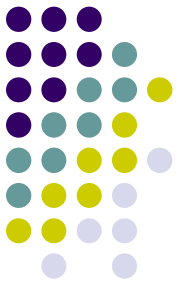
$$N_R = \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2\tau_{eq}}$$

- επομένως

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{\overline{a_k^2}}{2\sigma^2}$$

- και ανάλογα με τη σηματοδότηση

$$\left(\frac{A}{2\sigma} \right)^2 = \begin{cases} E_b / N_0 & \text{μονο- (δι-) πολική} \\ 2E_b / N_0 & \text{πολική} \end{cases}$$



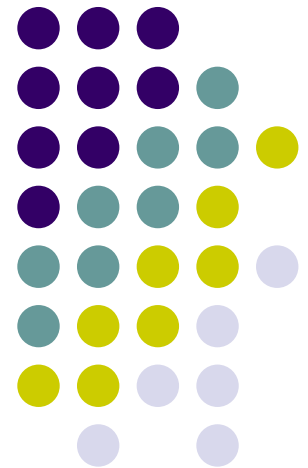
Πιθανότητα σφάλματος

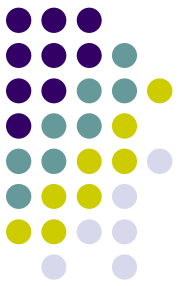
- Η πιθανότητα σφάλματος μπορεί να επανυπολογισθεί συναρτήσει του **λόγου ενέργειας bit προς πυκνότητα θορύβου**

$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{E_b / N_0}\right) & \text{μονοπολική} \\ Q\left(\sqrt{2E_b / N_0}\right) & \text{πολική} \\ 1.5Q\left(\sqrt{E_b / N_0}\right) & \text{διπολική} \end{cases}$$

- Οι ελάχιστες δυνατές τιμές της πιθανότητας σφάλματος επιτυγχάνονται μόνο με το προσαρμοσμένο φίλτρο
 - Ως εάν $B_T = 1/2 r_b \rightarrow N_R = N_0 r_b / 2$, άσχετα του εάν αυτό αληθεύει

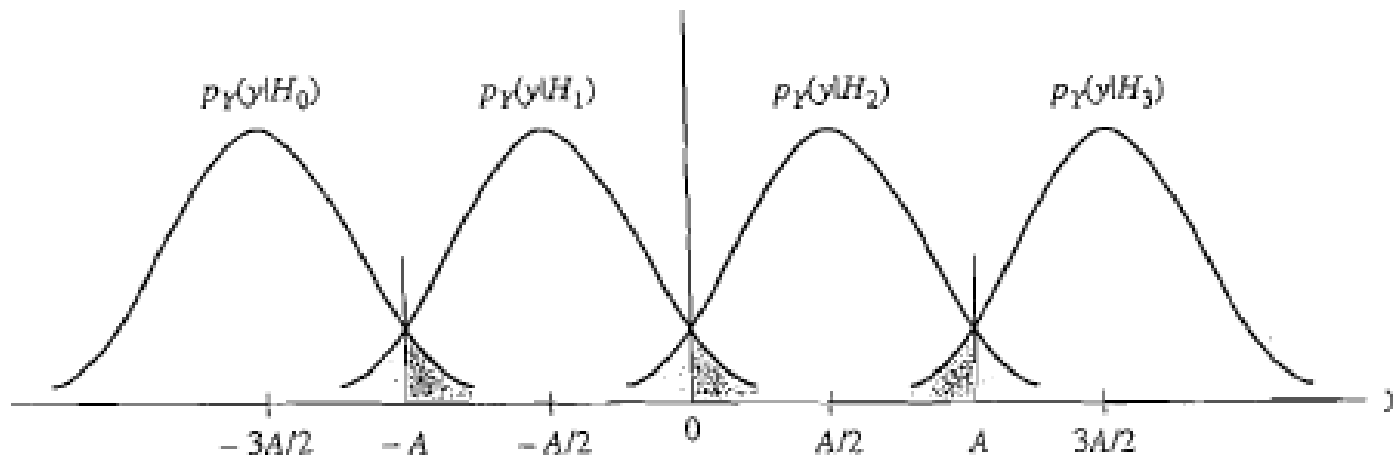
Πιθανότητα σφάλματος για M -κη
σηματοδότηση





