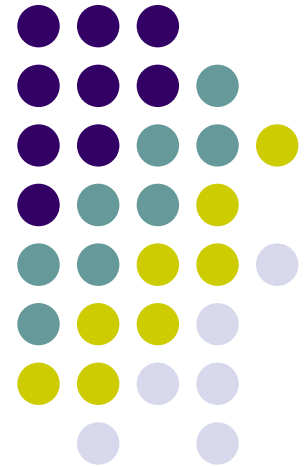
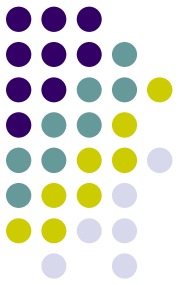


Ψηφιακή μετάδοση στη βασική ζώνη

Baseband digital transmission



Ψηφιακά σήματα



- Ένα ψηφιακό σήμα δεν είναι τίποτα άλλο από μια **διατεταγμένη ακολουθία συμβόλων**
- Η πηγή πληροφορίας παράγει σύμβολα από ένα αλφάβητο μεγέθους $M \geq 2$ με ρυθμό r σύμβολα ανά δευτερόλεπτο
- Όταν $M = 2$ τα δύο σύμβολα είναι τα **bit (binary digit)** 0 και 1

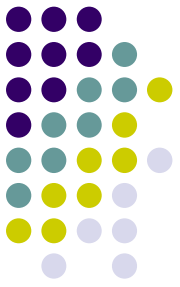
Ψηφιακά σήματα βασικής ζώνης



- Η αναπαράσταση ενός ψηφιακού σήματος βασικής ζώνης (digital baseband signal) συνήθως γίνεται με τη μορφή τραίνου παλμών διαμορφωμένων κατά πλάτος (PAM) $x(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$ όπου a_k είναι το πλάτος του k -στου συμβόλου και αντιστοιχεί σε μία από M διακριτές τιμές
- Ο αδιαμόρφωτος παλμός $p(t)$ μπορεί να είναι ορθογωνικός ή να έχει οποιαδήποτε άλλη μορφή με τον περιορισμό

$$p(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = \pm D, \pm 2D, \dots \end{cases}$$

Ανάκτηση ψηφιακού σήματος βασικής ζώνης



- Ο προηγούμενος περιορισμός εξασφαλίζει ότι το σήμα πληροφορίας ανακτάται με δειγματοληψία στα σημεία $t=KD$, $K=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$x(KD) = \sum_k a_k p(KD - kD) = a_k$$



Ρυθμός σηματοδότησης

- Το D είναι η απόσταση μεταξύ παλμών
 - δεν είναι η διάρκεια του παλμού
- Ο ρυθμός σηματοδότησης r μετριέται σε **baud** (σύμβολα ανά δευτερόλεπτο) και είναι

$$r \triangleq 1/D$$

- Στην περίπτωση δυαδικής σηματοδότησης $M=2$, $D=T_b$ είναι η διάρκεια του bit, οπότε ο ρυθμός σε **bps** (bits per second) είναι

$$r_b = 1/T_b$$

- Αναπαριστώντας το κάθε σύμβολο με n bit

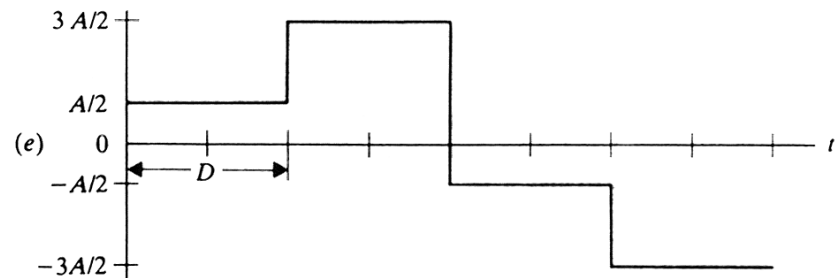
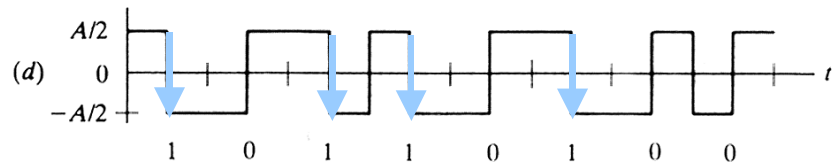
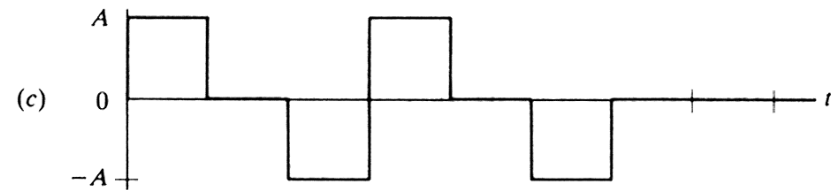
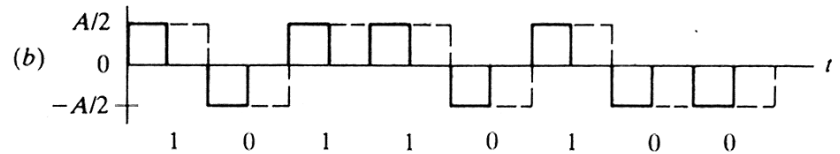
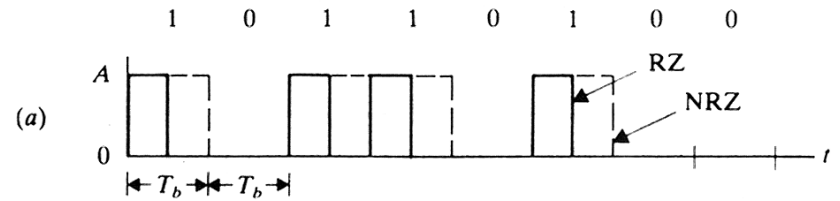
$$M = 2^n$$

$$r = r_b / n = r_b / \log_2 M$$

Μορφές σηματοδότησης



- Μονοπολική $[0, A]$
RZ, NRZ
- Πολική $[-A/2, A/2]$
RZ, NRZ
- Διπολική $[-A, 0, A]$
AMI
- Manchester
- Πολική τετραδική





Μορφές σηματοδότησης

- Μονοπολική (Unipolar)
 - Κυματομορφή on-off όπου $a_k=A$ αντιστοιχεί στο bit 1 και $a_k=0$ στο 0
 - Στη μορφή **return-to-zero (RZ)** η διάρκεια του παλμού είναι $T_b/2$, ενώ στη μορφή **non return-to-zero (NRZ)** η διάρκεια είναι T_b
 - Η NRZ θέτει μεγαλύτερη ενέργεια ανά παλμό και απαιτεί συγχρονισμό για να διακριθούν συνεχόμενα 1
 - Δημιουργεί ρεύμα dc
- Πολική (Polar)
 - Παλμοί αντίθετης πολικότητας πλάτους $a_k=\pm A/2$ σε μορφή RZ ή NRZ
 - Δε δημιουργεί ρεύμα dc εάν τα 0 και 1 είναι ισοπίθανα



