Θεωρία πληροφορίας

Εισαγωγή στην θεωρία πληροφορίας

Τηλεπικοινωνιακά συστήματα

- Όλα τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα σχεδιάζονται για να μεταφέρουν πληροφορία
  - Σε κάθε τηλεπικοινωνιακό σύστημα υπάρχει μια πηγή που παράγει πληροφορία
  - Σκοπός του τηλεπικοινωνιακού συστήματος είναι να μεταφέρει την πληροφορία στον παραλήπτη
- Π.χ. στην τηλεοπτική εκπομπή
  - Η πηγή πληροφορίας είναι η βιντεοκάμερα
  - Η έξοδος της είναι η εικόνα
- Σε επικοινωνία υπολογιστών
  - Η πηγή πληροφορίας είναι κάποια εφαρμογή π.χ. email
  - Η έξοδος είναι χαρακτήρες ASCII

Πληροφορία – κοινή αντίληψη

- Κατά την κοινή αντίληψη πληροφορία = νέα γνώση
  - Αποκτάται μέσω ακοής, όρασης, κλπ
- Η πηγή πληροφορίας παράγει εξόδους που δεν είναι γνωστές στον δέκτη εκ των προτέρων
  - Εάν μπορούσαμε να τις προβλέψουμε δεν θα υπήρχε λόγος μετάδοσης
- Τι είναι πληροφορία;
  - Η ποιοτική περιγραφή (γνώση για κάποιο θέμα) δεν είναι αρκετή
  - Απαιτείται ποσοτική περιγραφή

Πληροφορία – μια διαισθητική προσέγγιση

- Υποθέστε ότι στις σημερινές εφημερίδες έχουμε τα ακόλουθα πρωτοσέλιδα
  - Αύριο ο ήλιος θα ανατείλει
  - Καίγεται η Ελλάδα
  - Καίγεται η Ελβετία
  - Εισβολή της Κούβας στις ΗΠΑ
- Πληροφορία → Έκπληξη → 1/Πιθανότητα

Πρωτοσέλιδο	Έκπληξη	Πιθανότητα	Πληροφορία
1	Καμία	Πάντα	Όχι
2	Μικρή	Μεγάλη	Αρκετή
3	Μεγάλη	Μικρή	Μεγάλη
4	Τεράστια	Ελάχιστη	Τεράστια

Πληροφορία – προσέγγιση μηχανικού

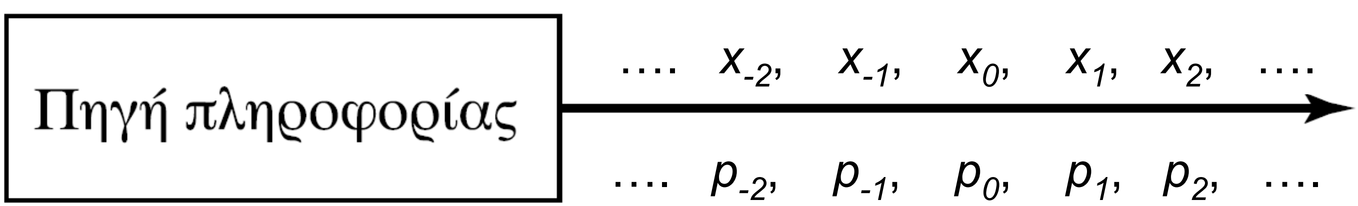
- Η πληροφορία σε ένα μήνυμα είναι ο χρόνος που απαιτείται για τη μετάδοσή του
  - Μηνύματα με μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης μπορούν να μεταδοθούν σε συντομότερο χρόνο από ότι πιο σπάνια μηνύματα
- Κώδικας Morse
  - Μικρότερες κωδικές λέξεις για χαρακτήρες που εμφανίζονται πιο συχνά (α, ε, ο)
  - Μεγαλύτερες κωδικές λέξεις για χαρακτήρες που εμφανίζονται πιο σπάνια (ξ, ψ, ζ)
- Ο χρόνος μετάδοσης ενός χαρακτήρα με πιθανότητα εμφάνισης p είναι ανάλογος του $\log(1/p)$

