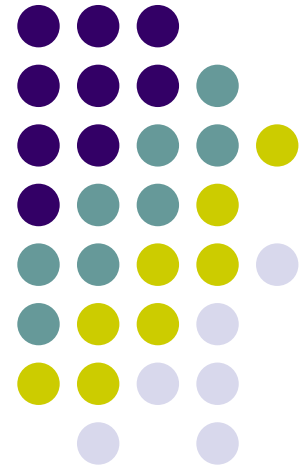
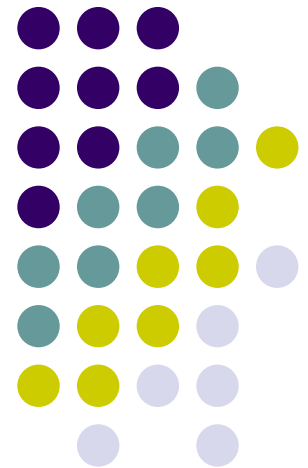
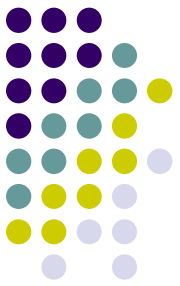


Χωρητικότητα διαύλου



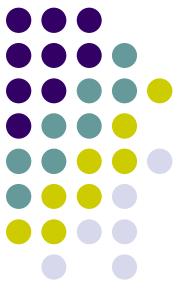
Τηλεπικοινωνιακοί δίαυλοι





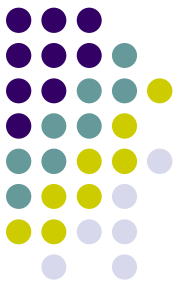
Τηλεπικοινωνιακοί δίαυλοι

- Οι τηλεπικοινωνιακοί δίαυλοι μπορεί να μεταφέρουν ή αποθηκεύουν πληροφορία
 - Ενσύρματοι (διπλαγωγοί, ομοαξωνικά καλώδια, κυματοδηγοί, ...)
 - Ασύρματοι (ελεύθερος χώρος)
 - Οπτικοί (οπτικές ίνες)
 - Ακουστικοί (υποβρύχιοι)
 - Αποθήκευσης (μαγνητικοί δίσκοι, ταινίες DAT, CD)
- Χαρακτηρίζονται από μια σχέση εισόδου-εξόδου



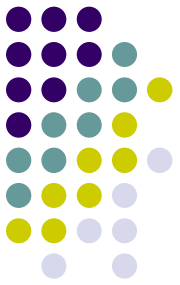
Παραμορφώσεις

- Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους η έξοδος ενός διαύλου είναι διαφορετική από την είσοδο
 - Εξασθένιση
 - Μη γραμμικότητα
 - Περιορισμένο εύρος ζώνης
 - Διαλείψεις (fading)
 - Διάδοση πολλαπλών διαδρομών
 - Θόρυβος



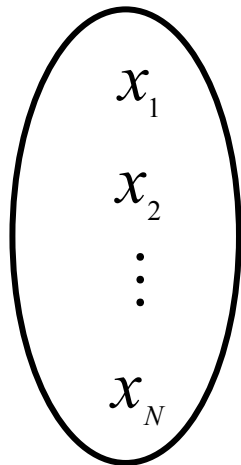
Μοντέλο διαύλου

- Συνήθως, η είσοδος και η έξοδος είναι κυματομορφές
- Λόγω διαλείψεων και θορύβου
 - Η σχέση εισόδου-εξόδου είναι στοχαστική
- Το εύρος ζώνης κάθε πραγματικού διαύλου είναι περιορισμένο
 - Η δειγματοληψία καθιστά ένα δίαυλο συνεχούς χρόνου ισοδύναμο με δίαυλο διακριτού χρόνου
- Διακριτός δίαυλος (discrete channel)
 - Οι τιμές εισόδου και εξόδου σε δίαυλο διακριτού χρόνου είναι πεπεραμένες ή αριθμήσιμες