Μορφές σηματοδότησης

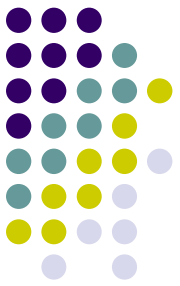
- Διπολική (Bipolar) ή AMI (Alternate Mark Inversion)
 - Διαδοχικά 1 αναπαριστώνται από παλμούς εναλλασσόμενης πολικότητας
 - Κατάλληλη για μετάδοση (δεν απαιτεί γνώση της πολικότητας)
 - Δε δημιουργεί ρεύμα dc εάν τα 0 και 1 είναι ισοπίθανα
- Manchester ή split phase
 - Το 1 αναπαριστάνεται με θετικό παλμό μισής διάρκειας ακολουθούμενο από αρνητικό παλμό μισής διάρκειας
 - Μηδενική dc συνιστώσα
 - Εύκολη ανάκτηση ρολογιού
 - Απαιτεί γνώση της πολικότητας



Μορφές σηματοδότησης

- Πολική τετραδική
 - Χρήση τεσσάρων σταθμών για αναπαράσταση των συνδυασμών 00, 01, 10 και 11
 - Διπλάσια διάρκεια παλμών $D=2T_b$, μισός ρυθμός baud $r=r_b/2$
 - Μικρότερη απαίτηση σε εύρος ζώνης

Μετάδοση ψηφιακού σήματος



- Κατά τη μετάδοση του ψηφιακού σήματος προστίθεται θόρυβος και παραμορφώνονται οι παλμοί
- Με βαθυπερατό φίλτρο να απομακρύνει τις εκτός ζώνης αλλοιώσεις, το σήμα στην είσοδο του δέκτη είναι

$$y(t) = \sum_k a_k \tilde{p}(t - t_d - kD) + n(t)$$

- όπου t_d η καθυστέρηση μετάδοσης και $\tilde{p}(t)$ είναι η μορφή του αλλοιωμένου μετά τη μετάδοση παλμού



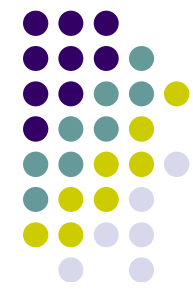
Φώραση ψηφιακού σήματος

- Η ανάκτηση του σήματος πληροφορίας γίνεται μέσω **αναγεννητή (regenerator)** που λαμβάνει δείγματα τις στιγμές $t_K = KD + t_d$ και αποφασίζει για το σύμβολο που στάλθηκε

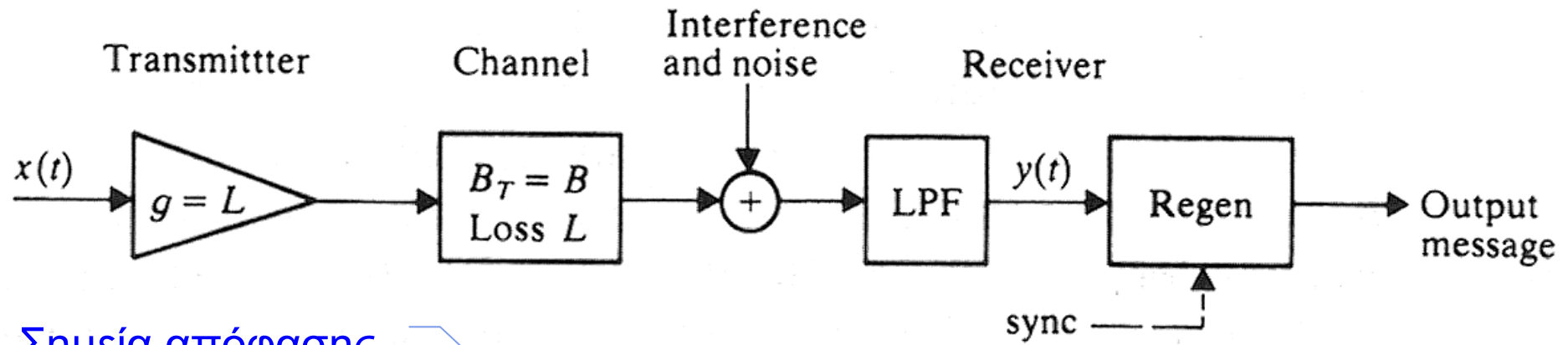
- Με την υπόθεση ότι $\tilde{p}(0) = 1$ ισχύει

$$y(t_K) = a_K + \sum_{k \neq K} a_k \tilde{p}(KD - kD) + n(t_K)$$

- όπου ο πρώτος όρος είναι το επιθυμητό **σήμα**, ο τελευταίος όρος είναι η επίδραση του **θορύβου** και ο μεσαίος όρος, είναι η **διασυμβολική παρεμβολή (ISI – intersymbol interference)** και περιγράφει την επίδραση των άλλων παλμών στο επιθυμητό σήμα