Μοντέλα πηγών πληροφορίας

- Οι πηγές πληροφορίας μπορούν να μοντελοποιηθούν με τυχαίες διαδικασίες
  - Η έξοδος μιας πηγής είναι χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση (χωρίς δυνατότητα πρόβλεψης)
  - Οι ιδιότητες εξαρτώνται από τη φύση της πηγής
- Κοινός τόπος είναι ότι όλες οι πηγές έχουν πεπερασμένο εύρος ζώνης, άρα μπορούν να δειγματοληπτηθούν με τον ρυθμό Nyquist
  - Περιοριζόμαστε σε διακριτές ως προς το χρόνο διαδικασίες $\{X_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$
- Το αλφάβητο των X_i μπορεί να είναι διακριτό (π.χ. χαρακτήρες) ή συνεχές (π.χ. δείγματα φωνής)

Διακριτή πηγή χωρίς μνήμη (Discrete Memoryless Source)

- Το πιο απλό μοντέλο πηγής
- Η DMS είναι στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου και διακριτού πλάτους
  - Τα x_i δημιουργούνται ανεξάρτητα, το καθένα με τη δική του πιθανότητα p_i
  - Εάν χρησιμοποιείται κβάντιση, τα συνεχή σήματα μπορούν να θεωρηθούν και αυτά ως διακριτά
  - Πιο πολύπλοκα μοντέλα έχουν μνήμη, δηλ. η δημιουργία κάποιου συμβόλου εξαρτάται από τα προηγούμενα



Μέτρο πληροφορίας

- Ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι διαισθητικές ιδιότητες
- Για κάθε έξοδο της πηγής υπάρχει μια συνδεδεμένη πιθανότητα εμφάνισής της
  - Ποια έξοδος μεταφέρει περισσότερη πληροφορία;
- Το μέτρο πληροφορίας πρέπει να είναι φθίνουσα συνάρτηση της πιθανότητας
  - Όσο πιο απίθανο το γεγονός, τόσο πιο μεγάλη πληροφορία μεταφέρει

Μέτρο πληροφορίας

- Το μέτρο πληροφορίας πρέπει να είναι συνεχής συνάρτηση
  - Μικρές αλλαγές της πιθανότητας εμφάνισης της εξόδου δεν πρέπει να μεταβάλλουν πολύ την ποσότητα της πληροφορίας
- Αθροιστική ιδιότητα
  - Η συνολική ποσότητα πληροφορίας δύο ανεξάρτητων γεγονότων είναι το άθροισμα των επί μέρους μέτρων πληροφορίας των γεγονότων

Ιδία-πληροφορία

- Το περιεχόμενο πληροφορίας εξαρτάται μόνο από την πιθανότητα p_j εμφάνισης και όχι από το μέγεθος του συμβόλου x_j
  - *Self-information* $I(p_j)$
- Η ιδία-πληροφορία $I(p_j)$ είναι συνεχής συνάρτηση της p_j
- Η ιδία-πληροφορία $I(\cdot)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του ορίσματος
- Εάν $p = p_1 p_2$, τότε $I(p) = I(p_1) + I(p_2)$

Μέτρο πληροφορίας

- Η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες είναι
  - $I(x) = -log(p(x))$
- Η βάση του λογαρίθμου δεν είναι σημαντική, αλλά ορίζει τη μονάδα μέτρησης της πληροφορίας
- Εάν η βάση είναι 2, τότε η πληροφορία μετριέται σε bit
- Εάν χρησιμοποιηθούν φυσικοί λογάριθμοι, τότε η πληροφορία μετριέται σε nap
- Στη συνέχεια όλοι οι λογάριθμοι θα είναι με βάση το 2

Σημαντικές ιδιότητες

- Προφανώς ισχύει

$$I(x_i) = 0 \qquad \text{εάν} \qquad p(x_i) = 1$$

$$I(x_i) \geq 0$$

$$I(x_i) > I(x_j) \quad \text{εάν} \qquad p(x_i) < p(x_j)$$

$$I(x_i x_j) = I(x_i) + I(x_j) \text{ εάν } x_i, x_j \text{ ανεξάρτητα}$$

- Τι συμβαίνει όταν $p_i = 0$;

Εντροπία

Μέση πληροφορία

- Τηλεπικοινωνιακό σύστημα
  - Μεταδίδονται μακριές σειρές συμβόλων
- Η ποσότητα πληροφορίας πηγής είναι η μέση τιμή της ιδίας-πληροφορίας όλων των εξόδων της

$$\sum_{i=1}^{N} p_i I(x_i) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log(p_i)$$

