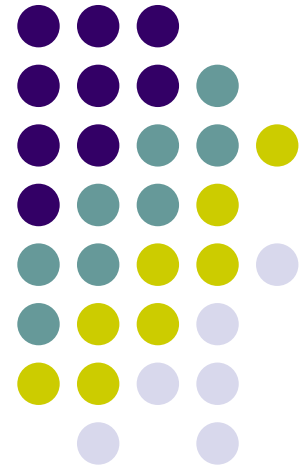
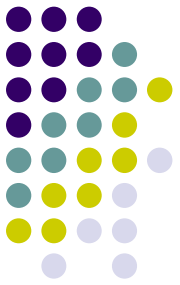


Διαμόρφωση Συχνότητας

Frequency Modulation (FM)

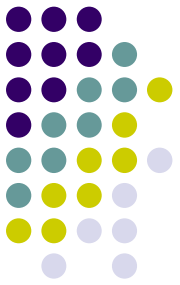


Τι συμβαίνει με τις γραμμικές διαμορφώσεις;



- Στη **γραμμική διαμόρφωση** CW (Carrier Wave) δηλαδή, AM, DSB, SSB, VSB
 - Το πλάτος ενός ημιτονικού φέροντος μεταβάλλεται σύμφωνα με την πληροφορία
 - Το διαμορφωμένο σήμα είναι μια μετατοπισμένη σε συχνότητα εκδοχή του διαμορφώνοντα σήματος
 - τα φάσματα μοιάζουν
 - Το εύρος ζώνης μετάδοσης είναι δεν υπερβαίνει το διπλάσιο του εύρους ζώνης του σήματος $B \leq 2W$

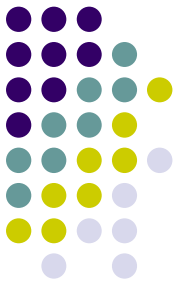
Όλες οι περιπτώσεις γραμμικών διαμορφώσεων



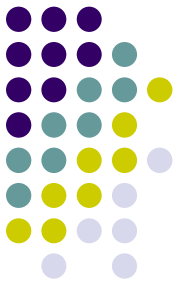
$$s(t) = A_c \left[s_c(t) \cos(2\pi f_c t) - s_s(t) \sin(2\pi f_c t) \right]$$

- AM $s_c(t) = 1 + k_a m(t), \quad s_s(t) = 0$
- DSB $s_c(t) = m(t), \quad s_s(t) = 0$
- SSB $s_c(t) = \frac{1}{2} m(t), \quad s_s(t) = \pm \frac{1}{2} \hat{m}(t)$
- VSB $s_c(t) = \frac{1}{2} m(t), \quad s_s(t) = \pm \frac{1}{2} m_s(t)$

Γραμμικές διαμορφώσεις και θόρυβος

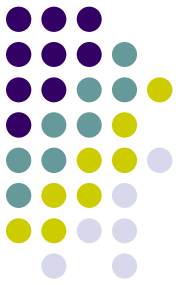


- Όπως θα δούμε στη συνέχεια, δεν υπάρχει βελτίωση σηματοθορυβικής σχέσης (SNR)
 - Η σηματοθορυβική σχέση δεν μπορεί να είναι καλύτερη από αυτή της μετάδοσης στη βασική ζώνη
 - Για να βελτιωθεί η σηματοθορυβική σχέση πρέπει να αυξηθεί η ισχύς εκπομπής



Τι είναι διαμόρφωση γωνίας;

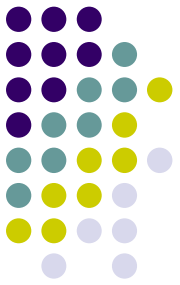
- Στις **διαμορφώσεις γωνίας** (FM, PM) το πλάτος του φέροντος διατηρείται σταθερό
 - Το σήμα μεταβάλλει τη συχνότητα ή φάση το φέροντος
- Είναι μη γραμμικές
 - Δεν υπάρχει απλή σχέση μεταξύ φάσματος μετάδοσης και φάσματος σήματος
 - Δημιουργούνται νέες συχνότητες
- Προκύπτει **βελτίωση** της επίδοσης σε σχέση με το θόρυβο και τις παρεμβολές



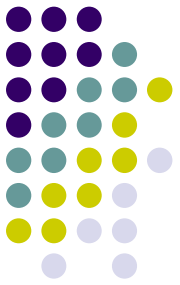
Διαμόρφωση γωνίας και θόρυβος

- Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η σηματοθορυβική σχέση στην έξοδο γίνεται πολύ καλύτερη όταν αυξάνει το εύρος ζώνης
 - Το εύρος ζώνης είναι, εν γένει, μεγαλύτερο του διπλάσιου του εύρους ζώνης του σήματος $B > 2W$
- Στις διαμορφώσεις γωνίας μπορούμε να ανταλλάξουμε εύρος ζώνης με σηματοθορυβική σχέση
 - διατηρώντας την ισχύ σταθερή

Τι χρειάζεται η διαμόρφωση γωνίας;



- Καλύτερη απαλοιφή θορύβου
 - Βελτίωση της πιστότητας του σήματος
- Εφαρμογές
 - Ραδιοφωνία FM → Εκπομπή υψηλής πιστότητας (hi fi) στα VHF
 - Τηλεόραση → Ήχος τηλεοπτικού σήματος
 - Ασύρματη (κινητή) επικοινωνία
 - VCR → Ο μόνος πρακτικός τρόπος για εγγραφή και αναπαραγωγή βίντεο σε ταινία
 - Π.χ. το σήμα φωτεινότητας στο VHS (γιατί;)
 - Συνθεσάιζερ (Yamaha), κάρτες ήχου PC (γιατί;)

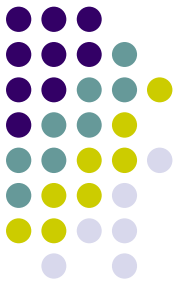


Ιστορικά στοιχεία

- Ο Carson (AT&T) υποστήριξε (1922) ότι η διαμόρφωση FM δε παρέχει ιδιαίτερα πλεονεκτήματα
 - Έχει εφεύρει την SSB
- E. Armstrong (1933) έδειξε τα πλεονεκτήματα της FM για ραδιοφωνική εκπομπή
 - Έχει εφεύρει και τον υπερ-ετερόδυνο δέκτη
- Η εισαγωγή και κυριάρχηση της ραδιοφωνίας FM καθυστέρησε πολύ
 - Απειλήσε με εξαφάνιση τη ραδιοφωνία AM
 - Disruptive technology
 - Η FCC μετέφερε τη μπάντα των FM από την περιοχή 42 μέχρι 50 MHz στην περιοχή 88 μέχρι 108 MHz ώστε να υπάρξει χώρος για κανάλια TV