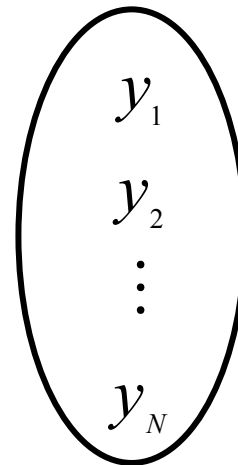


Μοντέλο διακριτού διαύλου

Αλφάβητο
εισόδου X



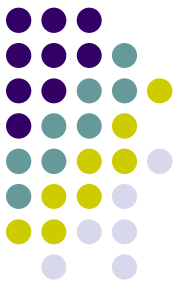
Αλφάβητο
εξόδου Y



$$p(y | x)$$



- Η έξοδος y_i εν γένει εξαρτάται από την τρέχουσα είσοδο x_i και από την ακολουθία των προηγούμενων εισόδων (διασυμβολική παρεμβολή)
- Ο δίαυλος έχει **μνήμη**

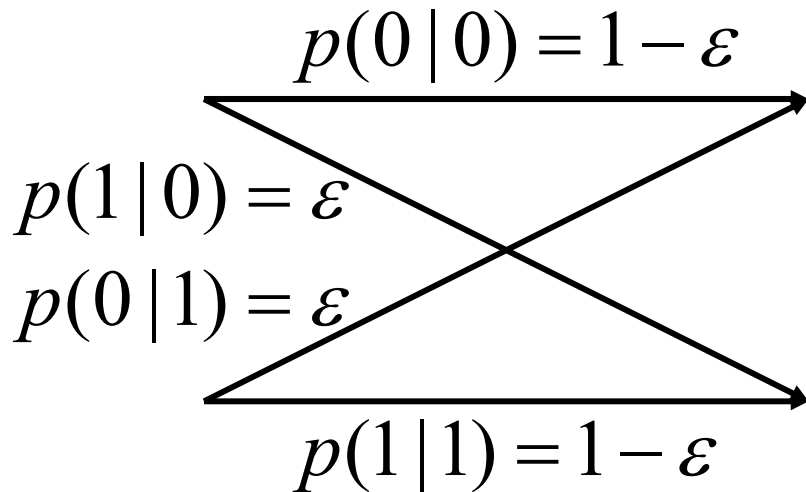


Μοντέλο διαύλου χωρίς μνήμη

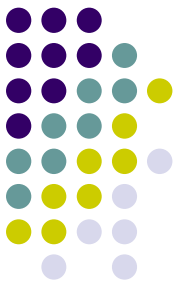
- Διακριτός δίαυλος χωρίς μνήμη (memoryless)

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n p(y_i | x_i)$$

- Δυαδικός συμμετρικός δίαυλος



ε = πιθανότητα
διασταύρωσης (λάθους)

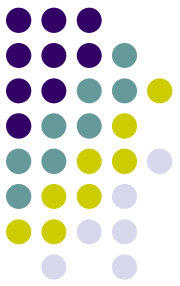


Δίαυλος AWGN

- Η πιθανότητα λάθους σε δίαυλο AWGN με πολική σηματοδοσία είναι

$$\varepsilon = p(1 | 0) = p(0 | 1) = Q\left(\sqrt{SNR_c}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- E_b η ενέργεια bit