Εντροπία

- Εντροπία $H(X)$ είναι η μέση τιμή πληροφορίας της πηγής ανά σύμβολο

$$H(X) = E\{[I(X)]\} = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log(p_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log(\frac{1}{p_i})$$

- Η εντροπία αποτελεί ένα μέτρο της αβεβαιότητας για την x (κατά μέσο όρο)
  - Όσο ποιο πολλά είναι γνωστά για την x, τόσο μικρότερη είναι η εντροπία

Εντροπία ομοιόμορφης κατανομής

- Εάν οι έξοδοι της πηγής είναι ισοπίθανες, τότε

$$x_i, i = 1, 2, \ldots, N \rightarrow p_i = 1/n$$

$$H(X) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log(N) = \log(N)$$

Απλά όρια

- Για μια τυχαία μεταβλητή με N πιθανές τιμές
$$0 \le H(X) \le \log(N)$$
- Πότε επιτυγχάνονται τα όρια;
  - $H(X) = 0$ εάν και μόνο εάν $p(x_i) = 1$ για κάποιο i
  - $H(X) = \log(N)$ εάν και μόνο εάν $p(x_i) = 1/N$ για όλα τα i

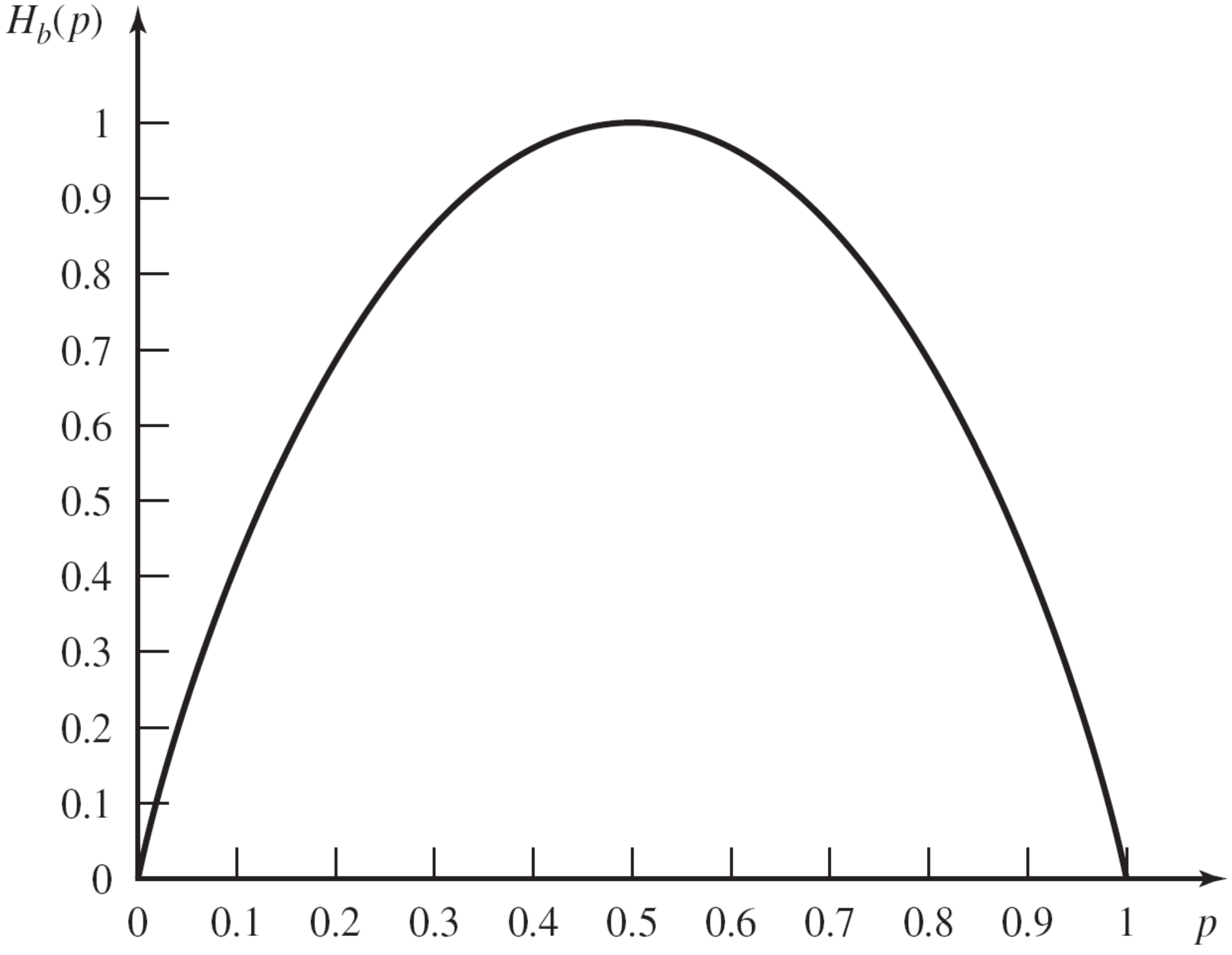
Δυαδική πηγή χωρίς μνήμη

- Εμφανίζονται δύο πιθανές έξοδοι με πιθανότητες p και 1-p, αντίστοιχα
- Η εντροπία είναι

$$H(X) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p)$$
$$= H_b(p)$$

- Μεγιστοποιείται όταν $p=1/2$, δηλαδή, $H_b(1/2)=1$
  - Όπως αναμένεται το αποτέλεσμα μπορεί να μεταφερθεί με 1 bit

Συνάρτηση δυαδικής εντροπίας



Από κοινού εντροπία

- Η από κοινού εντροπία δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y είναι

$$H(X,Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x,y)$$

- Στη γενική περίπτωση *n* τυχαίων μεταβλητών

$$H(\mathbf{X}) = -\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_n} p(x_1,x_2,\ldots,x_n)\log p(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Υπό συνθήκη εντροπία

- Εάν η τιμή της τυχαίας μεταβλητής $Y=y$ είναι γνωστή, η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X θα είναι $p(x|y)$ και η αντίστοιχη εντροπία είναι