EDWIN H. ARMSTRONG
1890 - 1954

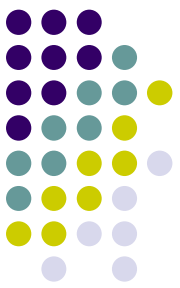


Ορισμοί

- Φέρον $c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi_c] = A_c \cos[\theta_c(t)]$
- Διαμορφωμένο σήμα

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] = A_c \operatorname{Re}\{\exp(j\theta_i(t))\}$$

- Η διαμόρφωση γίνεται **στον εκθέτη ή στη γωνία**



Ορισμοί (συν)

- Μέση συχνότητα για αύξουσα $\theta_i(t)$ είναι

$$f_{\Delta t}(t) = \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t}$$

- Στιγμιαία συχνότητα

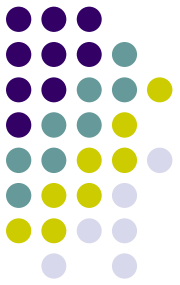
$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

- Η στιγμιαία γωνία στην περίπτωση του φέροντος

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c$$

Διαμόρφωση φάσης

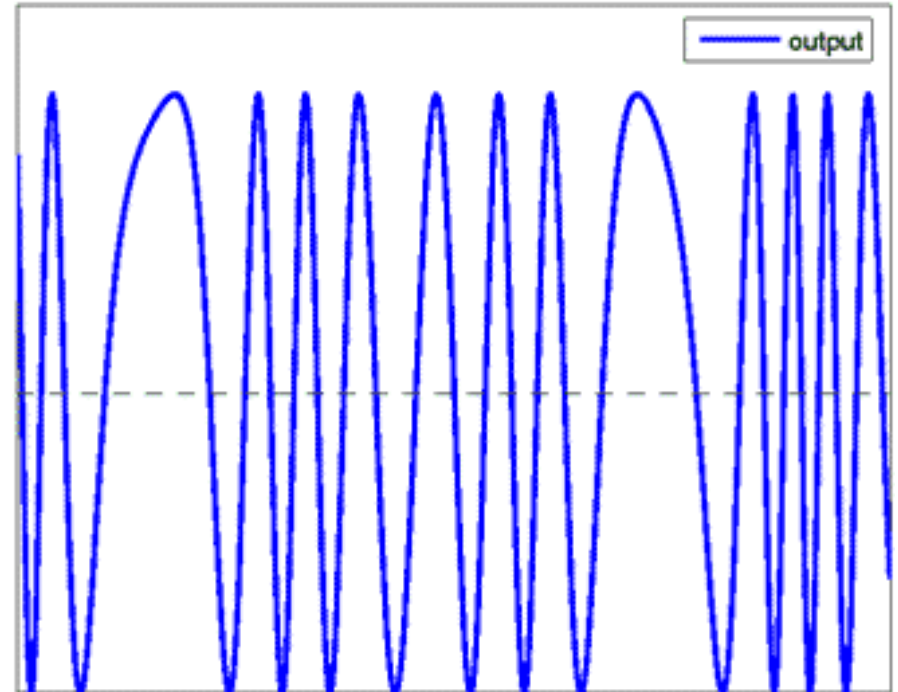
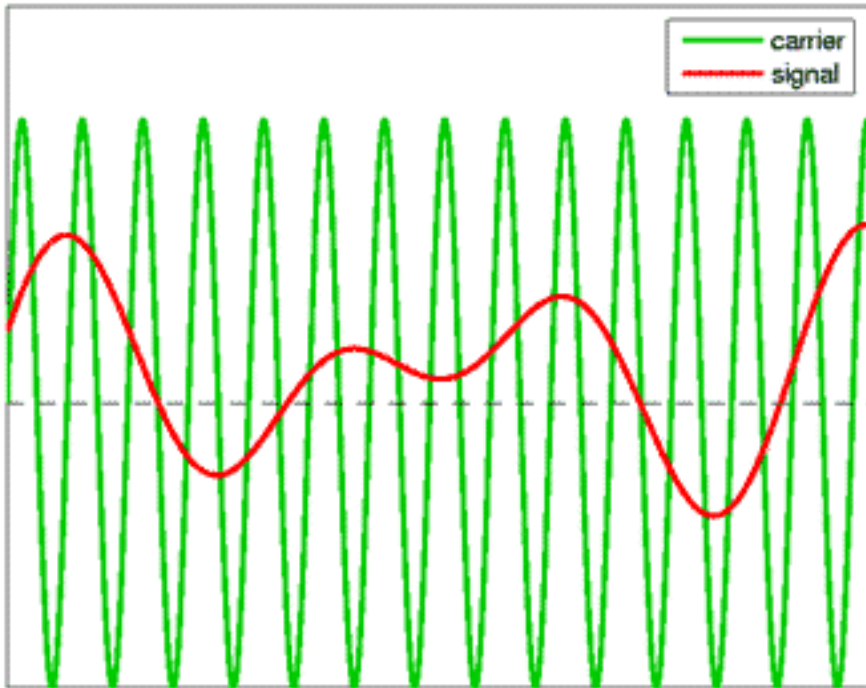
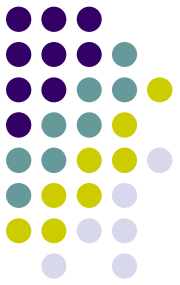
Phase Modulation (PM)



- Η φάση του διαμορφωμένου σήματος είναι ανάλογη του προς διαμόρφωση σήματος
$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$
- Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο αδιαμόρφωτο φέρον
- Η σταθερά k_p είναι η ευαισθησία φάσης
- Το διαμορφωμένο σήμα PM είναι

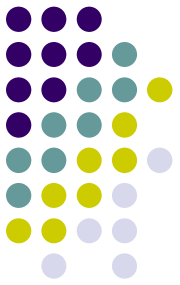
$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + k_p m(t)\right]$$

Διαμόρφωση φάσης (PM)



Διαμόρφωση συχνότητας

Frequency Modulation (FM)



- Η στιγμιαία συχνότητα είναι ανάλογη του προς διαμόρφωση σήματος

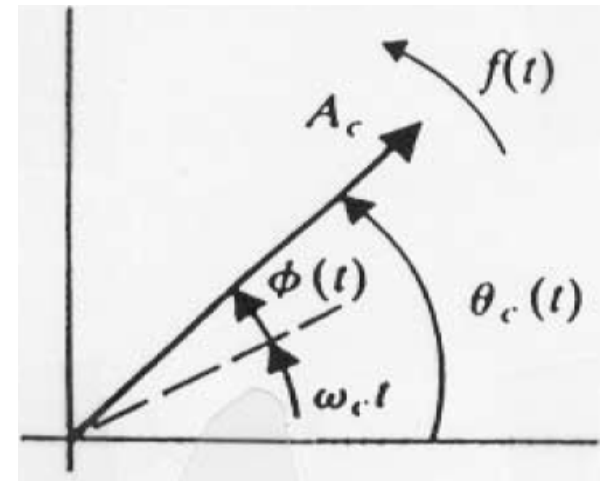
$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

- Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο αδιαμόρφωτο φέρον
- Η σταθερά k_f είναι η **ευαισθησία συχνότητας**
- Η στιγμιαία γωνία είναι

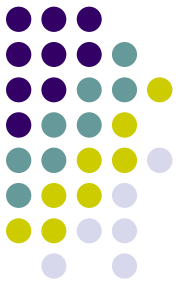
$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

- Το διαμορφωμένο σήμα FM είναι

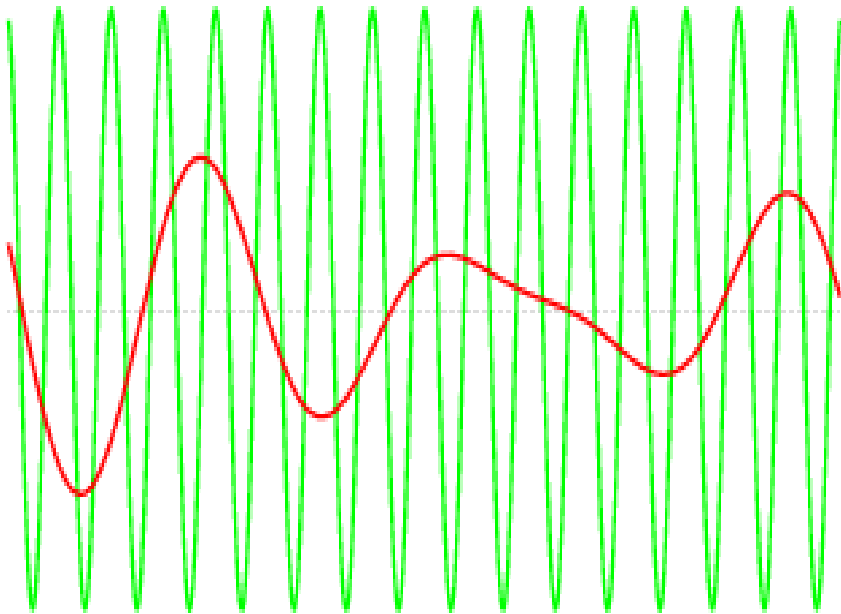
$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right]$$



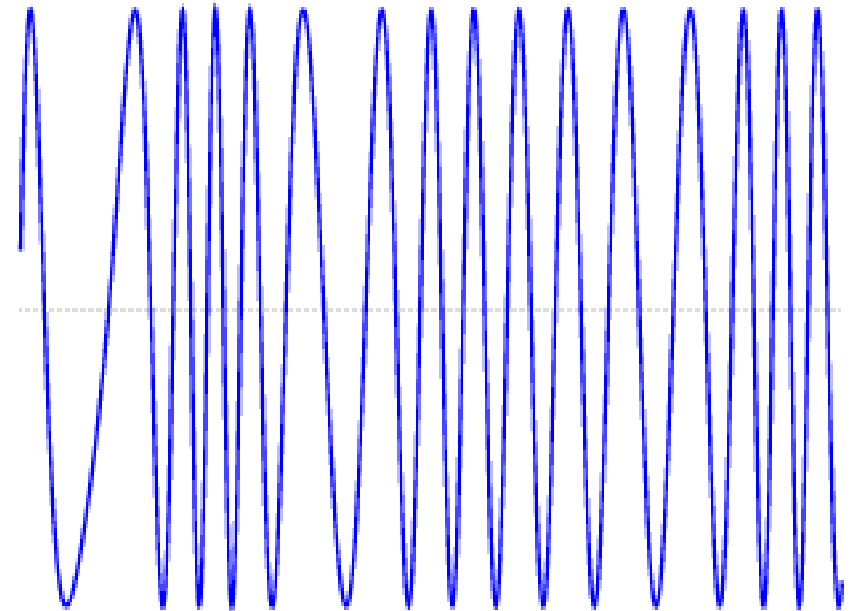
Διαμόρφωση συχνότητας (FM)



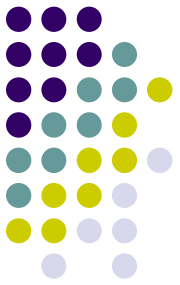
carrier —
signal —



output —

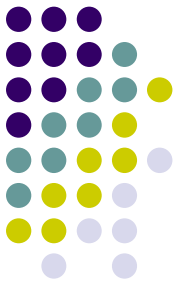


Χαρακτηριστικά διαμορφώσεων γωνίας (FM, PM)



- Τα σήματα FM και PM είναι παρόμοια
- Οι μηδενισμοί δεν ισαπέχουν
- Το πλάτος του διαμορφωμένου σήματος είναι σταθερό
 - Σταθερή ισχύς ανεξάρτητα από το σήμα προς διαμόρφωση

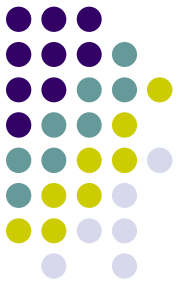
$$P = \frac{A_c^2}{2}$$



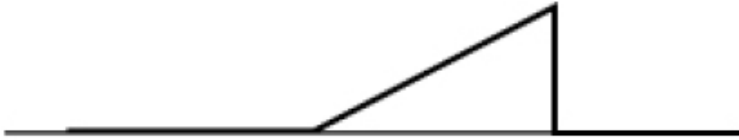
Μηδενισμοί

- Στη διαμόρφωση γωνίας (FM, PM) η πληροφορία του σήματος μεταφέρεται στους **μηδενισμούς (zero crossings)** του διαμορφωμένου σήματος
- Βλέποντας σε παλμογράφο το διαμορφωμένο σήμα, δεν είναι εύκολο να μαντέψουμε το είδος διαμόρφωσης
 - Το πλάτος είναι σταθερό
 - Στη συχνότητα εμφανίζονται πυκνώματα και αραιώματα

