Κωδικοποίηση

Κωδικοποίηση πηγής

Θεώρημα κωδικοποίησης πηγής

- Καθορίζει ένα θεμελιώδες όριο στον ρυθμό με τον οποίο η έξοδος μιας πηγής πληροφορίας μπορεί να συμπιεσθεί χωρίς να προκληθεί μεγάλη πιθανότητα σφάλματος
- Shannon 1948

Τυπικές και μη τυπικές ακολουθίες

- Έξοδος πηγής DMS μεγάλου μήκους $n \to \infty$
  - Το σύμβολο x_1 επαναλαμβάνεται περίπου np_1 φορές
  - Το σύμβολο x_2 επαναλαμβάνεται περίπου np_2 φορές
  - …
  - Το σύμβολο x_N επαναλαμβάνεται περίπου np_N φορές

Τυπικές και μη τυπικές ακολουθίες

- Με πιθανότητα σχεδόν 1 όλες οι ακολουθίες έχουν την ίδια σύνθεση
- Σχεδόν όλες οι ακολουθίες είναι περίπου ισοπίθανες! (τυπικές ακολουθίες)

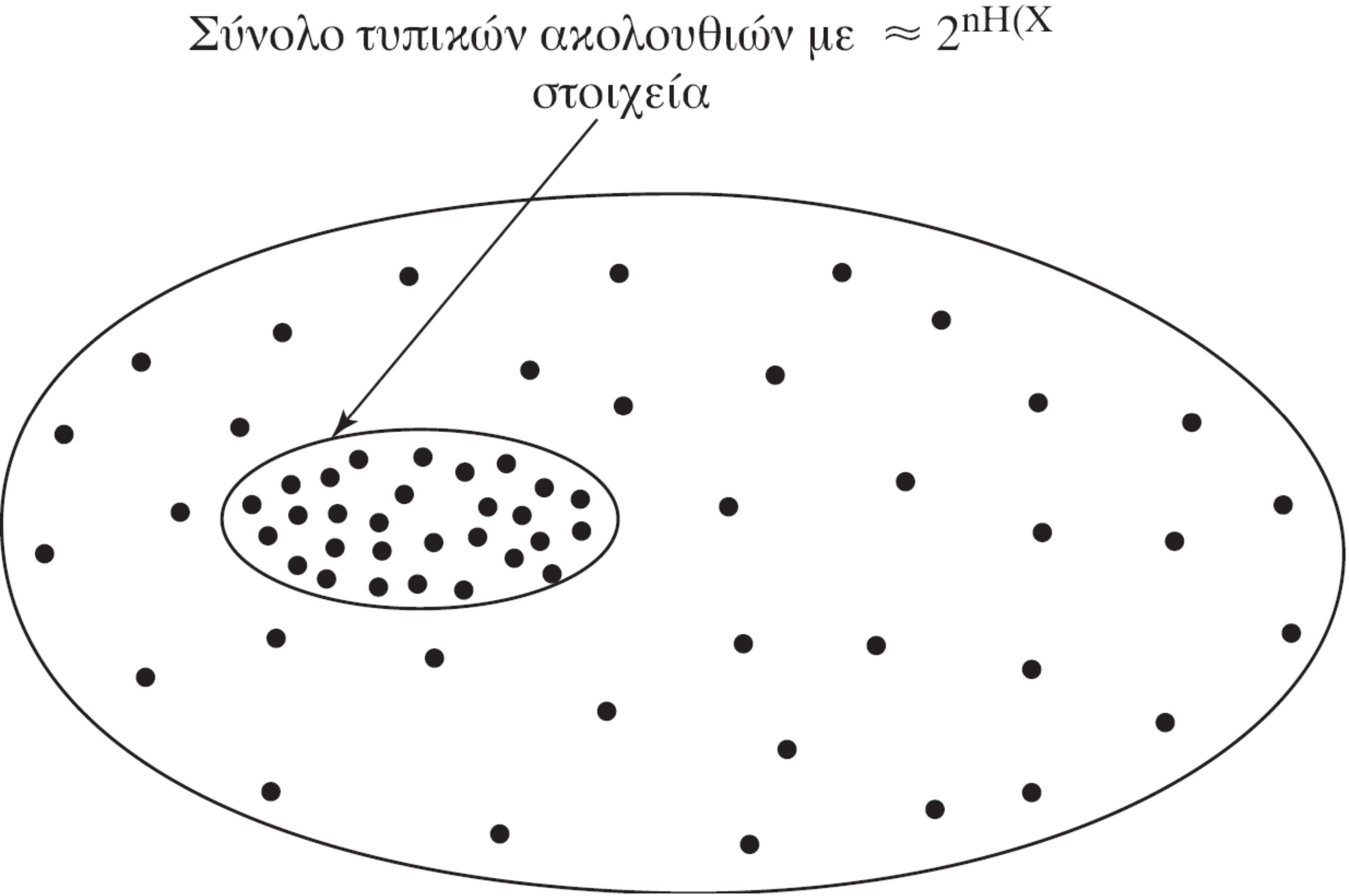
$$p(\mathbf{X}=\mathbf{x}) \approx \prod_{i=1}^{N} p_i^{np_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} 2^{np_i \log p_i} = 2^{n\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i} = 2^{-nH(X)}$$