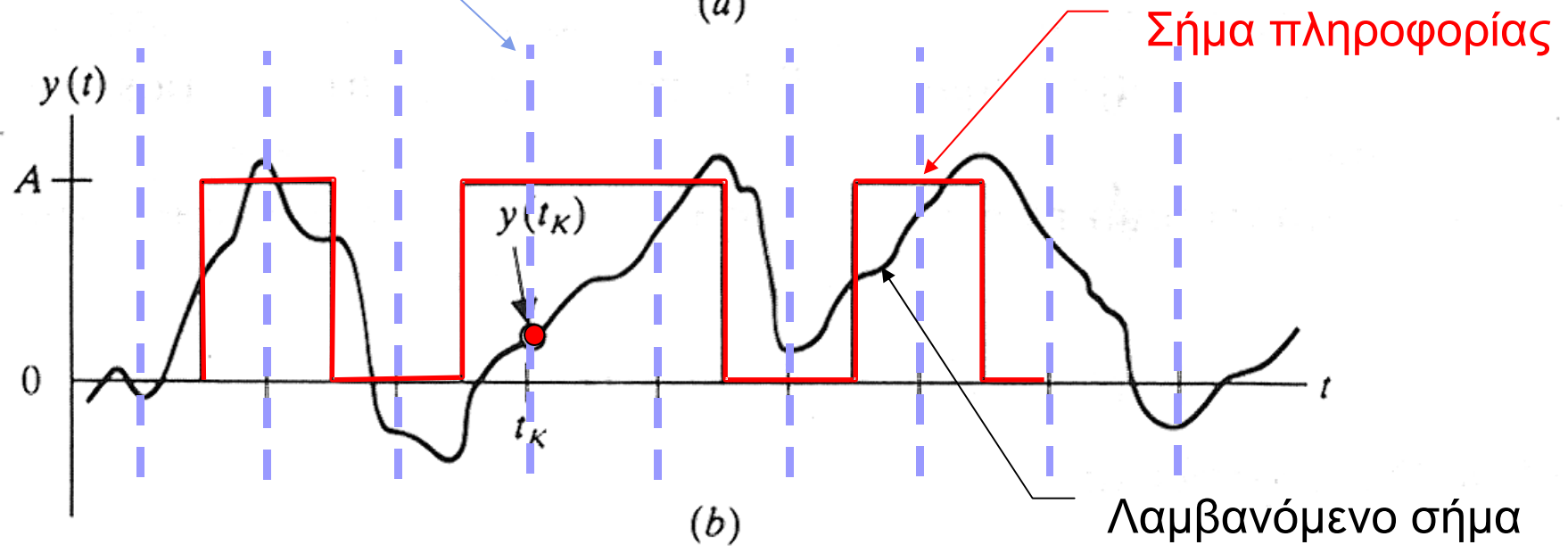


Δομικό διάγραμμα



Σημεία απόφασης

(a)



Λάθη μετάδοσης



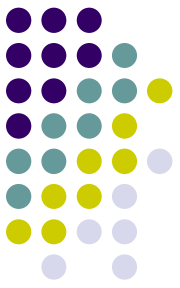
- Ο συνδυασμός της ISI και του θορύβου οδηγούν σε λάθη φώρασης
 - Ο αναγεννητής πρέπει να αποφασίσει για το ποιο σύμβολο στάλθηκε a_K με βάση την τιμή $y(t_K)$ στο σημείο t_K
 - Το βαθυπερατό φίλτρο μειώνει την επίδραση του θορύβου, αλλά αυξάνει την ISI εξαπλώνοντας τη διάρκεια των παλμών
- → Υφίσταται θεμελιώδης περιορισμός στη σχέση μεταξύ της διασυμβολικής παρεμβολής, του εύρους ζώνης μετάδοσης και του ρυθμού σηματοδότησης



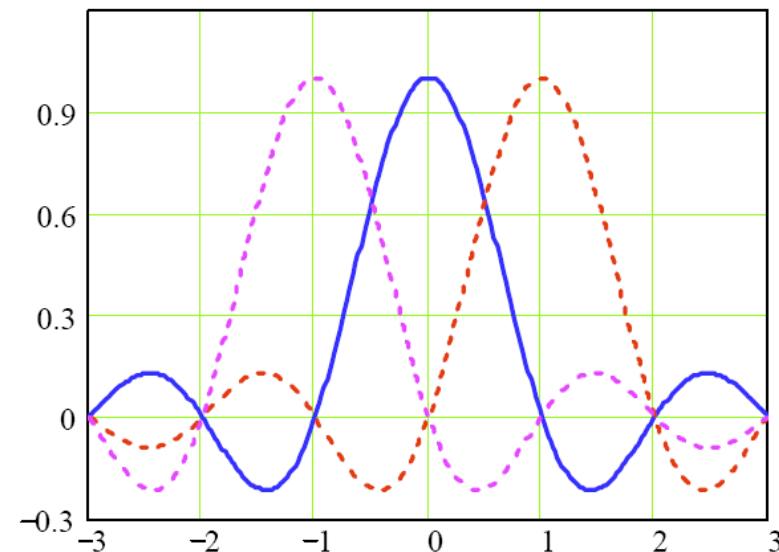
Θεώρημα Nyquist

- Δοθέντος ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου εύρους ζώνης B , είναι δυνατή η μετάδοση ανεξάρτητων συμβόλων με ρυθμό $r \leq 2B$ baud χωρίς διασυμβολική παρεμβολή.
- Δεν είναι δυνατή η μετάδοση ανεξάρτητων συμβόλων με ρυθμό $r > 2B$.

Θεώρημα Nyquist



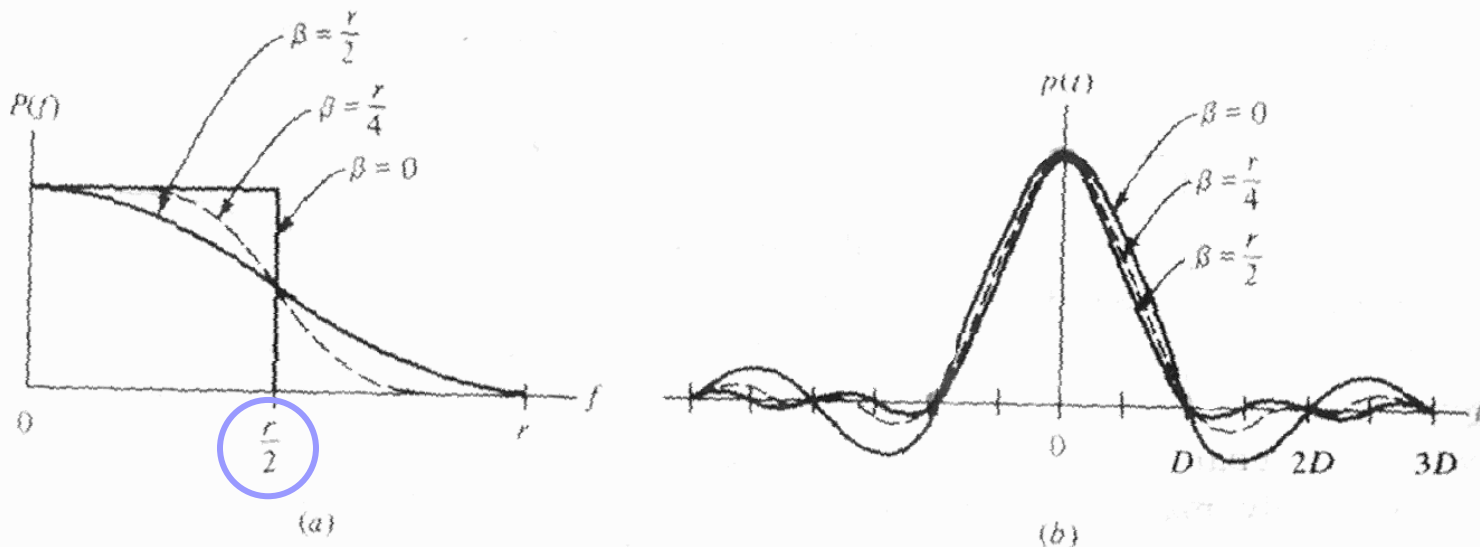
- Για μετάδοση με ρυθμό $r=2B$ ο παλμός πρέπει να έχει τη μορφή συνάρτησης sinc
 - $p(t)=\text{sinc}(rt)=\text{sinc}(t/D)$ που εμφανίζει περιοδικούς μηδενισμούς στα $t= \pm D, \pm 2D, \dots$
 - έχει φάσμα περιορισμένου εύρους ζώνης $P(f)=0, |f|>r/2$ που δε παραμορφώνεται με τη διάβαση μέσω βαθυπερατού φίλτρου $B \geq r/2$