Μηδενισμοί



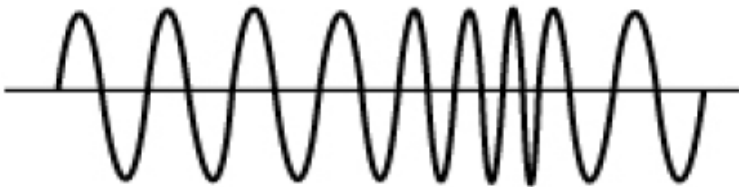
Modulating
signal



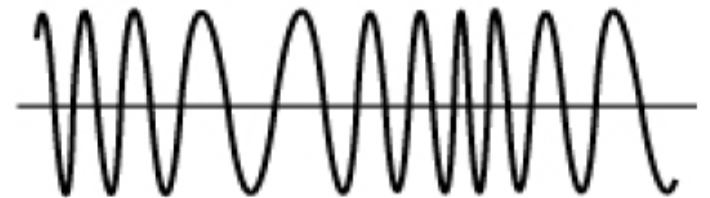
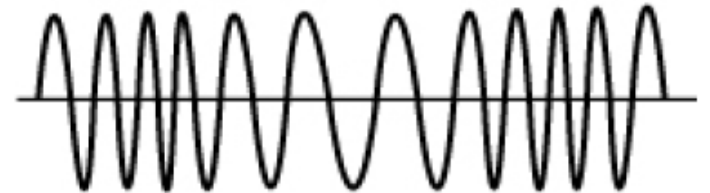
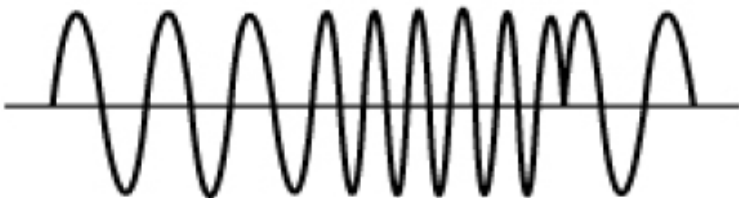
AM

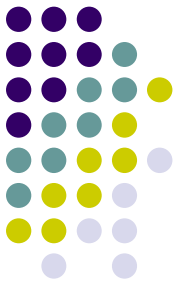


FM



PM



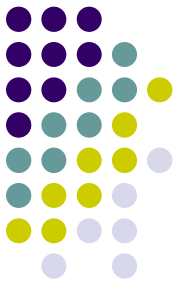


Στιγμιαία φάση/συχνότητα

$$\phi_i(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

Μπορούμε να αγνοήσουμε την αρχική τιμή της φάσης και να χρησιμοποιήσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

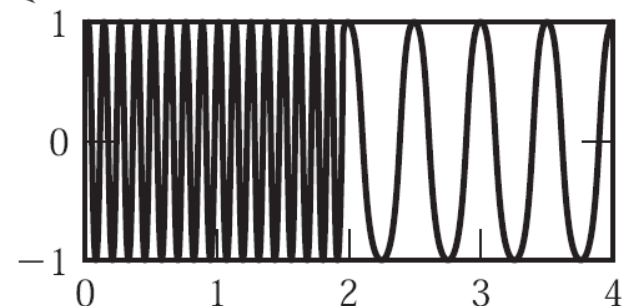
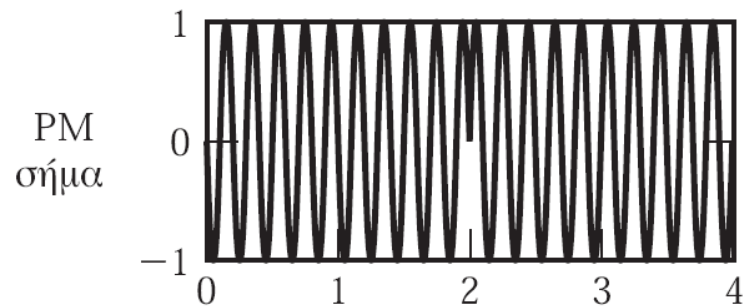
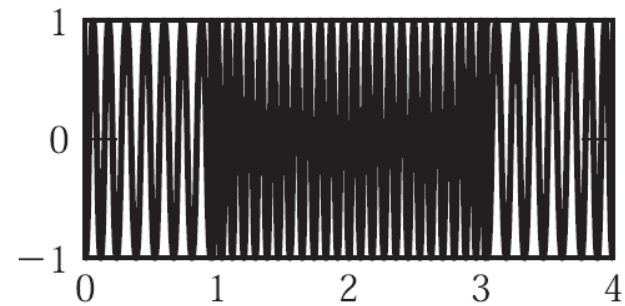
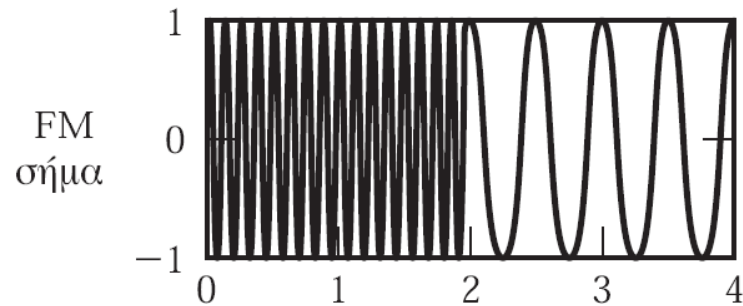
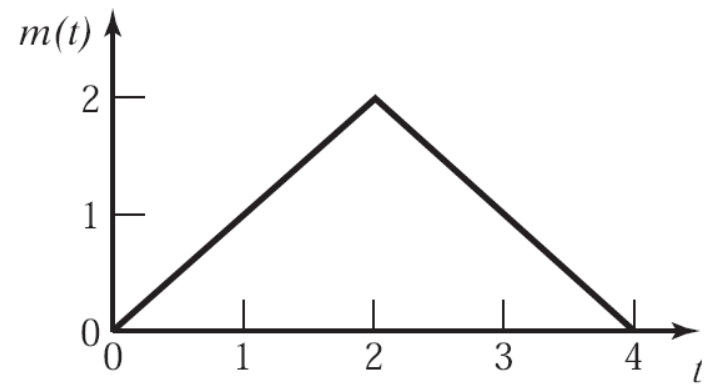
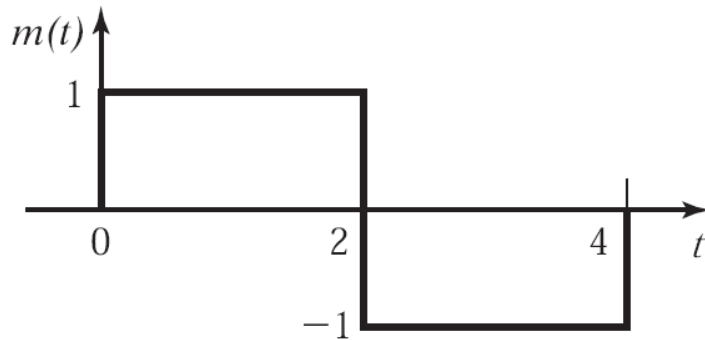
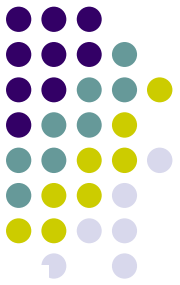
$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta_i(t) = \begin{cases} f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} & \text{PM} \\ f_c + k_f m(t) & \text{FM} \end{cases}$$