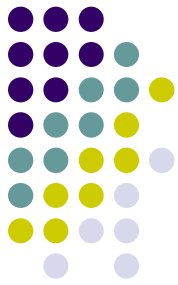
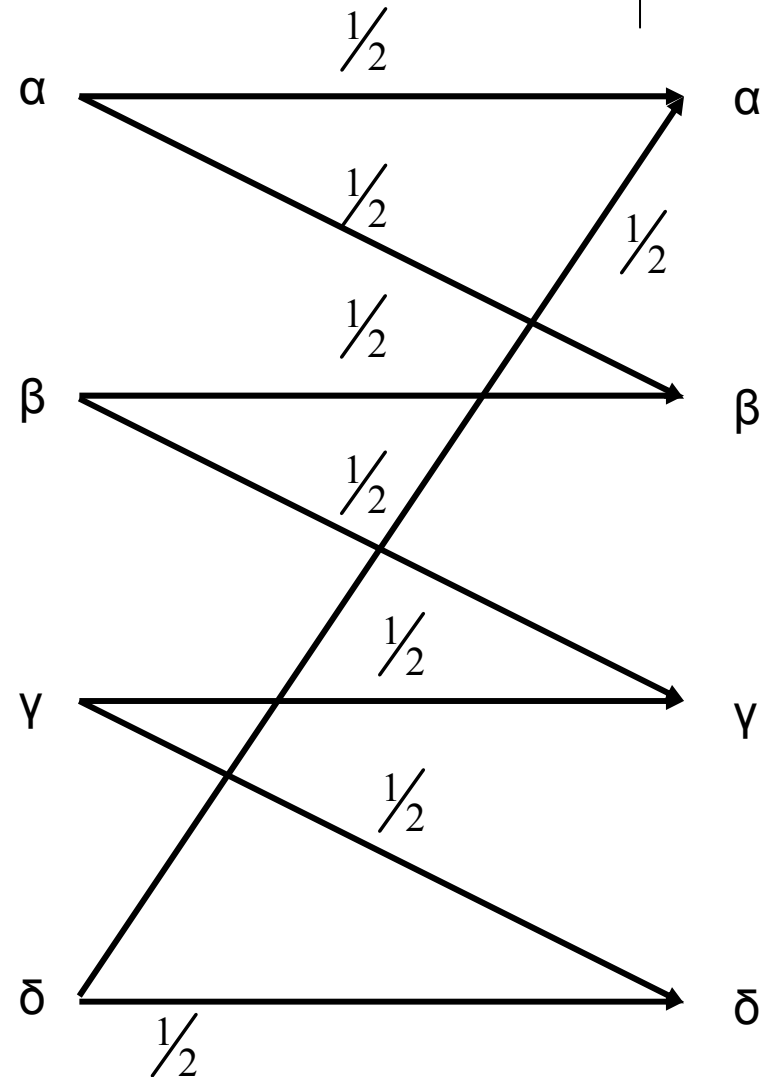


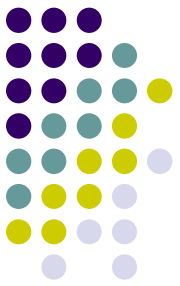
Χωρητικότητα διαύλου

- Είναι δυνατή η αξιόπιστη μετάδοση (δηλαδή, με πιθανότητα σφάλματος μικρότερη από δεδομένη τιμή) πληροφορίας σε δίαυλο με θόρυβο αρκεί ο ρυθμός μετάδοσης να είναι μικρότερος από μια τιμή αποκαλούμενη **χωρητικότητα διαύλου** (Shannon 1948)
 - Ο βασικός περιορισμός που εισάγει ο θόρυβος στον δίαυλο επικοινωνίας δεν τίθεται στην **αξιόπιστία** μετάδοσης αλλά στο **ρυθμό** μετάδοσης

Παράδειγμα

- Εάν ο δέκτης λάβει α, δεν ξέρει κατά πόσο στάλθηκε α ή δ
- Εάν συμφωνηθεί να στέλνονται μόνο τα α ή γ, τότε ο δέκτης εάν λάβει α ή β ξέρει ότι στάλθηκε το α
 - Αντίστοιχα, εάν λάβει γ ή δ, ξέρει ότι στάλθηκε το γ