Μορφοποίηση παλμών

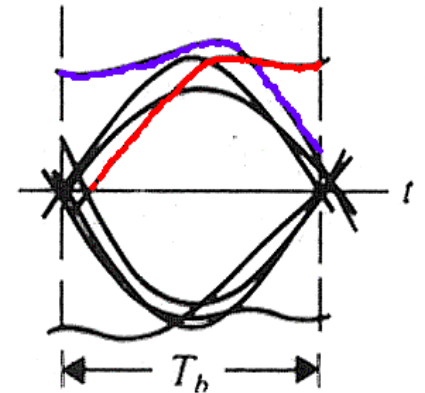
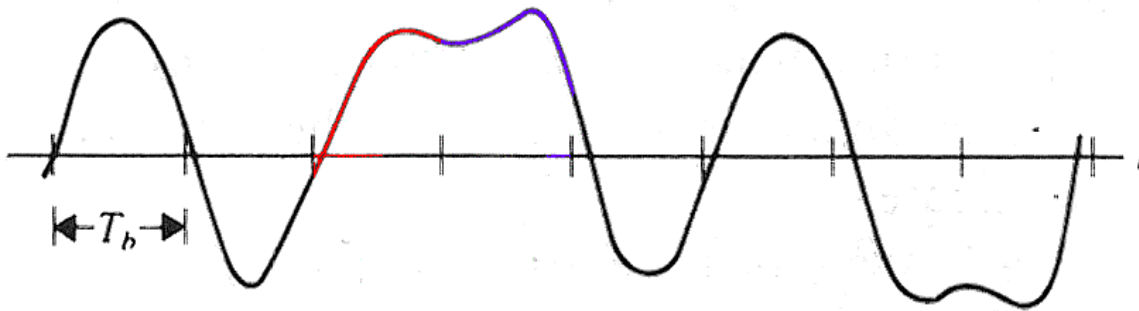
- Οι παλμοί sinc έχουν άπειρη διάρκεια ...
- ... μια πιο πρακτική λύση είναι παλμοί ανυψωμένου συνημίτονου (raised cosine) που έχουν μεγαλύτερη απόσβεση ουρών



Διάγραμμα ματιού

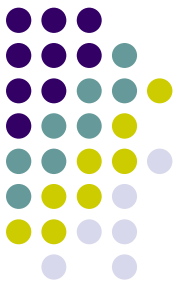


- Παρατήρηση του λαμβανόμενου σήματος σε παλμογράφο με κατάλληλο συγχρονισμό και σάρωση

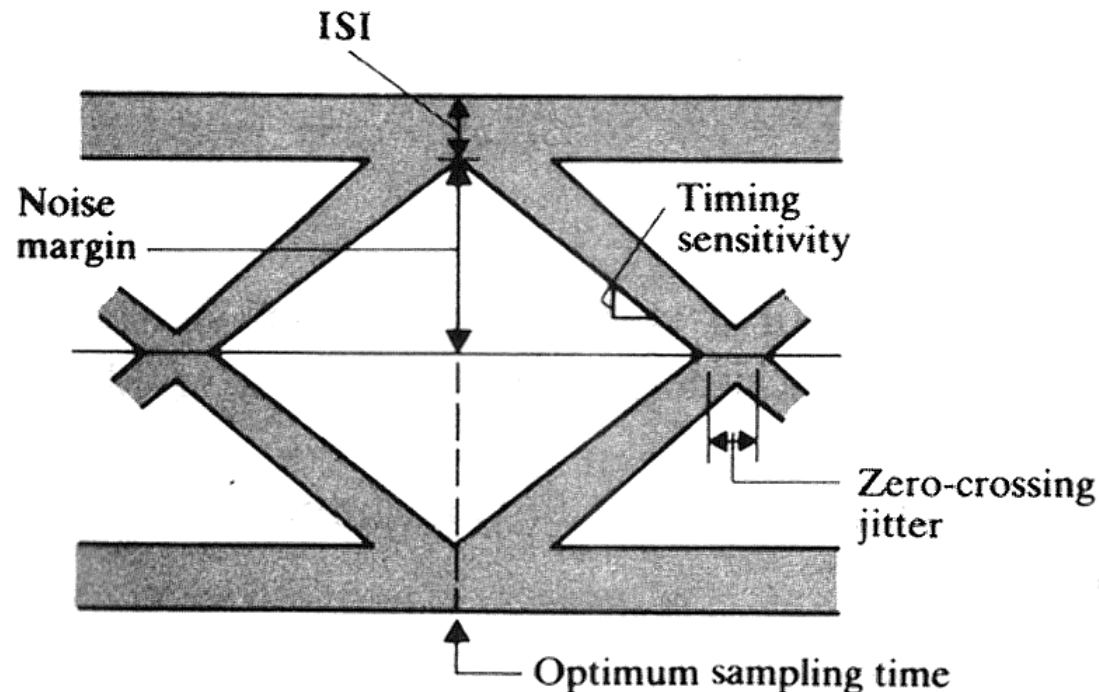


- Δίνει σημαντική πληροφορία για
 - τη βέλτιστη στιγμή δειγματοληψίας (τιμή συμβόλου)
 - την ανάκτηση του χρονισμού (διάρκεια συμβόλου)

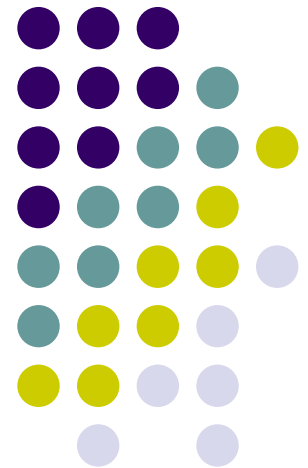
Διάγραμμα ματιού



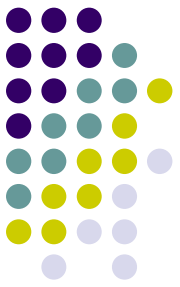
- Στο μέγιστο άνοιγμα ματιού η διασυμβολική παρεμβολή (ISI) κλείνει εν μέρει το μάτι και μειώνει το περιθώριο θορύβου (noise margin)
- Στα σημεία μηδενισμού οι παραμορφώσεις δημιουργούν τρέμουλο (jitter). Η κλίση του ματιού στην περιοχή αυτή δείχνει την ευαισθησία σε λάθη χρονισμού