Ισοδυναμία FM και PM

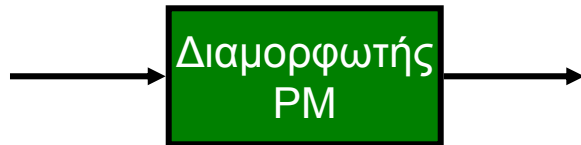
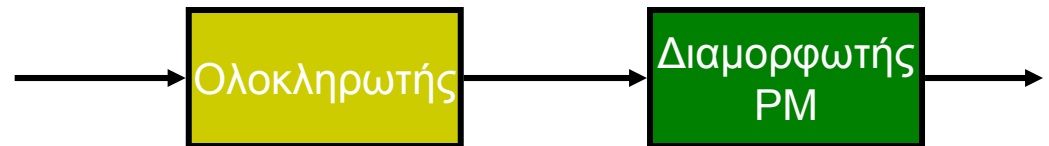
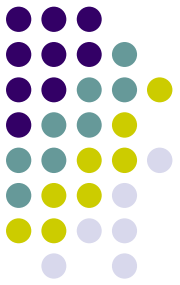
- Το διαμορφωμένο σήμα FM που προκύπτει από την **παράγωγο** του προς διαμόρφωση σήματος αντιστοιχεί σε διαμορφωμένο σήμα PM
- Το διαμορφωμένο σήμα PM που προκύπτει από το **ολοκλήρωμα** του προς διαμόρφωση σήματος αντιστοιχεί σε διαμορφωμένο σήμα FM

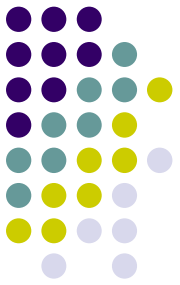
Ισοδυναμία FM και PM



Ισοδύναμα

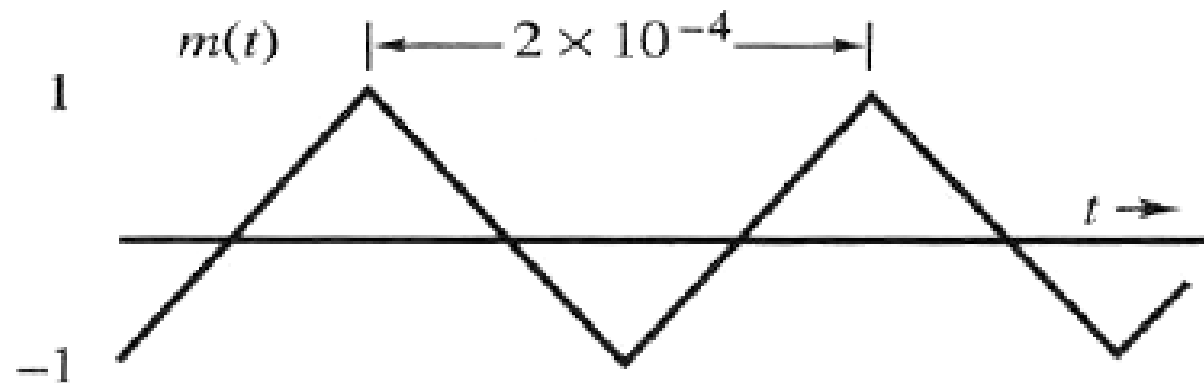
Ισοδυναμία FM και PM

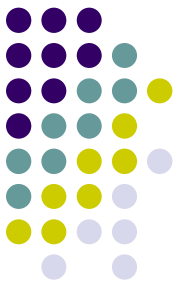




Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

- Ποια είναι τα σήματα FM και PM που παράγονται από το αναλογικό σήμα $m(t)$ όταν $k_f=10^5$, $k_p=10\pi$ και $f_c=100$ MHz;





Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

- Περίπτωση FM

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) = 10^8 + 10^5 m(t)$$

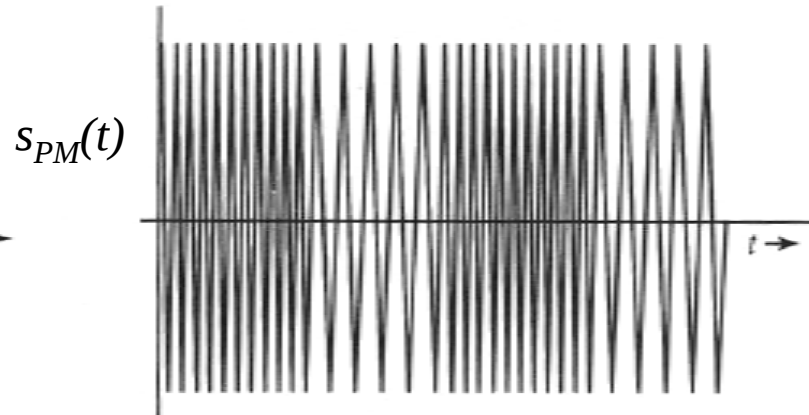
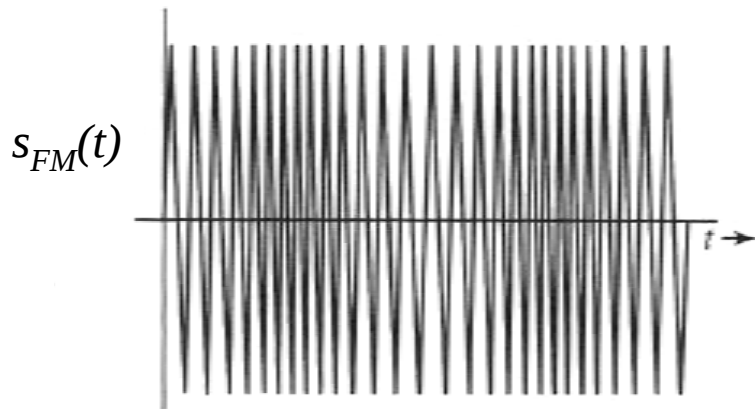
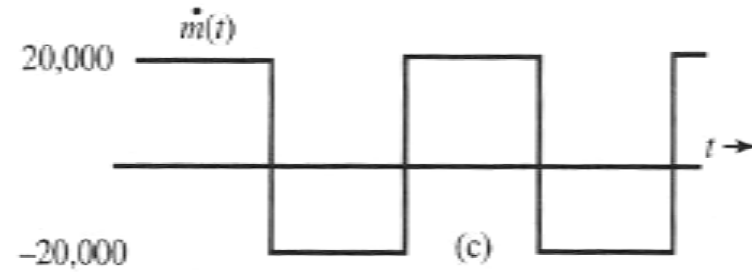
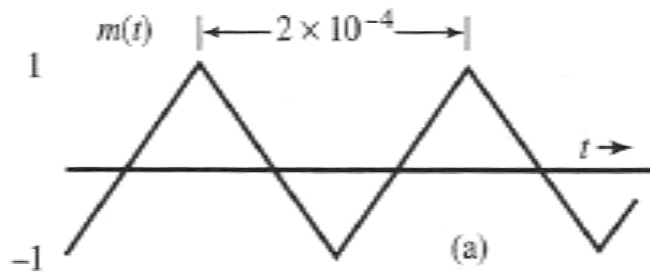
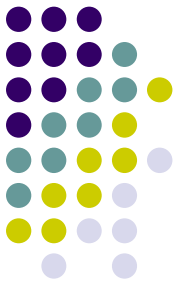
$$f_i|_{\min} = 99,9 \text{ MHz}, \quad f_i|_{\max} = 100,1 \text{ MHz}$$