Τυπικές και μη τυπικές ακολουθίες

- Η πιθανότητα εμφάνισης των μη τυπικών ακολουθιών είναι αμελητέα
- Ο συνολικός αριθμός τυπικών ακολουθιών είναι περίπου $2^{nH(X)}$ παρόλο που η πηγή μπορεί να παράγει N^n ακολουθίες
- Για πρακτικούς λόγους αρκεί να λάβουμε υπόψη το σύνολο τυπικών ακολουθιών αντί του συνόλου όλων των δυνατών ακολουθιών εξόδων της πηγής

Τυπικές και μη τυπικές ακολουθίες



Συμπίεση δεδομένων

- Επιλέγοντας αρκετά μεγάλο n, το σφάλμα που προκύπτει εάν αγνοήσουμε τις μη τυπικές ακολουθίες μπορεί να γίνει μικρότερο από κάθε $\varepsilon>0$
- Συμπίεση δεδομένων
  - Αναπαράσταση της εξόδου μια πηγής με ένα μικρότερο αριθμό ακολουθιών από ότι παράγει η πηγή στην πραγματικότητα

Συμπίεση δεδομένων

- Χρειαζόμαστε $nH(X)$ bit για την αναπαράσταση του συνόλου των τυπικών ακολουθιών
  - Πλήθος τυπικών ακολουθιών $2^{nH(X)}$
  - Πλήθος δυνατών ακολουθιών N^n
- Απαιτούνται $H(X)$ bit ανά σύμβολο!
- Η συμπίεση είναι δυνατή εάν τα σύμβολα δεν είναι ισοπίθανα
  - Για ισοπίθανα σύμβολα $H(X)=\log(N)$ και

$$2^{nH(X)} = 2^{n\log(N)} = N^n$$

Πηγές με μνήμη

- Εάν η πηγή έχει μνήμη, τότε οι έξοδοι δεν είναι ανεξάρτητες και για αυτό φανερώνουν πληροφορία για τις επόμενες εξόδους
- Για παράδειγμα στην αγγλική γλώσσα
  - το “q” σχεδόν πάντα ακολουθείται από “u”
  - Ένα γράμμα μεταξύ δύο κενών είναι το “I” ή το “a”

Πηγές με μνήμη

- Για πηγές με μνήμη μας ενδιαφέρει ο ρυθμός εντροπίας $H(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$
- Στην αγγλική γλώσσα (26 γράμματα και το κενό διάστημα)
  - για $n=1$ η εντροπία είναι 4,03 bit/γράμμα
  - και ο ρυθμός εντροπίας ($n \rightarrow \infty$) είναι 1,3 bit/γράμμα

Θεώρημα κωδικοποίησης πηγής

- Μια πηγή (ρυθμού) εντροπίας H μπορεί να κωδικοποιηθεί με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος σε οποιοδήποτε ρυθμό R, εφόσον $R>H$. Αντίστροφα, εάν $R<H$ η πιθανότητα σφάλματος θα παραμένει μακριά από το μηδέν, ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητα του κωδικοποιητή

Αλγόριθμοι κωδικοποίησης πηγής

- Το θεώρημα κωδικοποίησης πηγής δίνει μόνο αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη κωδίκων πηγής
  - Δεν περιγράφει κανένα αλγόριθμο για τη σχεδίαση
  - Δίνει ένα φράγμα στο ρυθμό με τον οποίο μπορεί να κωδικοποιηθεί μια πηγής
- Δύο γνωστοί αλγόριθμοι σχεδίασης κωδίκων που δίνουν αποτελέσματα κοντά στο φράγμα εντροπίας
  - Huffman (1952)
  - Lempel-Ziv (1977,1978)→ZIP,ZOO,ARJ

Συνάρτηση ρυθμού - παραμόρφωσης

Κωδικοποίηση με απώλειες

- Έστω ότι μετάδοση με ρυθμούς κοντά σε αυτόν της εντροπίας δεν είναι δυνατή
- Μπορούμε να συμπιέσουμε την έξοδο μιας πηγής αποδεχόμενοι απώλειες και κάποια παραμόρφωση
- Παράδειγμα: η κωδικοποίηση της εξόδου αναλογικής πηγής
  - Τα δείγματα είναι πραγματικοί αριθμοί
  - Άπειρος αριθμός bit
  - Κβάντιση και κωδικοποίηση των κβαντισμένων τιμών