Θόρυβος και λάθη



Ψηφιακός δέκτης σημάτων βασικής ζώνης

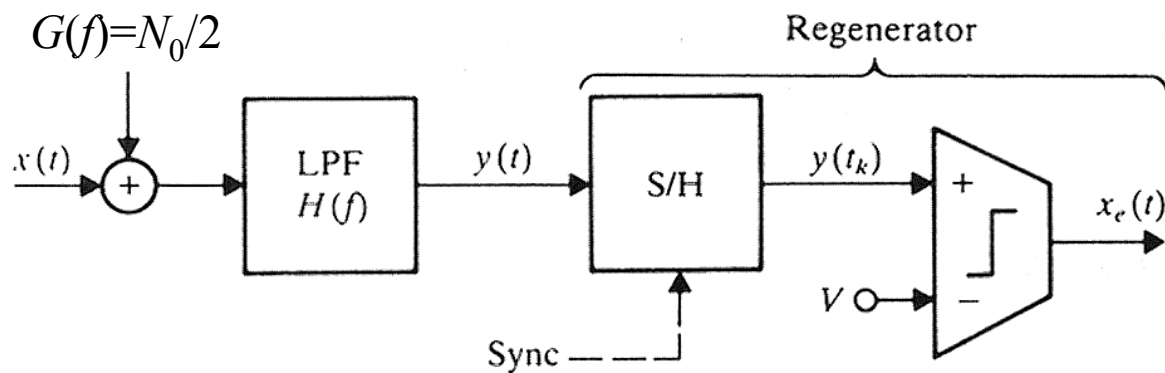


- Ο ψηφιακός δέκτης σημάτων βασικής ζώνης είναι ένας μετατροπέας αναλογικού-σε-ψηφιακό (analog-to-digital converter)
 - Μετατρέπει το **θορυβώδες** αναλογικό σήμα σε ψηφιακό σήμα **χωρίς θόρυβο** αλλά με περιστασιακά **λάθη**

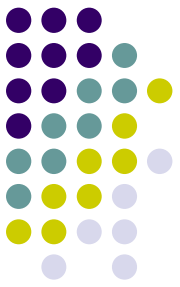


Δυαδικός δέκτης

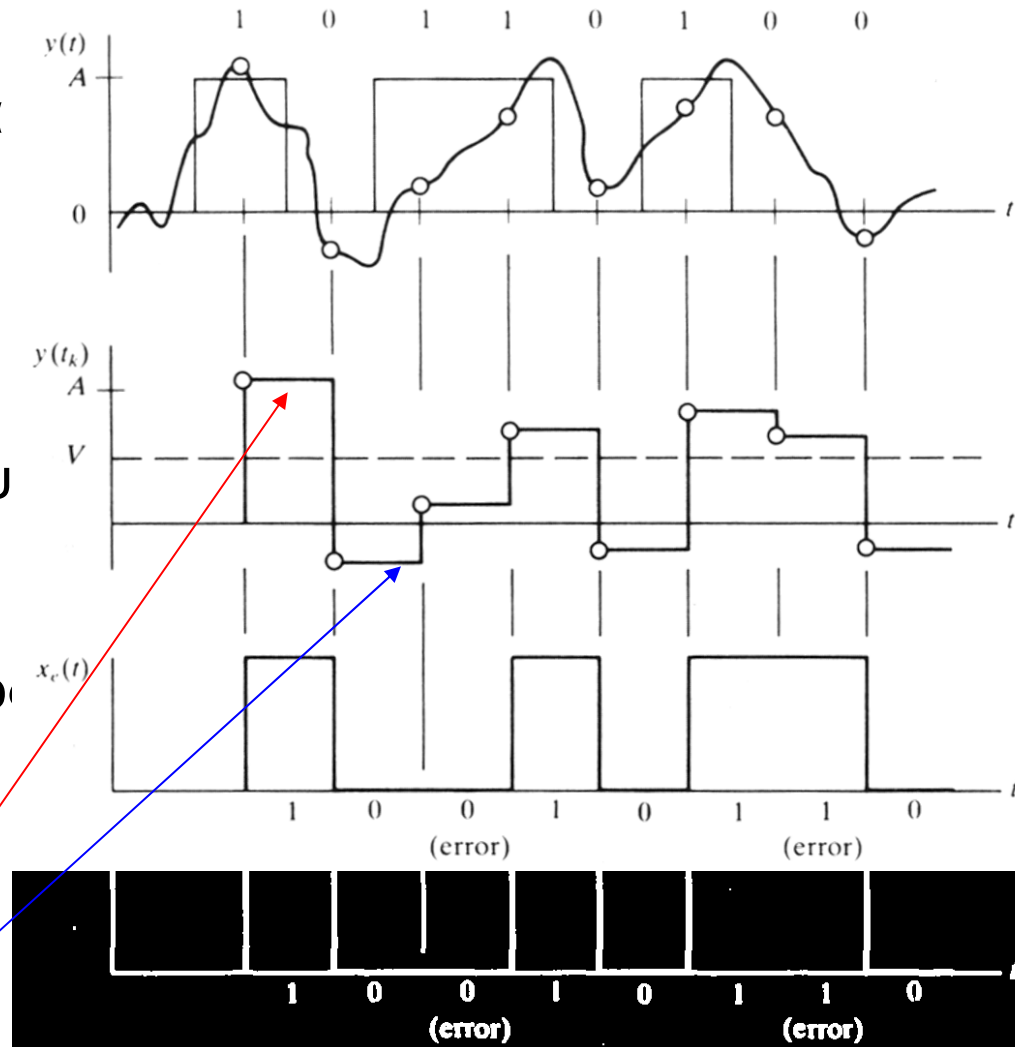
- Κύκλωμα sample-and-hold (S/H) σκανδαλίζεται τη βέλτιστη στιγμή
- Αναπαραγωγή ψηφιακού σήματος συγκρίνοντας με τιμή κατωφλίου V
- Ο συνδυασμός S/H και συγκριτή δρα ως **(regenerator) αναγεννητής**
 - Χωρίς λάθη το σήμα ανακτάται πλήρως!



Αναγέννηση μονοπολικού σήματος



- Υποθέτουμε δίαυλο χωρίς παραμορφώσεις παρουσία προσθετικού λευκού θορύβου (AWGN)
- Το λαμβανόμενο σήμα διέρχεται μέσω βαθυπερατού φίλτρου, που δεν εισάγει διασυμβολική παρεμβολή (ISI), για την αφαίρεση του πλεονάζοντος θορύβου
- Λαμβάνουμε **1** εάν $y(t_k) > V$
0 εάν $y(t_k) < V$



Περιγραφή με θεωρία πιθανοτήτων



- Υποθέτουμε **μονοπολική (on-off)** σηματοδότηση οπότε το σήμα στην έξοδο είναι $y(kt_s) = a_k + n(kt_s)$ όπου $a_k=0$ όταν μεταδίδεται το bit 0 και $a_k=A$ όταν μεταδίδεται το bit 1
- Οι τιμές του σήματος και του θορύβου τη στιγμή δειγματοληψίας είναι τυχαίες μεταβλητές Y και N
- Θεωρούμε τις δύο υποθέσεις
 - $H_0: a_k=0$ και $Y=n$ (μετάδοση 0)
 - $H_1: a_k=A$ και $Y=A+n$ (μετάδοση 1)που συμβολίζουν τη μετάδοση του bit 0 και 1 αντίστοιχα και λήψη του σήματος με θόρυβο