- Περίπτωση PM

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} = 10^8 + 5\dot{m}(t)$$

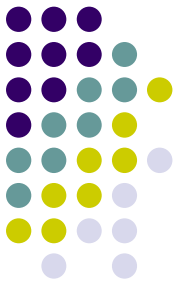
$$f_i|_{\min} = 99,9 \text{ MHz}, \quad f_i|_{\max} = 100,1 \text{ MHz}$$

Σήμα FM και PM



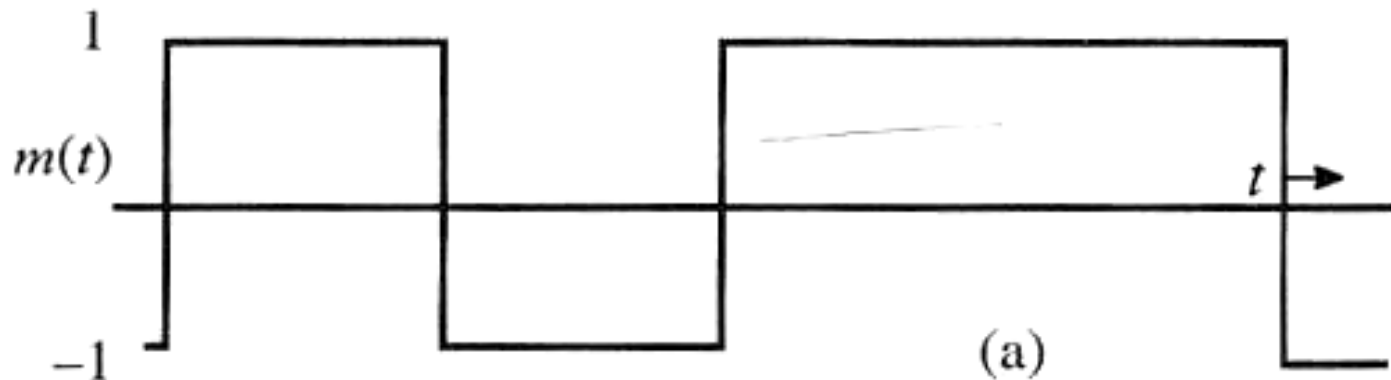
Αύξηση συχνότητας

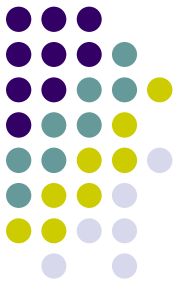
Μείωση συχνότητας



Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

- Ποια είναι τα σήματα FM και PM που παράγονται από το ψηφιακό σήμα $m(t)$ όταν $k_f=10^5$, $k_p=\pi/2$ και $f_c=100$ MHz;





Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

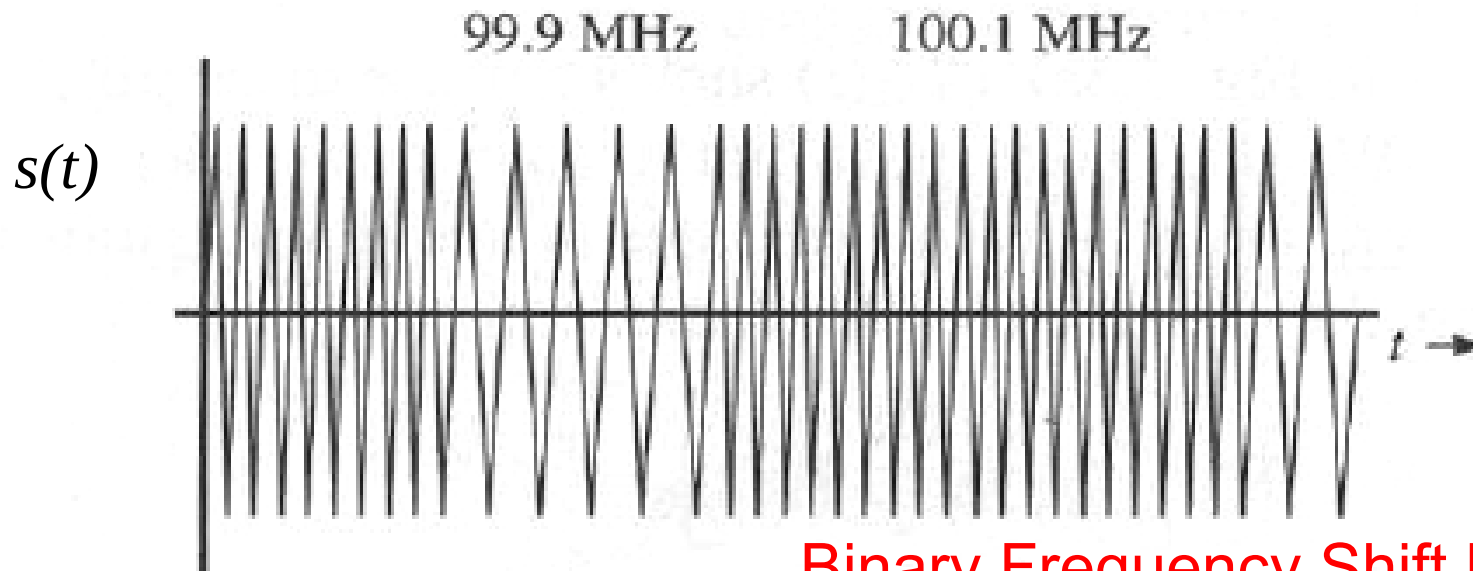
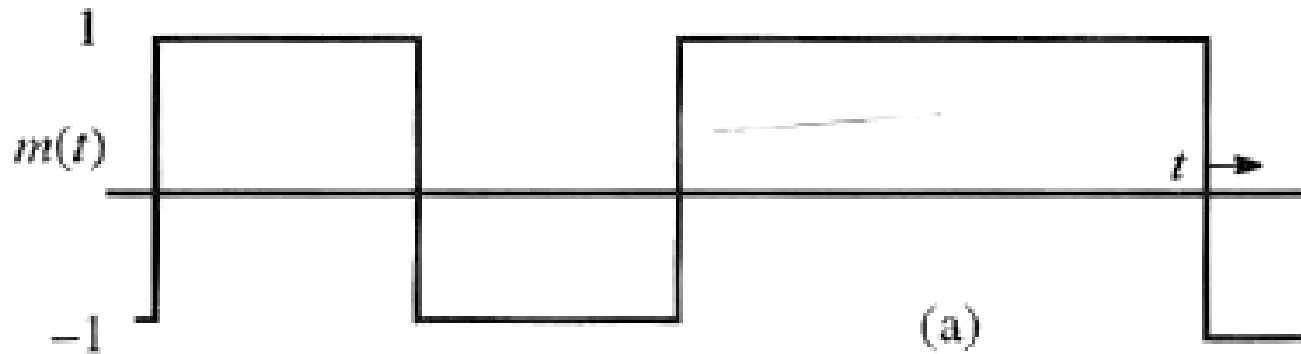
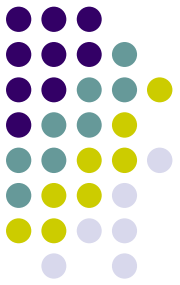
- Περίπτωση FM