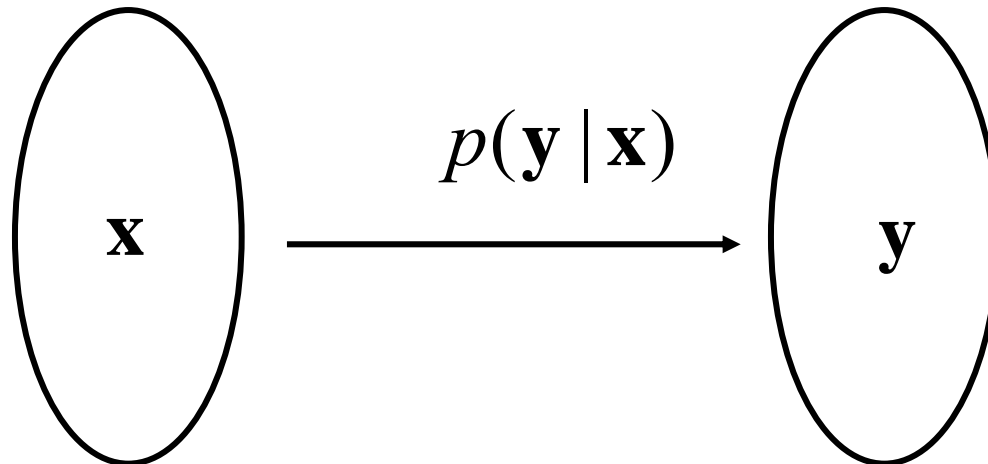


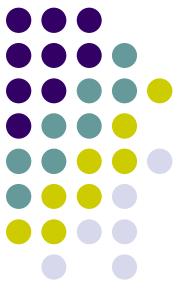
Επέκταση διαύλου

- Εάν ο δίαυλος είναι δυαδικός συμμετρικός, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια ιδέα, στον εκτεταμένο δίαυλο
- Η n -στη επέκταση δέχεται έχει ως εισόδους-εξόδους δυαδικά μπλοκ μήκους n

$$X^n = \{0,1\}^n$$

$$Y^n = \{0,1\}^n$$





Ακολουθίες που διαφέρουν

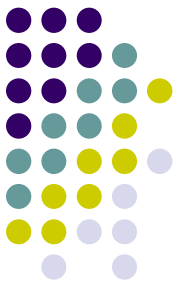
- Για μεγάλο n η έξοδος θα διαφέρει από την είσοδο με πολύ μεγάλη πιθανότητα σε $n\varepsilon$ θέσεις
- Ο αριθμός δυνατών ακολουθιών που διαφέρουν με μια ακολουθία μήκους n σε θέσεις $n\varepsilon$ είναι

$$\binom{n}{n\varepsilon} \approx 2^{nH_b(\varepsilon)}$$

$$n! \approx n^n \exp(-n) \sqrt{2\pi n}$$

$$H_b(\varepsilon) = -\varepsilon \log \varepsilon - (1 - \varepsilon) \log(1 - \varepsilon)$$

Μη επικαλυπτόμενες ακολουθίες

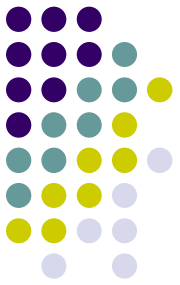


- Για κάθε μπλοκ εισόδου υπάρχουν $2^{nH_b(\varepsilon)}$ πιθανές ακολουθίες εξόδου
- Ο ολικός αριθμός πιθανών ακολουθιών εξόδου (τυπικές ακολουθίες) είναι $2^{nH(Y)}$
- Ο μέγιστος αριθμός ακολουθιών εισόδου που δεν παράγουν επικαλυπτόμενες ακολουθίες εξόδου είναι

$$M = \frac{2^{nH(Y)}}{2^{nH_b(\varepsilon)}} = 2^{n(H(Y)-H_b(\varepsilon))}$$

- και αντιστοιχούν σε ρυθμό μετάδοσης

$$R = \frac{\log M}{n} = H(Y) - H_b(\varepsilon)$$



Μέγιστος ρυθμός

- Αρκεί να μεγιστοποιήσουμε την $H(Y)$
- Για δυαδικό συμμετρικό δίαυλο

$$R = 1 - H_b(\varepsilon)$$

- Η χειρότερη επίδοση αντιστοιχεί σε $\varepsilon=1/2$, οπότε ο ρυθμός $R=0$.