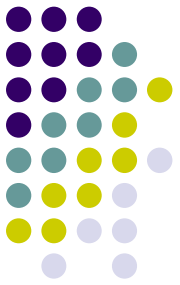
Τα κατώφλια απόφασης

- Στη γενική περίπτωση M -κης σηματοδότησης με M άρτιο και ισοπίθανες εμφανίσεις των συμβόλων



τα πλάτη των συμβόλων είναι

$$a_k = \pm A/2, \pm 3A/2, \dots, \pm (M-1)A/2$$



Η πιθανότητα σφάλματος

- Η πιθανότητα σφάλματος για ισοπίθانا σύμβολα είναι

$$P_e = \frac{1}{M} (P_{e0} + P_{e1} + \dots + P_{eM-1})$$

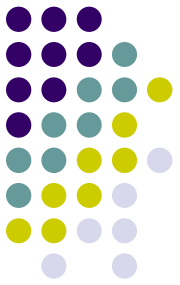
- Για τα δύο ακραία σύμβολα

$$P_{e0} = P_{eM-1} = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

- Για τα ενδιάμεσα σύμβολα

$$P_{e1} = P_{e1} = \dots = P_{eM-2} = 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

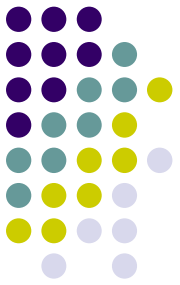
Πιθανότητα σφάλματος για M -κη σηματοδότηση



- Τελικά

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{M} \left[2 \times Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + (m-2) \times 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \right] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

Πιθανότητα σφάλματος και σηματοθορυβική σχέση



- Με τη μέση ισχύ ενός M -κού συμβόλου να είναι

$$E_M = \overline{a_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt = \overline{a_k^2} \tau_{\text{eq}}$$

για ισοπίθانا σύμβολα

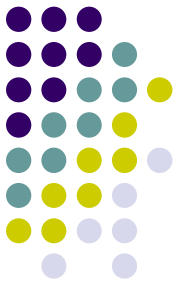
$$\overline{a_k^2} = \frac{M^2 - 1}{12} A^2$$

- Επομένως

$$\left(\frac{A}{2\sigma} \right)^2 = \frac{3}{M^2 - 1} \frac{E_M}{\tau_{\text{eq}} \sigma^2} = \frac{3}{M^2 - 1} \frac{1}{r \tau_{\text{eq}}} \frac{S_R}{N_R}$$

όπου r ο ρυθμός σηματοδότησης και S_R/N_R η σηματοθορυβική σχέση

Πιθανότητα σφάλματος και σηματοθορυβική σχέση



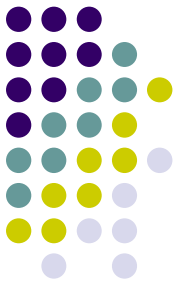
- Για M -κη σηματοδότηση ισχύει

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \leq \frac{6}{M^2 - 1} \frac{S_R}{N_0 r}$$

- Η ισότητα προκύπτει όταν χρησιμοποιούμε προσαρμοσμένο φίλτρο, οπότε

$$N_R = \sigma^2 = \frac{N_0}{2\tau_{\text{eq}}}$$

Ρυθμός λανθασμένων bit (BER)



- Η πιθανότητα P_e αναφέρεται σε σύμβολα, όχι bit
- Εάν υποθέσουμε ότι η M -κη σηματοδότηση μεταφέρει δυαδικά μηνύματα, δηλαδή, $M=2^n$

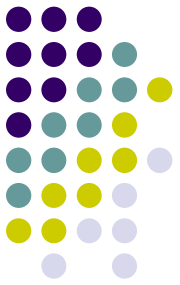
$$r_b = r \log_2 M$$

η πιθανότητα λάθους bit (για κώδικα Gray και αρκετά μεγάλη σηματοθορυβική σχέση) είναι

$$P_{be} \approx P_e / \log_2 M$$

- Συνήθως αναφέρεται ως **Bit Error Rate (BER)**

Ρυθμός λανθασμένων bit (BER)



- Τελικά

$$P_{be} \approx 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

- Ως συνάρτηση της σηματοθορυβικής σχέσης

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \leq \frac{6}{M^2-1} \frac{S_R}{N_0 r} = \frac{6 \log_2 M}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}$$

με την ισότητα να ισχύει για το προσαρμοσμένο φίλτρο