Υπό συνθήκη πιθανότητες

- Η υπό συνθήκη κατανομή πυκνότητας πιθανότητας του λαμβανόμενου σήματος Y ανάλογα με το τι μεταδόθηκε είναι

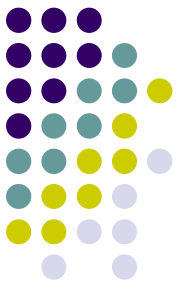
$$p_Y(y | H_0) = p_N(y)$$

$$p_Y(y | H_1) = p_N(y - A)$$

όπου $p_N(y)$ η κατανομή του θορύβου

- Στην περίπτωση λευκού θορύβου

$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$

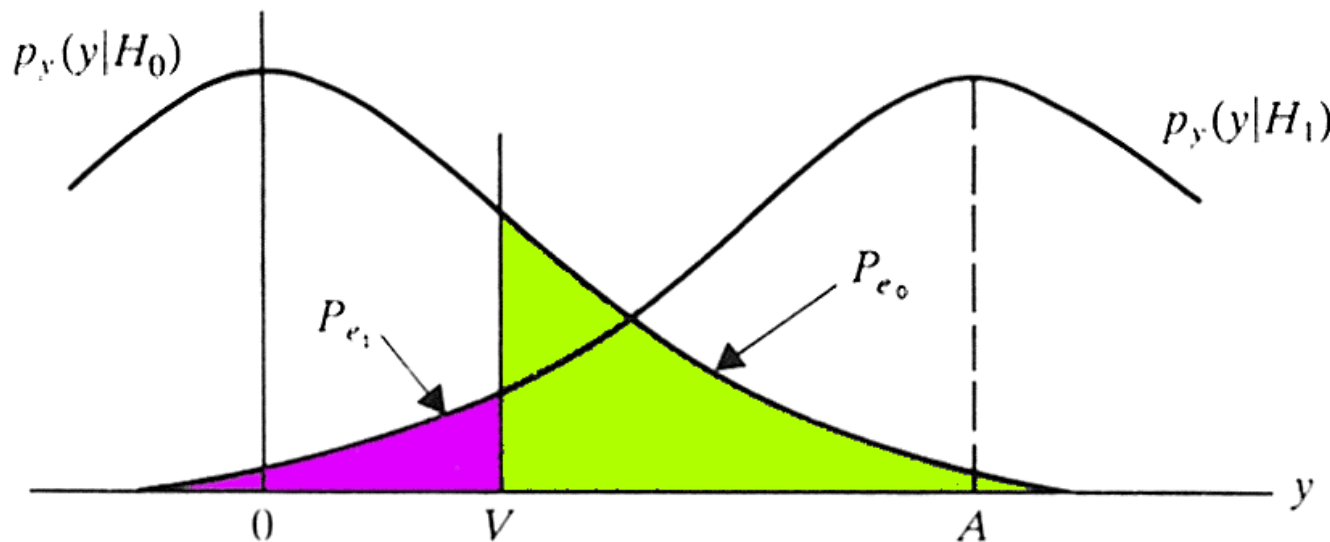


Πιθανότητα σφάλματος

- Εάν $Y < V$ επιλέγουμε την υπόθεση H_0 μετάδοσης $\alpha_k = 0$
- Εάν $Y > V$ επιλέγουμε την υπόθεση H_1 μετάδοσης $\alpha_k = A$
- Οι πιθανότητες σφάλματος είναι

$$P_{e0} \triangleq P\{Y > V \mid H_0\} = \int_V^{\infty} p_Y(y \mid H_0) dy$$

$$P_{e1} \triangleq P\{Y < V \mid H_1\} = \int_{-\infty}^V p_Y(y \mid H_1) dy$$





Πιθανότητα σφάλματος

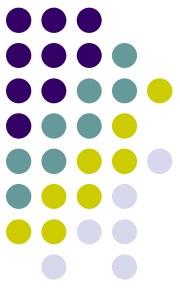
- Η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}$$

$$P_0 = P\{H_0\}$$

$$P_1 = P\{H_1\}$$

- όπου P_0 και P_1 είναι οι a priori πιθανότητες να γεννηθούν τα bit 0 και 1, αντίστοιχα, στην πηγή πληροφορίας



Βέλτιστο κατώφλι

- Το βέλτιστο κατώφλι V προκύπτει από την σχέση

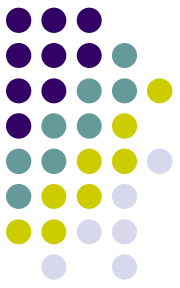
$$dP_e / dV = 0 \quad \Rightarrow \quad P_0 p_Y(V_{opt} | H_0) = P_1 p_Y(V_{opt} | H_1)$$

- Συνήθως αναμένουμε ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1, άρα

$$P_0 = P_1 = 1/2 \quad \Rightarrow \quad P_e = 1/2(P_{e0} + P_{e1}), \quad p_Y(V_{opt} | H_0) = p_Y(V_{opt} | H_1)$$

δηλαδή, το βέλτιστο κατώφλι V_{opt} βρίσκεται στην τομή των καμπυλών των υπό συνθήκη κατανομών πυκνότητας πιθανότητας

Πιθανότητα σφάλματος παρουσία λευκού θορύβου



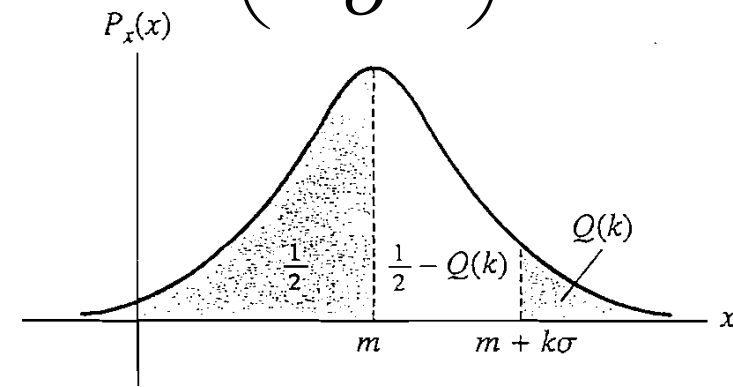
- Οι πιθανότητες σφάλματος για λευκό θόρυβο και κατώφλι V είναι

$$P_{e0} = \int_V^{\infty} p_N(y) dy$$

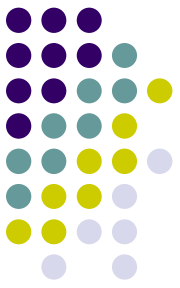
$$= \int_V^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

- παρομοίως $P_{e1} = \int_{-\infty}^V p_N(y - A) dy = Q\left(\frac{A - V}{\sigma}\right)$