Το βασικό πρόβλημα

- Υποθέστε ότι ζητείται να μεταδοθεί πληροφορία μετά από συμπίεση της εξόδου της πηγής σε ορισμένο ρυθμό bit/σύμβολο
  - Πόσο κοντά είναι η συμπιεσμένη εκδοχή στην αρχική;
  - Για δεδομένο ρυθμό, ποιος είναι ο ελάχιστος ρυθμός σφαλμάτων και πώς μπορεί να επιτευχθεί;
  - Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός bit ανά έξοδο για καθορισμένο επίπεδο παραμόρφωσης;

Παραμόρφωση

- Υπάρχουν διάφορα μέτρα της παραμόρφωσης, δηλαδή, του πόσο απέχει το σήμα από την αναπαραγωγή του
- Hamming

$$d_H(x,\hat{x}) = \begin{cases} 1, & x \neq \hat{x} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Τετραγωνικού σφάλματος

$$d_H(x,\hat{x}) = (x-\hat{x})^2$$

Παραμόρφωση

- Για ακολουθία συμβόλων, ως παραμόρφωση ορίζουμε τη μέση παραμόρφωση ανά σύμβολο
  - Η θέση του σφάλματος δεν είναι σημαντική
  - Η παραμόρφωση δεν εξαρτάται από τα συμφραζόμενα

$$d(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(X_i,\hat{X}_i)$$

- Η παραμόρφωση της πηγής είναι η αναμενόμενη τιμή της ως άνω τυχαίας μεταβλητής

$$D = E\{d(\mathbf{X},\hat{\mathbf{X}})\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\{d(X_i,\hat{X}_i)\} = E\{d(X,\hat{X})\}$$

Παραμόρφωση Hamming

- Στην περίπτωση που ως μέτρο χρησιμοποιείται η παραμόρφωση Hamming, η παραμόρφωση D της πηγής είναι η πιθανότητα σφάλματος

$$D = E\{d_H(X,\hat{X})\} = 1 \times p\{X \neq \hat{X}\} + 0 \times p\{X \neq \hat{X}\}$$

$$= p\{X \neq \hat{X}\}$$

$$= p\{\text{λάθος}\}$$

Συνάρτηση ρυθμού - παραμόρφωσης

- Δοθείσης μιας πηγής πληροφορίας χωρίς μνήμη, του αλφάβητου που παράγει, του αλφάβητου αναπαραγωγής της και του μέτρου παραμόρφωσης, ποιος είναι ο ρυθμός R bit/σύμβολο για παραμόρφωση D;
  - Ο ρυθμός R είναι ο ελάχιστος αριθμός bit ανά έξοδο της πηγής που εξασφαλίζει την απαιτούμενη μέση παραμόρφωση
- Η σχέση μεταξύ R και D είναι η συνάρτηση ρυθμού – παραμόρφωσης $R(D)$