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) = 10^8 + 10^5 m(t)$$

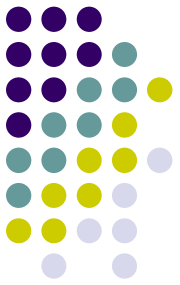
- Περίπτωση PM

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} = 10^8 + \frac{1}{4} \dot{m}(t)$$

Σήμα FM

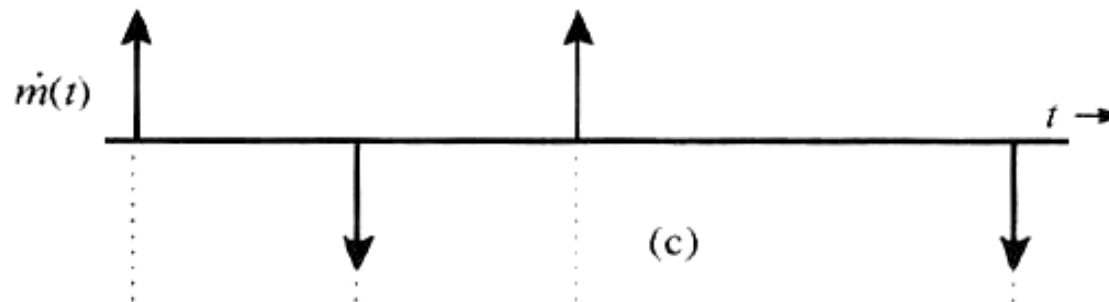
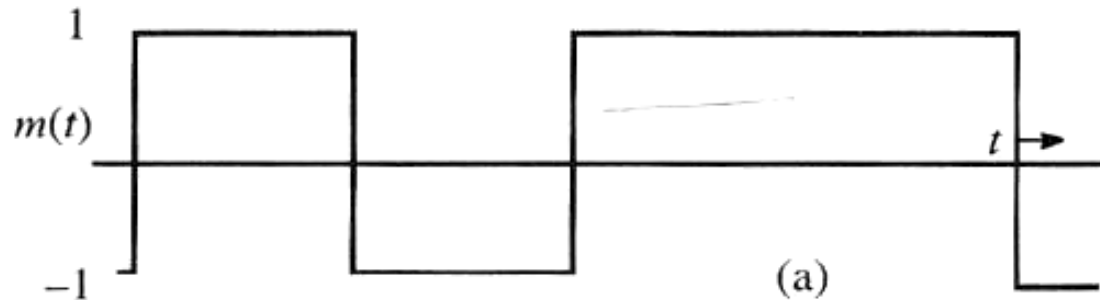


Binary Frequency Shift Keying

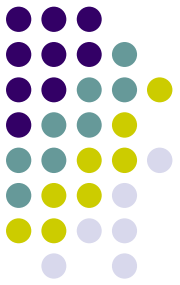


Σήμα PM

- Οι ασυνέχειες του σήματος δημιουργούν συναρτήσεις δέλτα στην παράγωγό του



- Τι συμβαίνει τότε;

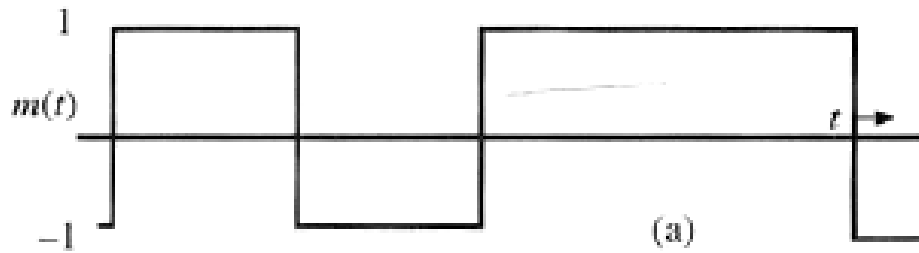
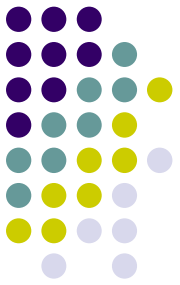


Σήμα PM

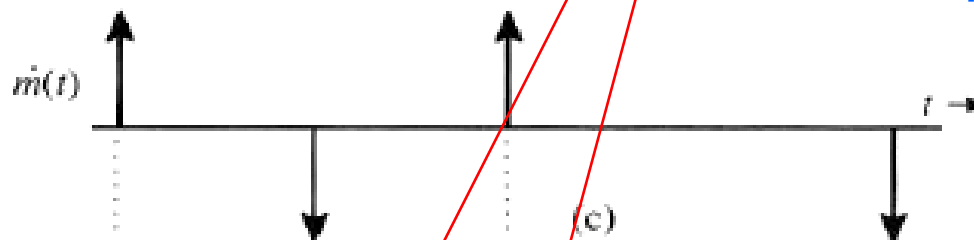
$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + \frac{\pi}{2} m(t) \right]$$
$$= \begin{cases} A_c \sin[2\pi f_c t] & \text{όταν } m(t) = -1 \\ -A_c \sin[2\pi f_c t] & \text{όταν } m(t) = 1 \end{cases}$$

- Το διαμορφωμένο σήμα αντιστρέφει το πρόσημο (+sin σε -sin) όπου το $m(t)$ παρουσιάζει ασυνέχεια
- Αυτό μπορεί να συμβεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, αλλά για ευκολία το σημειώνουμε στους μηδενισμούς του φέροντος