όπου $Q(x)$ η συνάρτηση Q



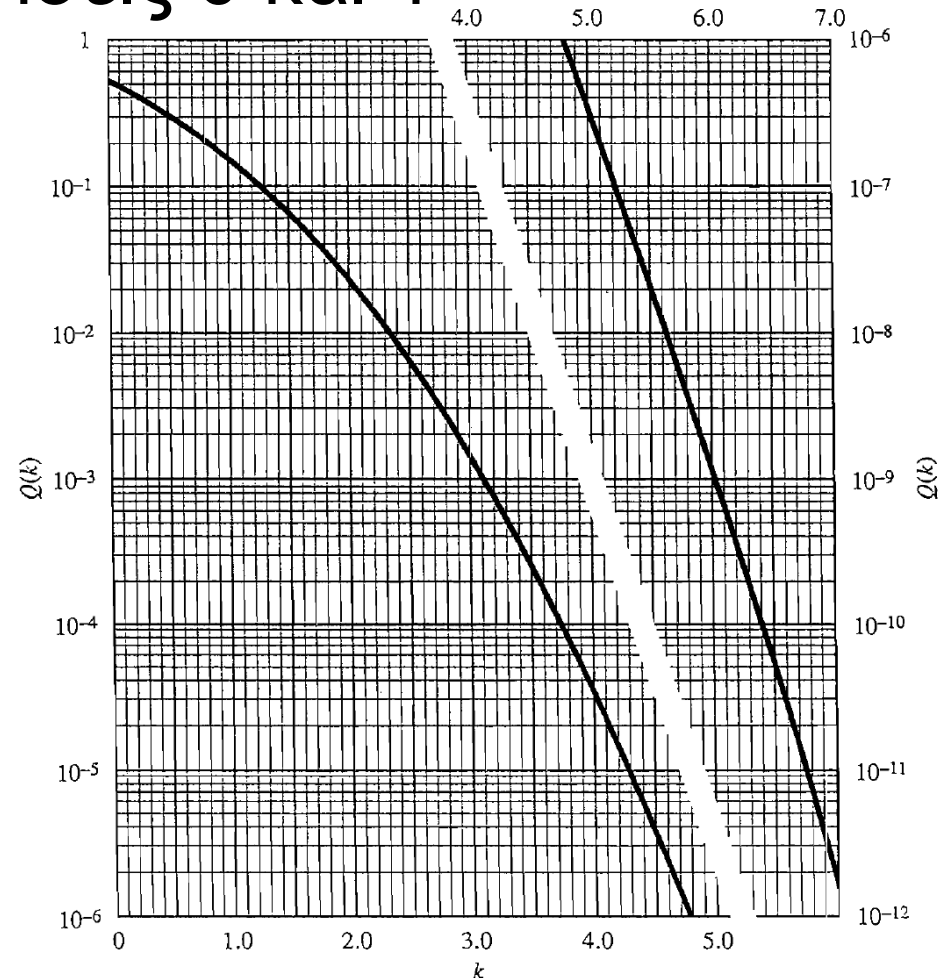
Πιθανότητα σφάλματος παρουσία λευκού θορύβου



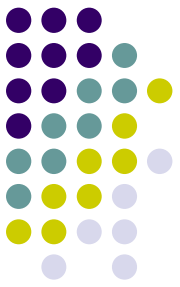
- Για ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1

$$V_{opt} = A/2$$

$$P_{e0} = P_{e1} = P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$



Πιθανότητα σφάλματος ως προς σηματοθορυβική σχέση



- Η επίδραση της σηματοθορυβικής σχέσης στην πιθανότητα σφάλματος εκδηλώνεται μέσω του πλάτους A των παλμών που με τη σειρά του εξαρτάται από το είδος σηματοδότησης
 - Για μονοπολική σηματοδότηση $S_R = A^2/2$
 - Για πολική σηματοδότηση $S_R = A^2/4$
- Άρα

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{A^2}{4N_R} = \begin{cases} SNR / 2 & \text{μονοπολική} \\ SNR & \text{πολική} \end{cases}$$

Πιθανότητα σφάλματος ως προς σηματοθορυβική σχέση



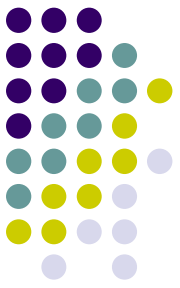
- Τελικά

$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{SNR/2}\right) & \text{μονοπολική} \\ Q\left(\sqrt{SNR}\right) & \text{πολική} \end{cases}$$

- Εναλλακτικά, εάν ορίσουμε τη μέση ενέργεια ανά bit $E_b \triangleq S_R / r_b$ η πιθανότητα λάθους είναι

$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{E_b / N_0}\right) & \text{μονοπολική} \\ Q\left(\sqrt{2E_b / N_0}\right) & \text{πολική} \end{cases}$$

Πιθανότητα σφάλματος για διπολική σηματοδότηση



- Για διπολική (bipolar) σηματοδότηση και ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1