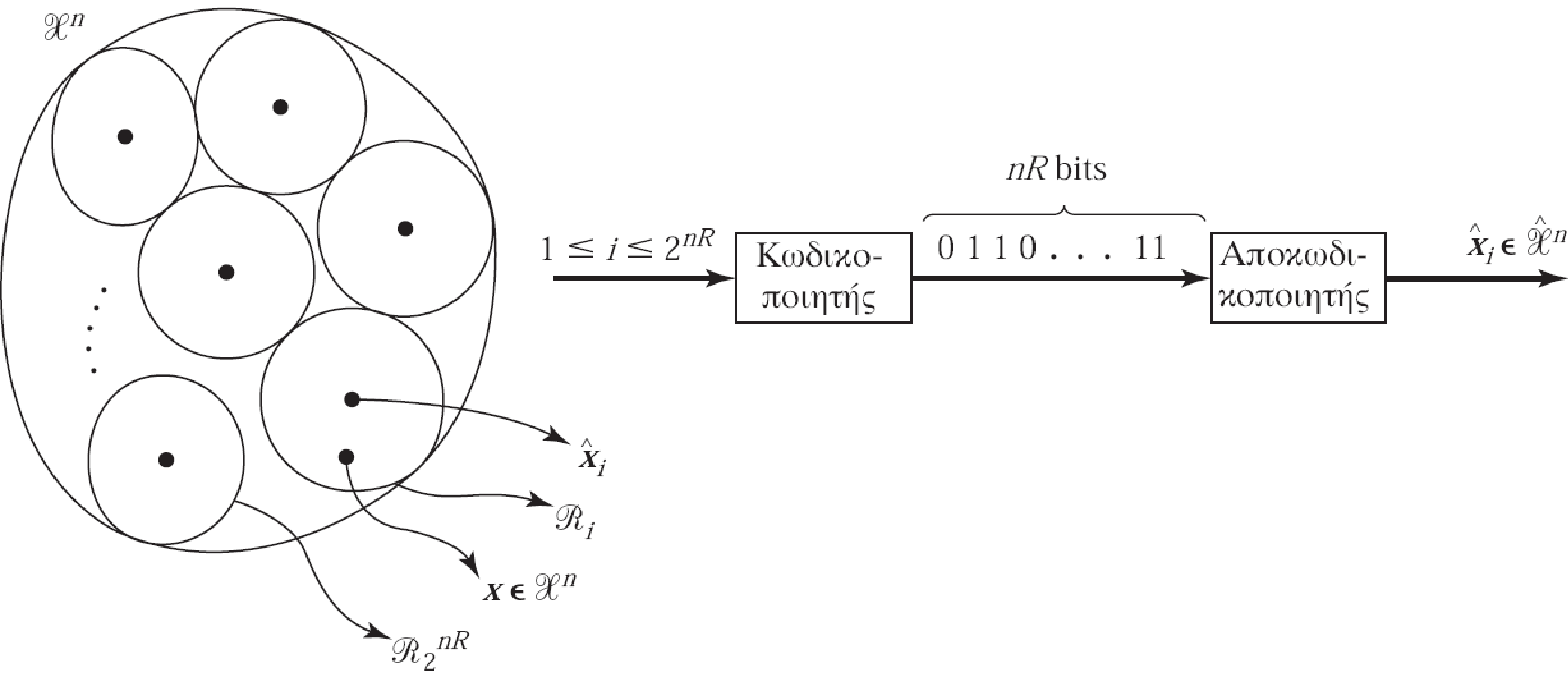
Θεώρημα ρυθμού - παραμόρφωσης

- Ο ελάχιστος αριθμός bit ανά έξοδο πηγής που απαιτείται για αναπαραγωγή μιας πηγής χωρίς μνήμη με παραμόρφωση μικρότερη από D είναι

$$R(D) = \min_{p(\hat{x}|x):E\{d(X,\hat{X})\}\leq D} I(X;\hat{X})$$

- $R(D)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση της D
  - Υψηλή πιστότητα (μικρή D) απαιτεί μεγάλο R

Θεώρημα ρυθμού - παραμόρφωσης