$$H(X \mid Y = y) = -\sum_{x,y} p(x \mid y) \log p(x \mid y)$$

- Η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί στην αβεβαιότητα της X όταν γνωρίζουμε ότι $Y=y$
- Η μέση τιμή για όλα τα y είναι η αβεβαιότητα της X όταν η Y είναι γνωστή = υπό συνθήκη εντροπία

Υπό συνθήκη εντροπία

- Άρα $H(X\,|\,Y) = -\sum_{x,y} p(x\,|\,y)\,p(y)\log p(x\,|\,y)$

$$= -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x\,|\,y)$$

- Η υπό συνθήκη εντροπία είναι μέτρο για την αβεβαιότητα της X δοθείσης της Y
- Επειδή η Y μπορεί να παρέχει κάποια πληροφορία για την X

$$H(X\,|\,Y) \le H(X)$$

Υπό συνθήκη εντροπία

- Στη γενική περίπτωση έχουμε

$$H(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = -\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_n} p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \log p(x_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

Ρυθμός εντροπίας

- Εάν X_n είναι η έξοδος μιας διακριτής (όχι απαραίτητα χωρίς μνήμη) πηγής

  $$H(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$$

  είναι η καινούργια πληροφορία για τη X_n όταν κάποιος έχει παρακολουθήσει την ακολουθία $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$
- Το όριο H στο άπειρο είναι ο ρυθμός εντροπίας

Ρυθμός εντροπίας

- Η στατικότητα εξασφαλίζει την ύπαρξη του ορίου

$$H = \lim_{n\to\infty} H(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$$

και ισχύει εναλλακτικά

$$H = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

ακόμη και για πηγές με μνήμη

Χρήσιμες ιδιότητες

- Αλυσίδα

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = H(X_1) + H(X_2 \mid X_1) + \cdots + H(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$$

- Για δύο τυχαίες μεταβλητές

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X \mid Y) = H(X) + H(Y \mid X)$$