Θεώρημα κωδικοποίησης διαύλου με θόρυβο



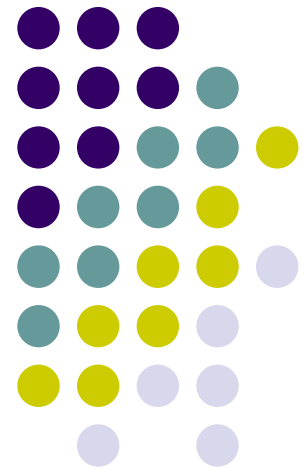
- Η χωρητικότητα ενός διακριτού διαύλου χωρίς μνήμη είναι

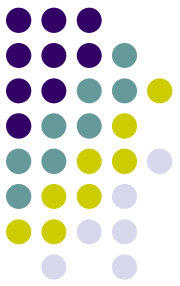
$$C = \max I(X; Y)$$

όπου $I(X; Y)$ είναι η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου

- Εάν ο ρυθμός μετάδοσης $R < C$ τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει κώδικας με μήκος n αρκετά μεγάλο ώστε η πιθανότητα σφάλματος να είναι μικρότερη από δ .
- Εάν $R > C$ η πιθανότητα σφάλματος για οποιονδήποτε κώδικα οποιουδήποτε μήκους απομακρύνεται από το μηδέν

Χωρητικότητα Γκαουσιανού διαύλου διακριτού χρόνου





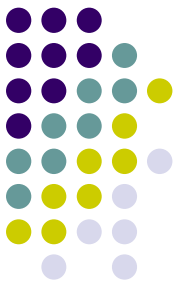
Περιορισμός ισχύος

- Ένας γκαουσιανός δίαυλος με περιορισμένη ισχύ εισόδου μπορεί να περιγραφεί από την σχέση

$$Y = X + Z$$

- Z είναι κανονική τυχαία μεταβλητή μηδενικής μέσης τιμής και μεταβλητότητας P_N
- Ο περιορισμός ισχύος σημαίνει ότι για οποιαδήποτε ακολουθία μήκους n

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq P$$



Επίδραση του θορύβου

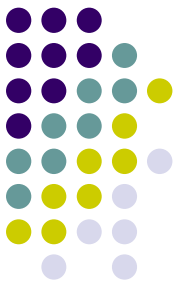
- Για μεγάλο n , από τον νόμο μεγάλων αριθμών,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \leq P_N$$

που σημαίνει ότι με πιθανότητα ένα το \mathbf{y} θα βρίσκεται μέσα σε n -διάστατη υπερ-σφαίρα ακτίνας $\sqrt{nP_N}$ με κέντρο το \mathbf{x}

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 \leq nP_N$$

Περιορισμός ισχύος στην έξοδο



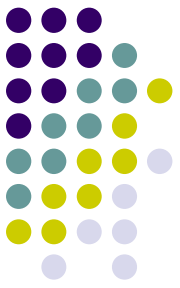
- Λόγω της ανεξαρτησίας μεταξύ της εισόδου και του θορύβου και του περιορισμού ισχύος

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq P + P_N$$

που σημαίνει ότι με πιθανότητα 1 οι ακολουθίες εξόδου \mathbf{y} θα βρίσκονται μέσα σε n -διάστατη υπερ-σφαίρα ακτίνας $\sqrt{n(P + P_N)}$ με κέντρο την αρχή των αξόνων

$$\|\mathbf{y}\|^2 \leq n(P + P_N)$$

Χωρητικότητα Γκαουσιανού διαύλου διακριτού χρόνου



- Επειδή το πλήθος των σφαιρών ακτίνας $\sqrt{nP_N}$ που μπορούμε να στοιβάξουμε σε σφαίρα ακτίνας $\sqrt{n(P + P_N)}$ είναι προσεγγιστικά ο λόγος των όγκων τους
- Το πλήθος των μηνυμάτων που μπορούν να μεταδοθούν αξιόπιστα είναι

$$M = \frac{K_n \left(\sqrt{n(P + P_N)} \right)^n}{K_n \left(\sqrt{nP_N} \right)^n} = \left(\frac{P + P_N}{P_N} \right)^{\frac{n}{2}}$$
$$= \left(1 + \frac{P}{P_N} \right)^{\frac{n}{2}}$$

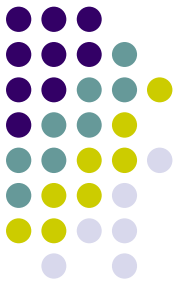
Χωρητικότητα Γκαουσιανού διαύλου διακριτού χρόνου



- Άρα η χωρητικότητα, bit/σύμβολο, είναι

$$C = \frac{1}{n} \log M = \frac{1}{n} \frac{n}{2} \log \left(1 + \frac{P}{P_N} \right) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{P_N} \right)$$