Για δεδομένο ρυθμό → ελάχιστη επιτεύξιμη παραμόρφωση

Για δεδομένη παραμόρφωση → ελάχιστος ρυθμός

Δυαδική πηγή χωρίς μνήμη

- Η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης της δυαδικής πηγής χωρίς μνήμη είναι

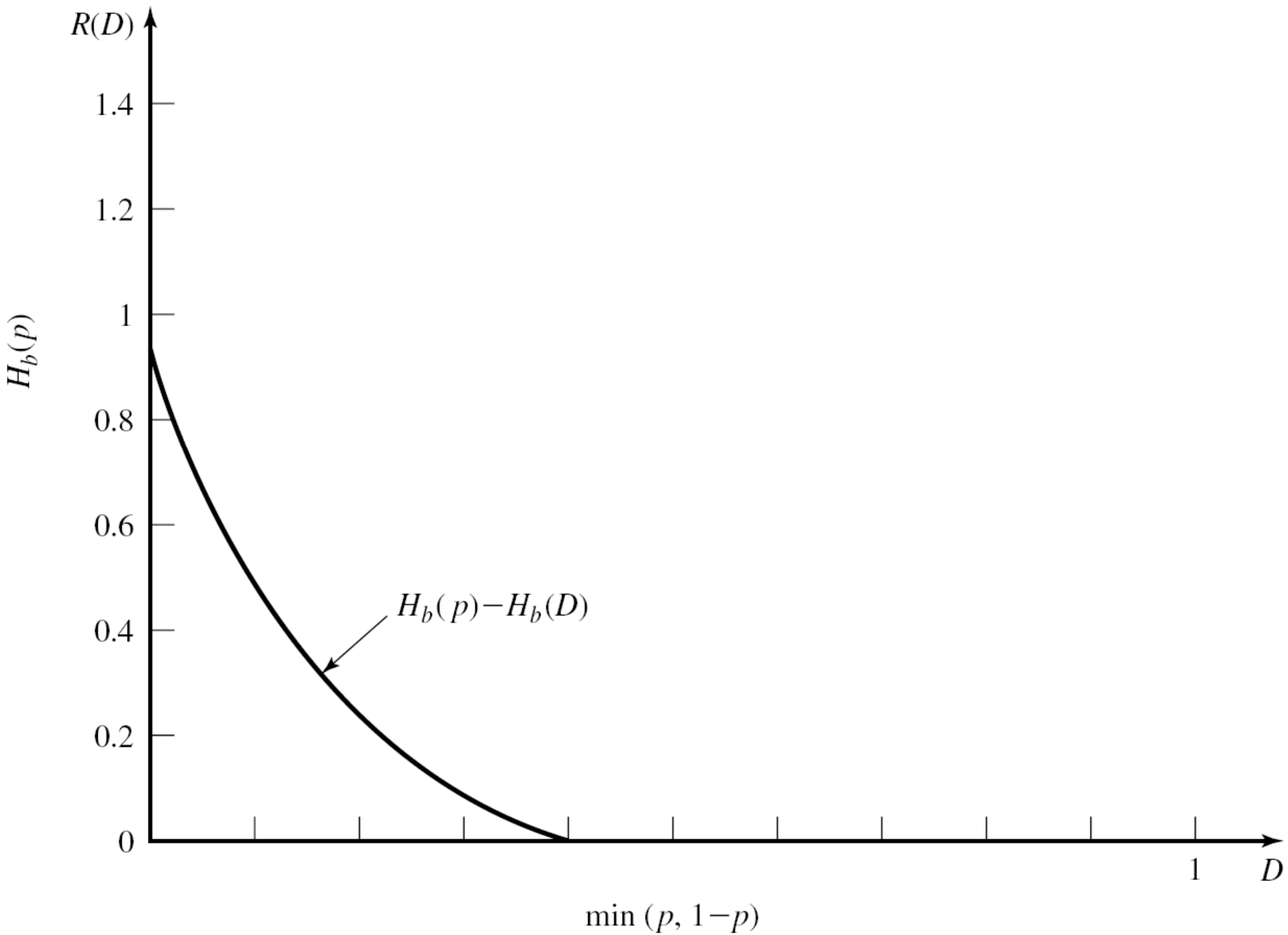
$$R(D)=\begin{cases} H_b(p)-H_b(D), & 0\le D\le \min\{p,1-p\} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Για μηδενική παραμόρφωση ως αναμένεται