Χρήσιμες ιδιότητες

- Εάν οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες

$$H(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$$

και εάν έχουν την ίδια κατανομή

$$H(\mathbf{X}) = nH(X_1)$$

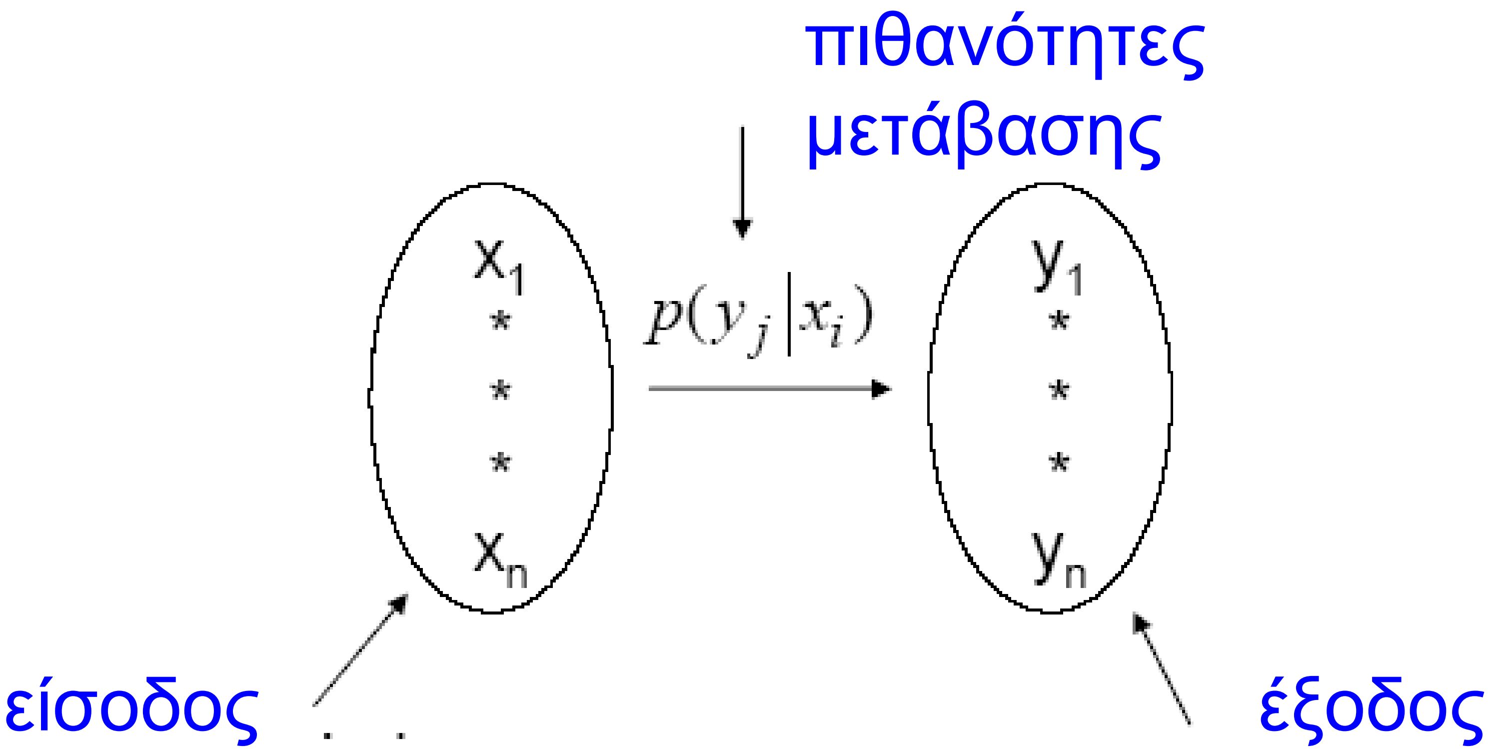
- Ισχύει η ανισότητα (ισότητα όταν οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες)