Χωρητικότητα Γκαουσιανού διαύλου συνεχούς χρόνου



- Δειγματοληπτούμε στο ρυθμό Nyquist οπότε

$$C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right) \text{ bit/δείγμα}$$

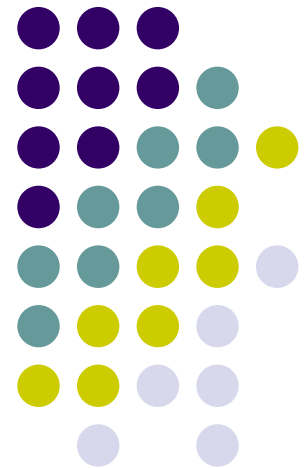
και για ρυθμό μετάδοσης $2W$

$$C = W \log \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right) \text{ bit/sec}$$

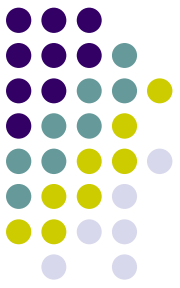
όπου

$$P_N = \int_{-W}^W \frac{N_0}{2} df = WN_0$$

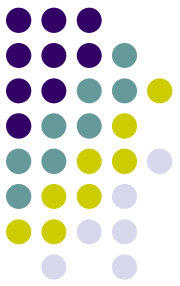
Όρια στις επικοινωνίες



Ανταλλαγή ισχύος μετάδοσης και εύρους ζώνης



- Υπάρχει δυνατότητα ανταλλαγής μεταξύ ισχύος μετάδοσης και εύρους ζώνης
- Η μείωση της μιας παραμέτρου (P) μπορεί να αντισταθμιστεί από αύξηση της άλλης (W)
 - Η αύξηση της χωρητικότητας συναρτήσει της ισχύος είναι “αργή” (λογαριθμική συνάρτηση)
 - Για να αυξηθεί η ανοσία στον θόρυβο οι στάθμες κβάντισης πρέπει να απέχουν \Rightarrow μεγάλη ισχύς
 - Η χωρητικότητα μπορεί να αυξηθεί σε οποιαδήποτε τιμή με την αύξηση της ισχύος

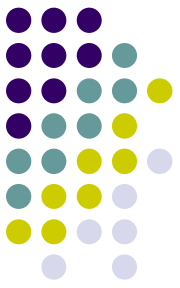


Μέγιστη χωρητικότητα

- Η επίδραση του εύρους ζώνης είναι διαφορετική: αυξάνοντας το W
 - Μεταδίδουμε περισσότερα δείγματα
 - Μεγαλώνουμε τον θόρυβο στην είσοδο του δέκτη
- Όταν το εύρος ζώνης W τείνει στο άπειρο

$$\lim_{W \rightarrow \infty} C = \frac{P}{N_0} \log e = 1.44 \frac{P}{N_0}$$

- Οριακή χωρητικότητα



Όρια λειτουργίας

- Επειδή $R < C$ σε οποιοδήποτε πραγματικό σύστημα

$$R < W \log \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right)$$

ή ισοδύναμα

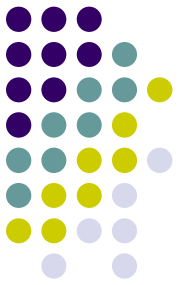
$$r < \log \left(1 + r \frac{E_b}{N_0} \right)$$

όπου

$$r = \frac{R}{W} = \text{φασματικός ρυθμός bit}$$

$$E_b = \frac{P}{R} = \text{ενέργεια bit}$$

Όρια λειτουργίας



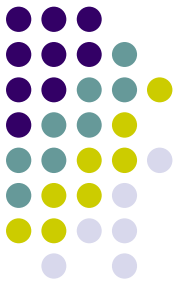
οπότε

$$\frac{E_b}{N_0} > \frac{2^r - 1}{r}$$

που οδηγεί στο
απόλυτο ελάχιστο για
αξιόπιστη επικοινωνία

$$\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{\min} = \ln 2 = 0.693 \sim -1.6 \text{ dB}$$