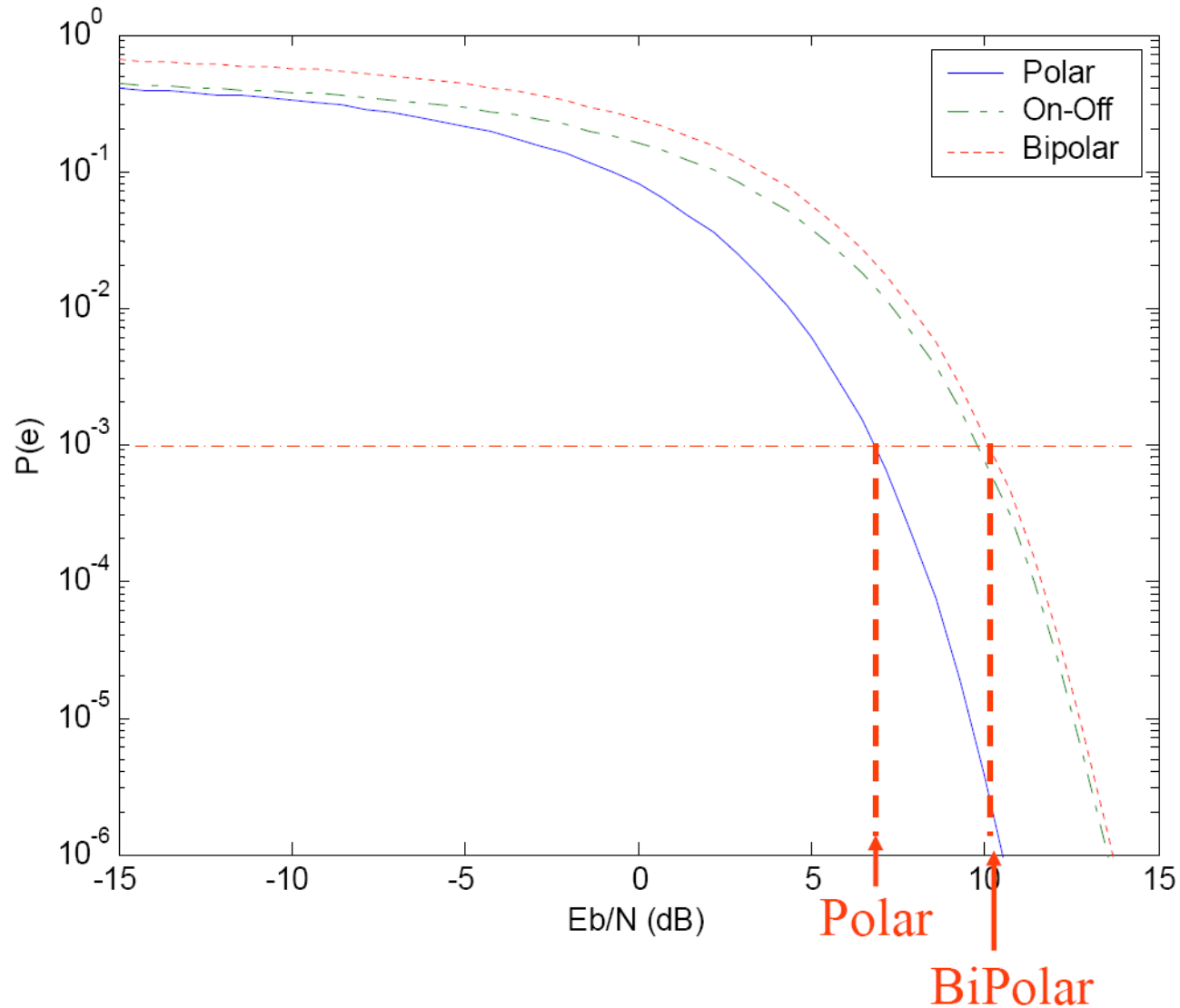
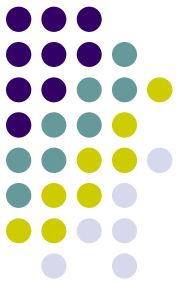
$$P_{e0} = \int_{A/2}^{\infty} p_N(y) dy + \int_{-\infty}^{-A/2} p_N(y) dy = 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$P_{e1+} = \int_{-\infty}^{A/2} p_N(y - A) dy = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

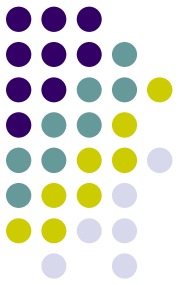
$$P_{e1-} = \int_{-A/2}^{\infty} p_N(y + A) dy = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

- και τελικά $P_e = 1.5Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$
 $= Q\left(\sqrt{SNR/2}\right) = Q\left(\sqrt{E_b/N_0}\right)$

Πιθανότητα σφάλματος



Πιθανότητα σφάλματος και ρυθμός σηματοδότησης

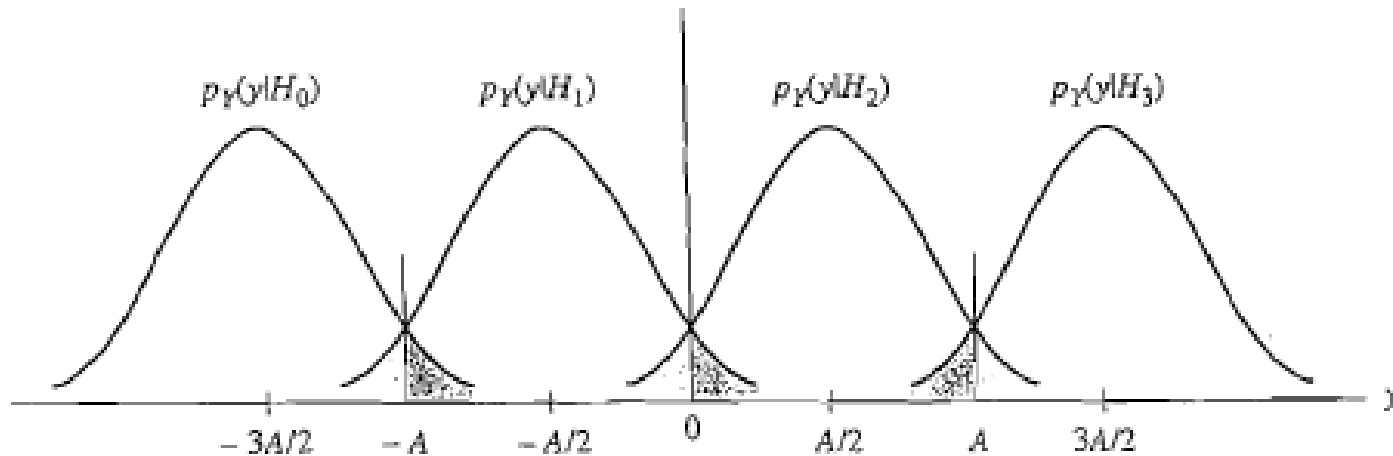


- Η επίδραση του ρυθμού σηματοδότησης r_b είναι κρυμμένη στην ισχύ του θορύβου $N_R = N_0 B \geq N_0 r_b / 2$
- Μεγαλύτεροι ρυθμοί σηματοδότησης απαιτούν μεγαλύτερη ισχύ σήματος για να διατηρήσουν την ίδια πιθανότητα λάθους!

Πιθανότητα σφάλματος για M -κη σηματοδότηση

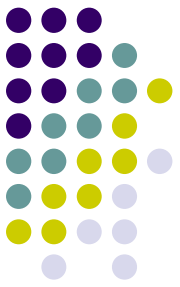


- Στη γενική περίπτωση M -κης σηματοδότησης με M άρτιο και ισοπίθανες εμφανίσεις των συμβόλων



$$P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q \left(\frac{A}{2\sigma} \right)$$

Ρυθμός λανθασμένων bit (BER)



- Η P_e αναφέρεται σε σύμβολα, όχι bit
- Εάν υποθέσουμε ότι η M -κη σηματοδότηση μεταφέρει δυαδικά μηνύματα, δηλαδή, $M=2^n$
$$r_b = r \log_2 M$$
η πιθανότητα λάθους bit (για κώδικα Gray και αρκετά μεγάλη σηματοθορυβική σχέση) είναι
$$P_{be} \approx P_e / \log_2 M$$
- Συνήθως αναφέρεται ως **Bit Error Rate (BER)**

BER ως προς σηματοθρουβική σχέση



- Για M -κη σηματοδότηση ισχύει

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \leq \frac{6}{M^2 - 1} \frac{S_R}{N_0 r_b} = \frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{S_R}{N_0 r_b}$$

όπου $S_R/N_0 r_b = E_b/N_0$ είναι λόγος της ενέργειας ανά bit μηνύματος προς θόρυβο

- και ο ρυθμός λανθασμένων bit προκύπτει από την

$$P_{be} \approx 2 \frac{M - 1}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$