$R(0)=H_b(p)$

- Για $p<0,5$ και $D=p$ έχουμε $R(D)=0$
    - Δεν χρειάζεται μετάδοση (όλα μηδέν)

Δυαδική πηγή χωρίς μνήμη



Γκαουσιανή πηγή

- Η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης της γκαουσιανής πηγής είναι

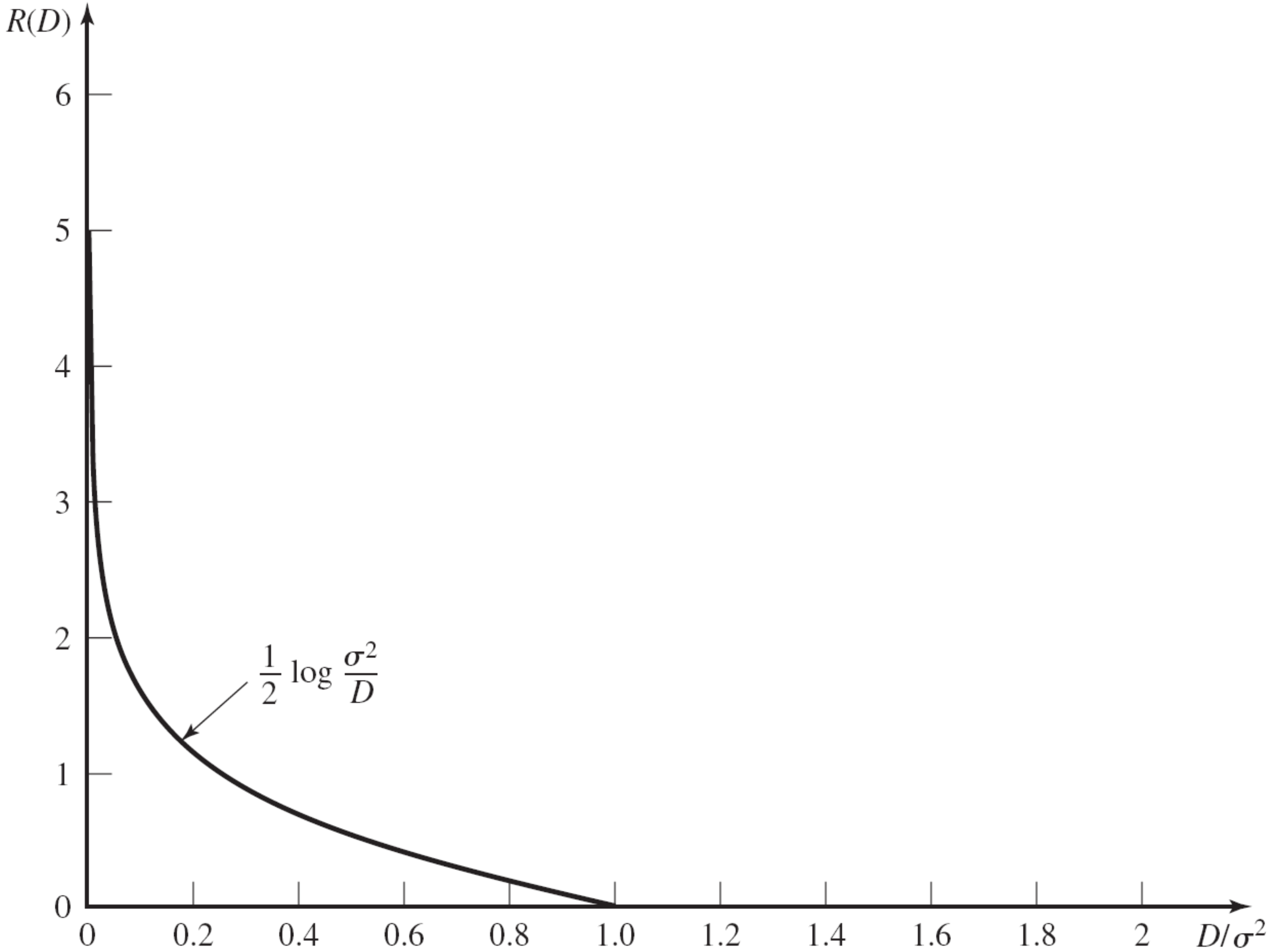
$$R(D)=\begin{cases}\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}, & 0\le D\le\sigma^2\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