Σχέση με την κωδικοποίηση πηγής



- Αφού ο ρυθμός μετάδοσης πρέπει να είναι μικρότερος της χωρητικότητας διαύλου, για ικανοποιητική μετάδοση με παραμόρφωση D πρέπει $R(D) < C$
- Η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης για γκαουσιανή πηγή με φασματική πυκνότητα ισχύος A είναι

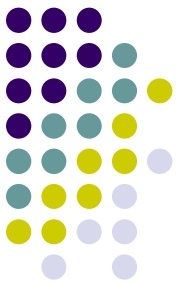
$$S_x(f) = \begin{cases} A, & |f| < W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad R(D) = \begin{cases} W \log\left(\frac{2AW}{D}\right), & D < 2AW \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Μετάδοση με παραμόρφωση D



- Εξισώνοντας τον ρυθμό μετάδοσης για παραμόρφωση D (σε σήμα εύρους ζώνης W) με την χωρητικότητα διαύλου (για εύρος ζώνης μετάδοσης B) λαμβάνουμε

$$B \log \left(1 + \frac{P}{N_0 B} \right) = W \log \left(\frac{2AW}{D} \right)$$

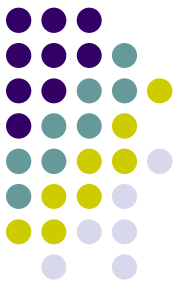


Λόγος σήματος προς θόρυβο

- Ο λόγος B/W καλείται παράγων διεύρυνσης του εύρους ζώνης

$$\text{SQNR} = \frac{2AW}{D} = \left(1 + \frac{P}{N_0 B} \right)^{\frac{B}{W}}$$

- Στο βέλτιστο σύστημα, λόγος σήματος προς θόρυβο στην έξοδο αυξάνει εκθετικά ως προς τη διεύρυνση του εύρους ζώνης



Μετάδοση με PCM

- Στο σύστημα PCM

$$R = 2\nu W, \quad B = \frac{R}{2} = \nu W$$

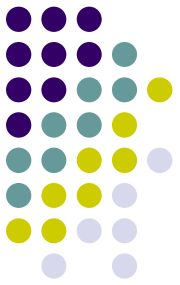
- Η παραμόρφωση είναι το άθροισμα των παραμορφώσεων λόγω κβαντισμού και σφαλμάτων

$$D_{total} = \sigma_q^2 + P_b \sigma_d^2$$

όπου
$$\sigma_q^2 = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 2^{2\nu}} = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 4^\nu} = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 4^{B/W}}, \quad \sigma_d^2 \approx \frac{4}{3} x_{\max}^2 P_e$$

$$q = \frac{2x_{\max}}{2^\nu} = \frac{x_{\max}}{2^{\nu-1}}$$

Σηματοθορυβική σχέση στο PCM

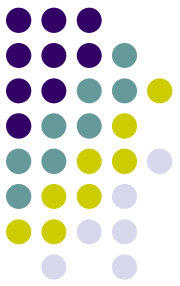


- Η σηματοθορυβική σχέση είναι

$$SNR = \frac{3\overline{x^2}}{x_{\max}^2 (4P_e + 4^{-\frac{B}{W}})} = \frac{3}{(4P_e + 4^{-\frac{B}{W}})} S_x$$

- ΟΤΠΟΥ

$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{SNR_c}\right) & \text{πολική} \\ Q\left(\sqrt{SNR_c/2}\right) & \text{μονοπολική} \end{cases}$$



Επίδοση PCM

- Το SNR για μικρές πιθανότητες σφάλματος αυξάνει εκθετικά ως προς τον παράγοντα διεύρυνσης του εύρους ζώνης
- Η PCM χρησιμοποιεί αποδοτικά το διαθέσιμο εύρος ζώνης!
- Η FM εμφανίζει μια παρόμοια ιδιότητα ανταλλαγής εύρους ζώνης προς ισχύ εκπομπής, αλλά η αντίστοιχη εξάρτηση είναι τετραγωνική ως προς παράγοντα διεύρυνσης του εύρους ζώνης
 - Η FM δεν είναι τόσο αποδοτικό όσο η PCM