$$H(\mathbf{X}) \leq \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$$

Αμοιβαία πληροφορία

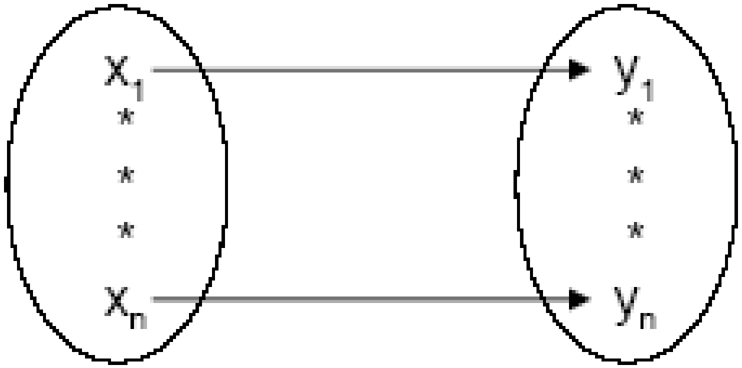
Μοντέλο τηλεπικοινωνιακού διαύλου

- Μοντέλο διακριτού διαύλου

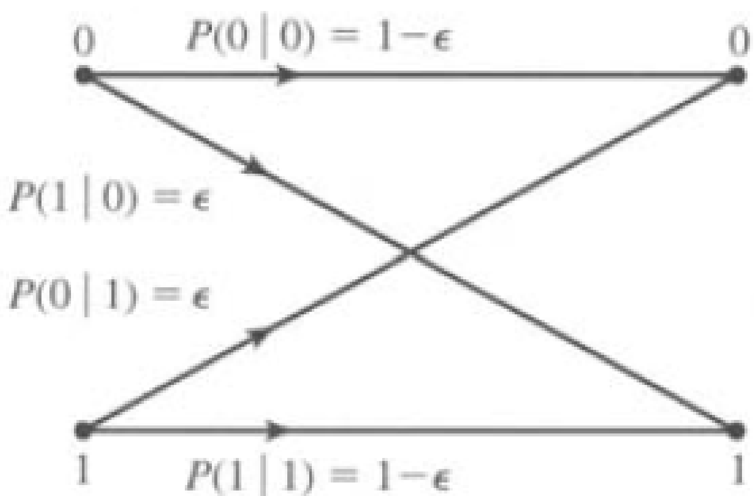


Παραδείγματα διαύλων

- Ιδανικός δίαυλος χωρίς θόρυβο



- Δυαδικός συμμετρικός δίαυλος



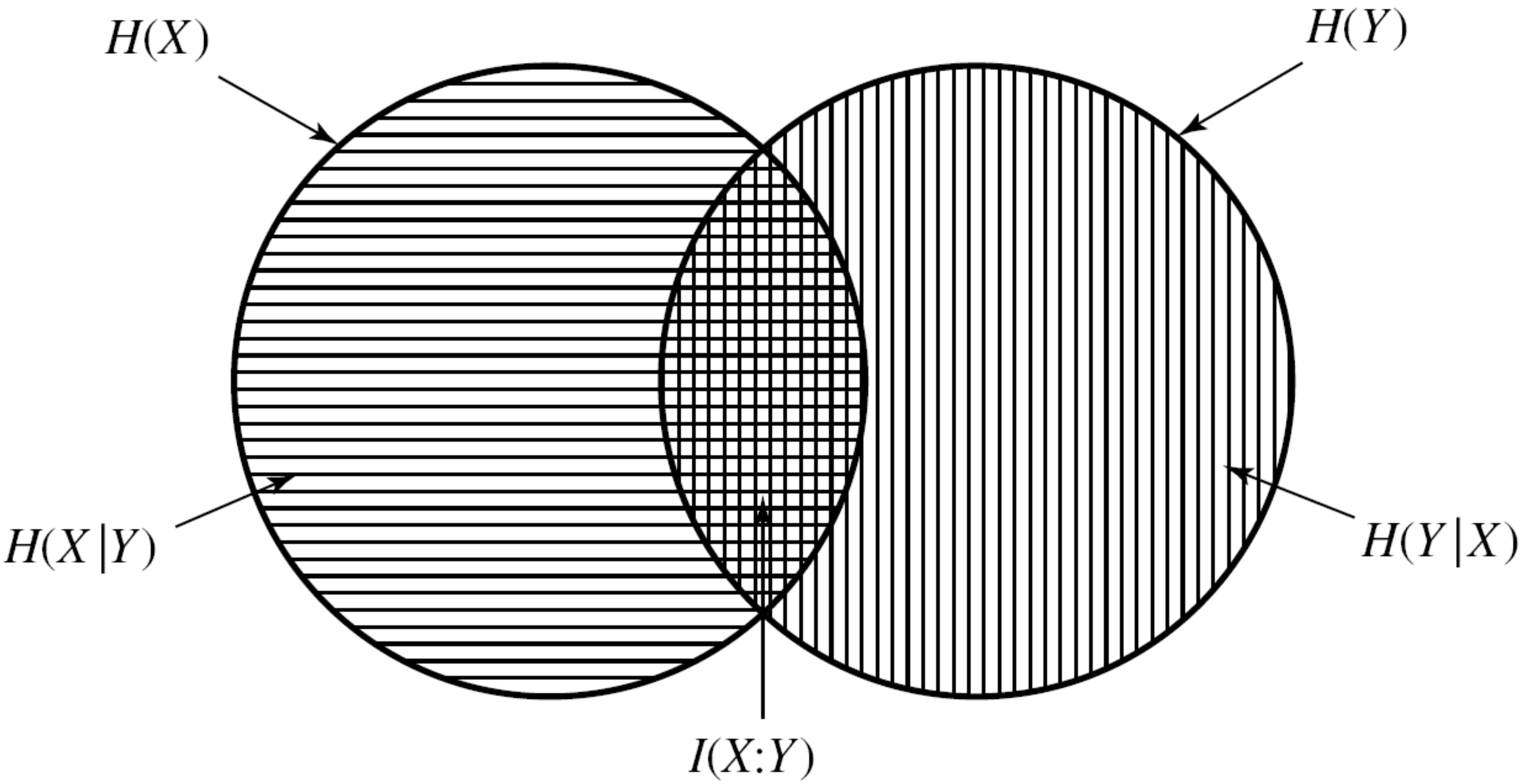
Αμοιβαία πληροφορία

- Η αμοιβαία πληροφορία $I(X;Y)$ μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών είναι

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$$

  - Μπορούμε να θεωρήσουμε την X ως την είσοδο και την Y ως την έξοδο του διαύλου
- $H(X)$ είναι η αβεβαιότητα για την X
- $H(X|Y)$ είναι η αβεβαιότητα για την X δοθέντος ότι γνωρίζουμε την Y
- $H(X)$ - $H(X|Y)$ είναι η αβεβαιότητα για την X που εξαλείφεται με την εμφάνιση της Y

Εντροπία, υπό συνθήκη εντροπία και αμοιβαία πληροφορία



Ιδιότητες

- Ισχύει ότι $$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X \mid Y) \\ &= H(X) - \big(H(X,Y) - H(Y)\big) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \end{aligned}$$
- άρα $I(X;Y) = I(Y;X)$
- $I(X;Y) \geq 0$ επειδή $H(Y) \geq H(Y \mid X)$
  - με την ισότητα να ισχύει εάν οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες
- $I(X;Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$

Διαφορική εντροπία

- Στην περίπτωση τυχαίας μεταβλητής *X* με συνεχείς τιμές η εντροπία είναι άπειρη