- Για $0\le D\le\sigma^2$ η αντίστροφη συνάρτηση παραμόρφωσης-ρυθμού είναι

$$D(R)=\sigma^2 2^{-2R}$$

άρα αύξηση του R κατά ένα bit μειώνει την παραμόρφωση D κατά 4 ή 6 db

Γκαουσιανή πηγή



Κβάντιση

Κβαντιστές

- Η ακριβής αναπαράσταση μιας αναλογικής πηγής απαιτεί άπειρο αριθμό bit ανά έξοδο
  - Με την κβάντιση θα εμφανισθεί κάποια παραμόρφωση
  - Η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης δίνει ένα θεμελιώδες όριο
    - Ανταλλαγή ρυθμού κωδικοποίησης και παραμόρφωσης
    - Προσεγγίζεται μόνο ασυμπτωτικά με περίπλοκους κωδικοποιητές/αποκωδικοποιητές

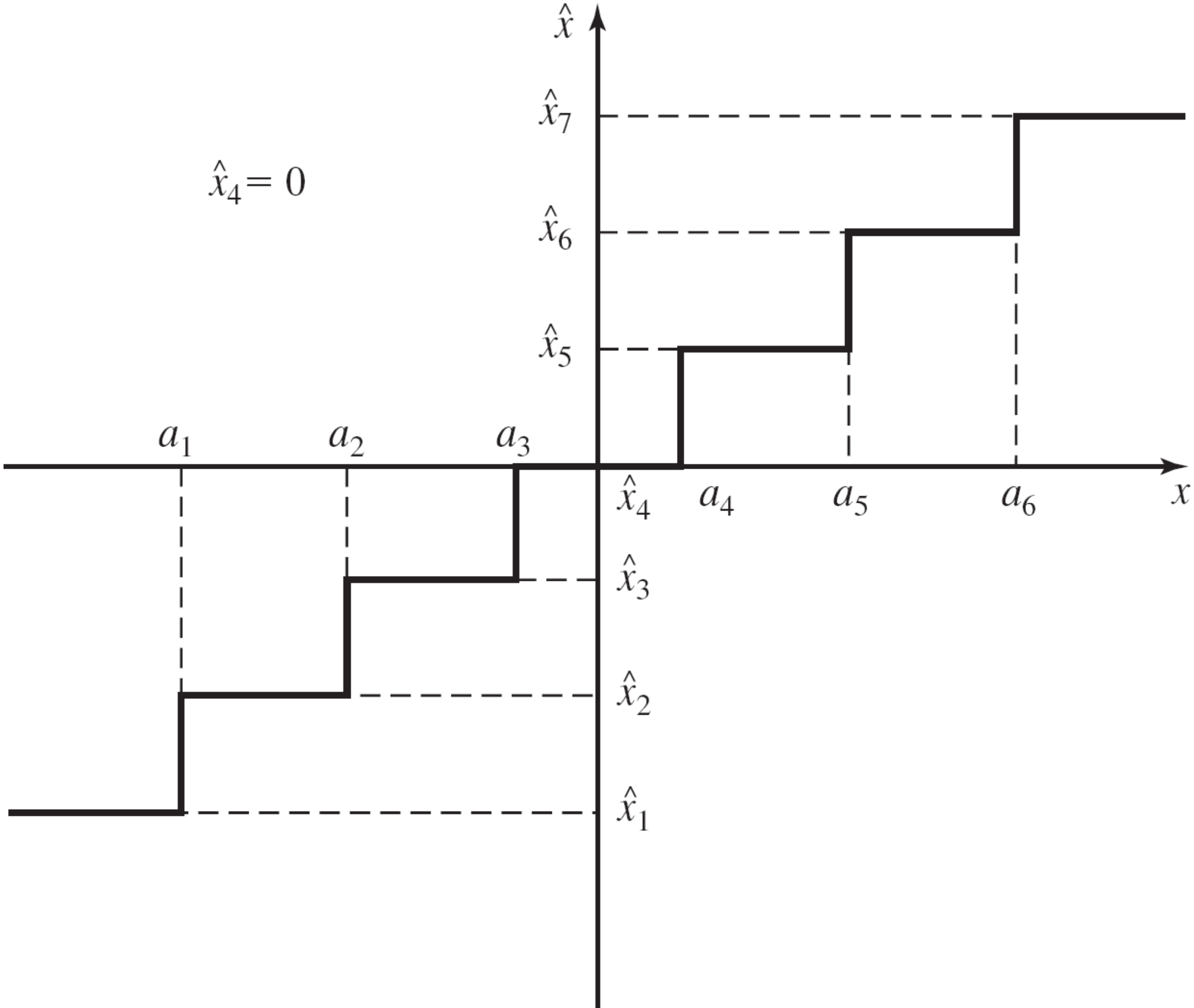
Κβαντιστές

- Όσο μεγαλύτερη η τιμή του n τόσο πιο κοντά στο όριο της συνάρτησης ρυθμού-παραμόρφωσης
- Οι κβαντιστές πρέπει να κβαντίζουν τις εξόδους κατά μπλοκ και όχι χωριστά
  - Διανυσματικοί κβαντιστές
    - Κβάντιση των εξόδων σε μπλοκ
  - Βαθμωτοί κβαντιστές
    - Κβάντιση κάθε εξόδου χωριστά

Βαθμωτή κβάντιση

- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ διαμερίζεται σε N ξένα μεταξύ τους σύνολα $\mathcal{R}_k$, k=1,2, …, N
- Για κάθε υποσύνολο $\mathcal{R}_\mathrm{k}$ επιλέγεται ένα αντιπροσωπευτικό του στοιχείο $\hat{x}_i$
- Εάν η έξοδος x_i της πηγής τη χρονική στιγμή i ανήκει στο τότε αναπαρίσταται με $\hat{x}_i$, που αποτελεί την κβαντισμένη εκδοχή του
  - Το $\hat{x}_i$ στη συνέχεια αναπαρίσταται με μια δυαδική ακολουθία, η οποία και μεταδίδεται
  - Ο ρυθμός μετάδοσης είναι $R = \log N$ bit
    - συνήθως το N επιλέγεται να είναι δύναμη του δύο

Ομοιόμορφη κβάντιση



Λόγος σήματος προς θόρυβο κβάντισης

- Είναι η ισχύς του σήματος προς την ισχύ του σήματος θορύβου

$$Q(x) = \hat{x}_i, \forall\, x \in \mathcal{R}_i$$

$$d(x, \hat{x}) = \left(x - Q(x)\right)^2$$

$$D = E\{d(X, \hat{X})\} = E\left\{\left(X - Q(X)\right)^2\right\}$$

$$SNQR = \frac{E\{X^2\}}{E\{(X - Q(X))^2\}} = \frac{P_X}{P_{\hat{X}}}$$

- Μέτρο της επίδοσης του κβαντιστή

Παραμόρφωση στην ομοιόμορφη κβάντιση

- Η παραμόρφωση του ομοιόμορφου κβαντιστή

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_x(x)dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_1+(i-1)q}^{a_1+iq} (x - \hat{x}_{i+1})^2 f_x(x)dx +$$

$$+ \int_{a_1+(N-2)q}^{\infty} (x - \hat{x}_N)^2 f_x(x)dx$$

Παραμόρφωση στην μη ομοιόμορφη κβάντιση

- Η παραμόρφωση του μη ομοιόμορφου κβαντιστή

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_x(x) dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{x}_{i+1})^2 f_x(x) dx +$$

$$+ \int_{a_{N-1}}^{\infty} (x - \hat{x}_N)^2 f_x(x) dx$$

Βέλτιστος κβαντιστής

- Για την ελαχιστοποίηση της D παραγωγίζοντας ως προς α_i βρίσκουμε

$$a_i = \frac{\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1}}{2}$$

- Τα άκρα των περιοχών κβάντισης είναι η μέση τιμή των γειτονικών σταθμών κβάντισης