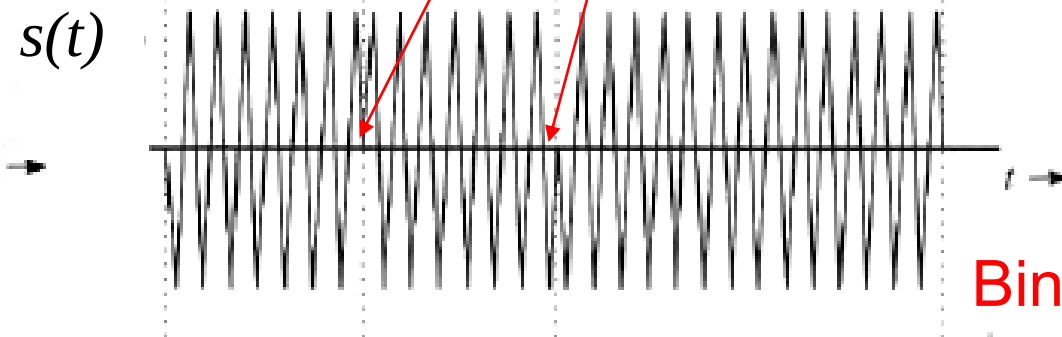
Σήμα PM



- Η συχνότητα είναι παντού η ίδια
- Η φάση αλλάζει κατά $\pm\pi/2$

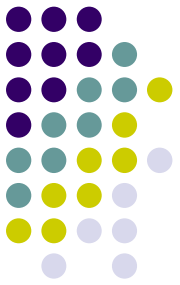


100 MHz

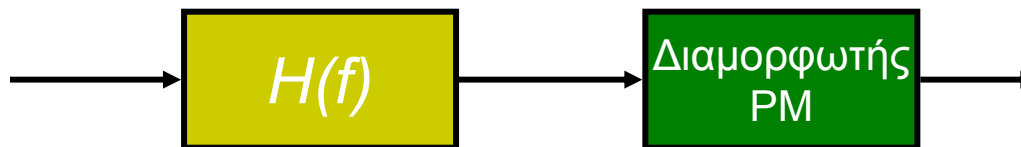


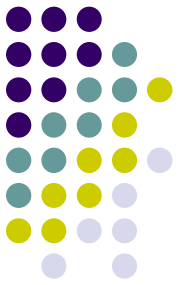
Binary Phase Shift Keying

Γενικευμένη διαμόρφωση γωνίας



- Ο διαμορφωτής φάσης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γενικό εργαλείο
 - Εάν προηγηθεί ένας ολοκληρωτής παράγει διαμόρφωση FM
 - Εάν προηγηθεί κάποιο γραμμικό σύστημα παράγεται μια μείξη FM/PM
 - Το σήμα που εκπέμπουν οι σταθμοί FM είναι μια τέτοια περίπτωση



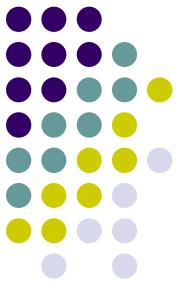


Απόκλιση φάσης

- **Απόκλιση φάσης** (phase deviation) είναι η μέγιστη διαφορά της φάσης του διαμορφωμένου σήματος σε σχέση με τη φάση του αδιαμόρφωτου

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \max \{|\phi_i(t)|\} \\ &= \max \{|\theta_i(t) - 2\pi f_c t|\} \\ &= \max \{|k_p m(t)|\} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Delta\phi = A_m k_p, A_m = \max \{|m(t)|\}$$



Απόκλιση συχνότητας

- **Απόκλιση συχνότητας** (frequency deviation) είναι η μέγιστη διαφορά της στιγμιαίας συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος σε σχέση με τη συχνότητα του αδιαμόρφωτου

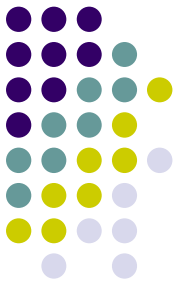
$$\Delta f = \max \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta_i(t) - f_c \right| \right\}$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi_i(t) \right| \right\}$$

$$= \max \left\{ |k_f m(t)| \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta f = A_m k_f, A_m = \max \left\{ |m(t)| \right\}$$

Κανονικοποιημένο σήμα προς διαμόρφωση



- Διαμόρφωση φάσης

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \Delta\phi x(t)]$$

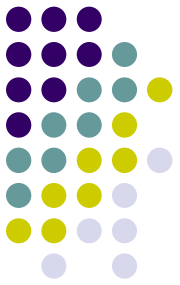
- Διαμόρφωση συχνότητας

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right]$$

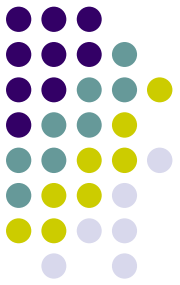
- όπου $x(t)$ το κανονικοποιημένο προς διαμόρφωση σήμα

$$x(t) = \frac{m(t)}{\max\{|m(t)|\}}$$

Κανονικοποιημένο σήμα προς διαμόρφωση



	Στιγμιαία φάση	Στιγμιαία συχνότητα
PM	$\Delta\phi x(t)$	$f_c + \frac{\Delta\phi}{2\pi} \dot{x}(t)$
FM	$2\pi\Delta f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$f_c + \Delta f x(t)$



Διαμόρφωση από απλό τόνο

- Έστω $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

- Διαμόρφωση φάσης

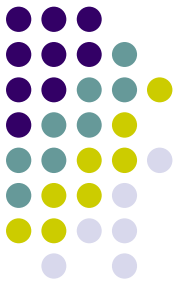
$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \Delta\phi \cos(2\pi f_m t)] = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_p \cos(2\pi f_m t)]$$

- Διαμόρφωση συχνότητας

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t)\right] = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)]$$

- όπου ο δείκτης διαμόρφωσης β είναι

$$\beta = \begin{cases} \Delta\phi = k_p A_m & \text{PM} \\ \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m} & \text{FM} \end{cases}$$

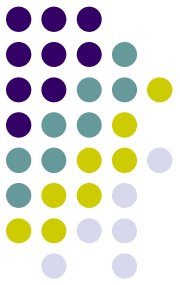


Λόγος διαμόρφωσης

- Ο προηγούμενος ορισμός του δείκτη διαμόρφωσης μπορεί να γενικευθεί για αυθαίρετο σήμα προς διαμόρφωση ως εξής

$$D = \begin{cases} \Delta\phi_{\max} = k_p \max \{|m(t)|\} & \text{PM} \\ \frac{\Delta f_{\max}}{W} = \frac{k_f \max \{|m(t)|\}}{W} & \text{FM} \end{cases}$$

- όπου W είναι το εύρος ζώνης του σήματος προς διαμόρφωση



Φάσμα σήματος FM

- Είναι το εύρος ζώνης του σήματος FM το διπλάσιο της απόκλισης συχνότητας;

$$f_c - \Delta f \leq f_i \leq f_c + \Delta f$$

- **ΌΧΙ!**
- Η στιγμιαία συχνότητα δεν είναι ισοδύναμη με το φάσμα