- Στην περίπτωση αυτή ορίζεται η διαφορική εντροπία

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx$$

- Η διαφορική εντροπία δεν έχει τη διαισθητική ερμηνεία της διακριτής εντροπίας, όμως είναι χρήσιμη για τη σύγκριση της πληροφορίας συνεχών πηγών

Απόλυτη εντροπία

- Η απόλυτη εντροπία είναι

$$H_{abs}(X) = -\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f_X(x_i)\Delta x \log\left(f_X(x_i)\Delta x \right)$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \left[\sum_i f_X(x_i) \log f_X(x_i) + f_X(x_i) \log \Delta x \right] \Delta x$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx + H_0(X) = h(X) + H_0(X)$$

- όπου

$$H_0(X) = -\log 0 = \infty$$

Αμοιβαία πληροφορία συνεχών τυχαίων μεταβλητών

- Για δύο τυχαίες μεταβλητές

$$h(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log f(x,y)dxdy$$

$$h(X|Y) = h(X,Y) - h(Y)$$

$$I(X;Y) = h(Y) - h(X|Y) = h(X) - h(Y|X)$$

- Όπου η αμοιβαία πληροφορία των συνεχών τυχαίων μεταβλητών έχει την γνωστή ερμηνεία της πληροφορίας που η μία παρέχει για την άλλη

Διαφορική εντροπία Γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

- άρα

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$= -\log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} + \frac{1}{2\sigma^2} \log e \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2}\sigma^2 \log e = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$