Βέλτιστος κβάντιστης

- Για τα προηγούμενα όρια περιοχών παραγωγίζοντας την D ως προς $\hat{x}_i$ βρίσκουμε

$$\hat{x}_i = \frac{\int_{a_{i-1}}^{a_i} x f_x(x) dx}{\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_x(x) dx}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x \mid a_{i-1} < x \leq a_i) dx$$

$$= E\{x \mid a_{i-1} < x \leq a_i\}$$

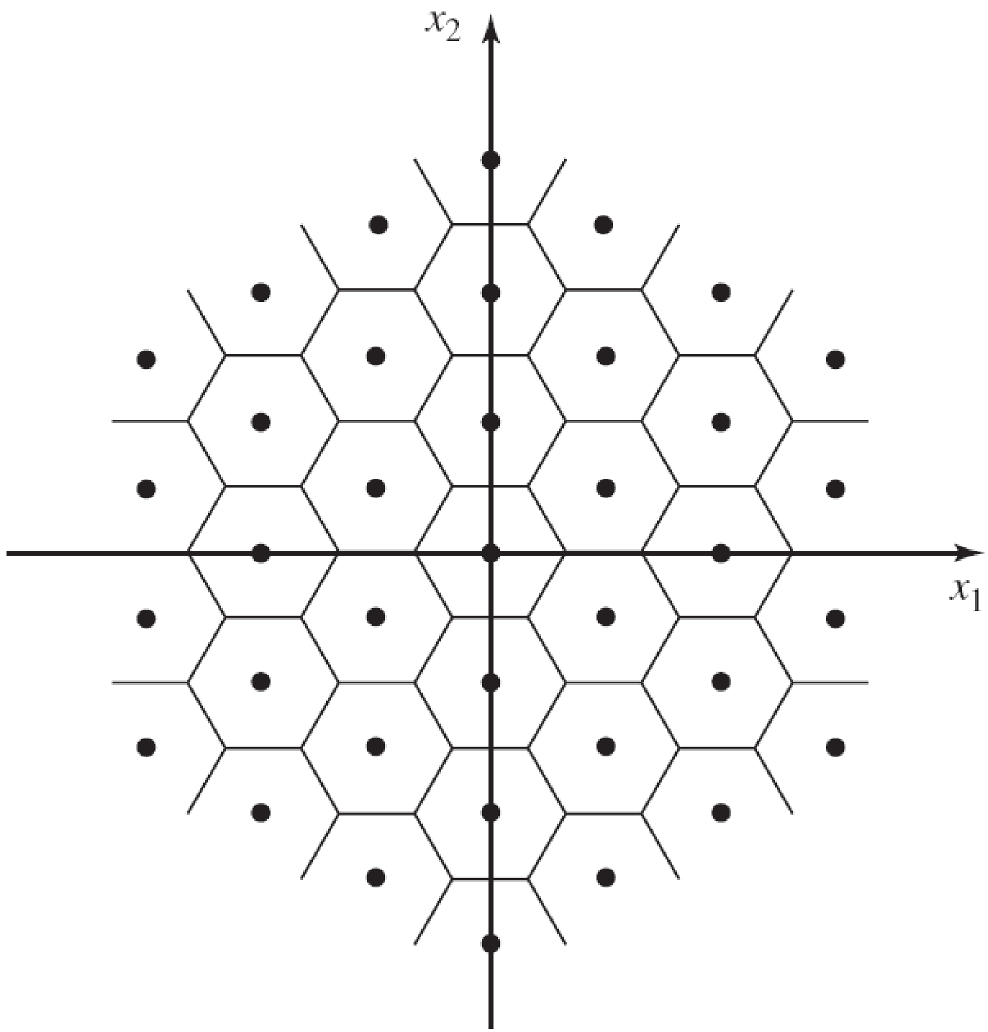
- Οι στάθμες κβάντισης είναι τα κέντρα μάζης των περιοχών κβάντισης

Διανυσματική κβάντιση

- Λαμβάνουμε τα δείγματα σε ομάδες των n δειγμάτων κάθε φορά
- Ο χώρος των δειγμάτων είναι $\mathbb{R}^n$ και χωρίζεται σε K περιοχές $\mathcal{R}_i$
- Απαιτούνται $\log K$ bit ανά ομάδα, οπότε ο ρυθμός είναι
$$R = \frac{\log K}{n}$$
- Ο βέλτιστος διανυσματικός κβαντιστής προκύπτει επιλέγοντας τις περιοχές κβάντιστης και τις τιμές κβάντισης έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η παραμόρφωση

Παράδειγμα διανυσματικής κβάντισης

- K=37, n=2



Παράδειγμα διανυσματικής κβάντισης

- Βαθμωτός κβαντιστής 4 σταθμών και διανυσματικός κβαντιστής 4 σταθμών σε δύο δείγματα