Διαμόρφωση Παλμών

Pulse Modulation

Δειγματοληψία

Θεώρημα δειγματοληψίας

- Ένα βαθυπερατό σήμα πεπερασμένης ενέργειας που δεν περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες των *W* Hertz μπορεί να περιγραφθεί πλήρως από τις τιμές του σε χρονικές στιγμές ισαπέχουσες κατά *1/2W* sec
- Ένα βαθυπερατό σήμα πεπερασμένης ενέργειας που δεν περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες των *W* Hertz μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από δείγματά του που λαμβάνονται με ρυθμό *2W* ανά sec
- Nyquist 1928, Shannon 1949

Φάσμα σήματος μετά τη δειγματοληψία

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$x_\delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

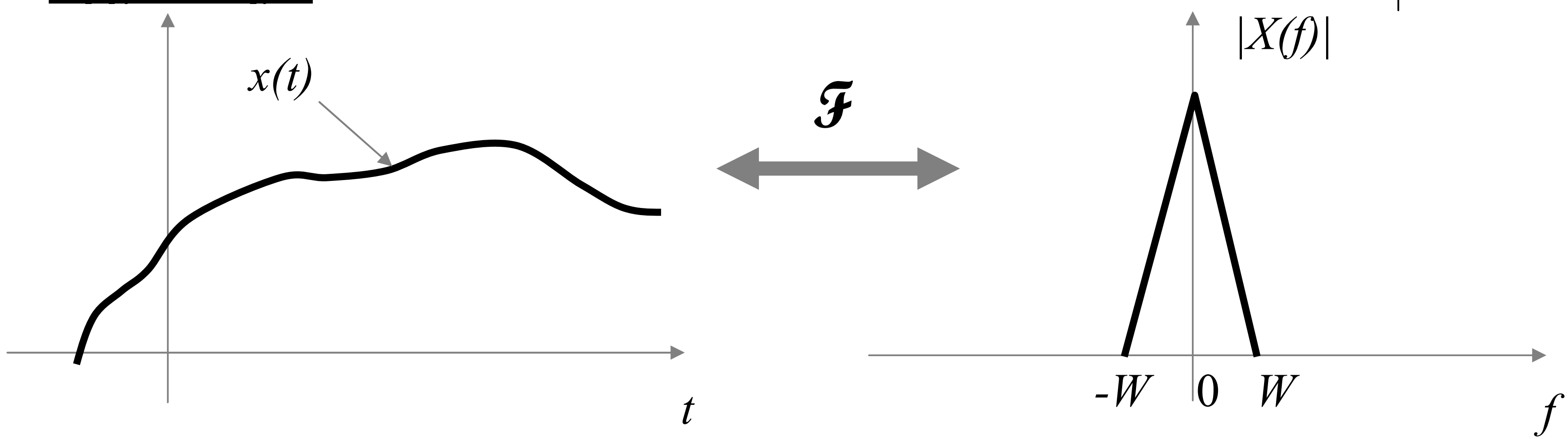
$$X_\delta(f) = X(f) \otimes \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) \otimes \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

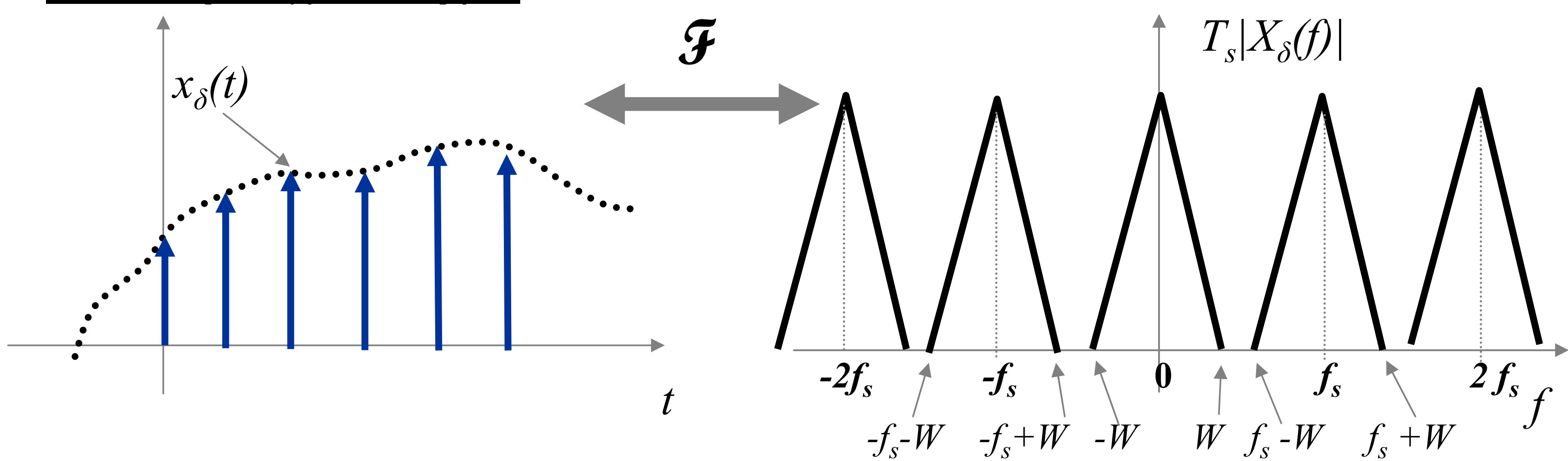
$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

Επίδραση δειγματοληψίας στο φάσμα

Αρχικό σήμα



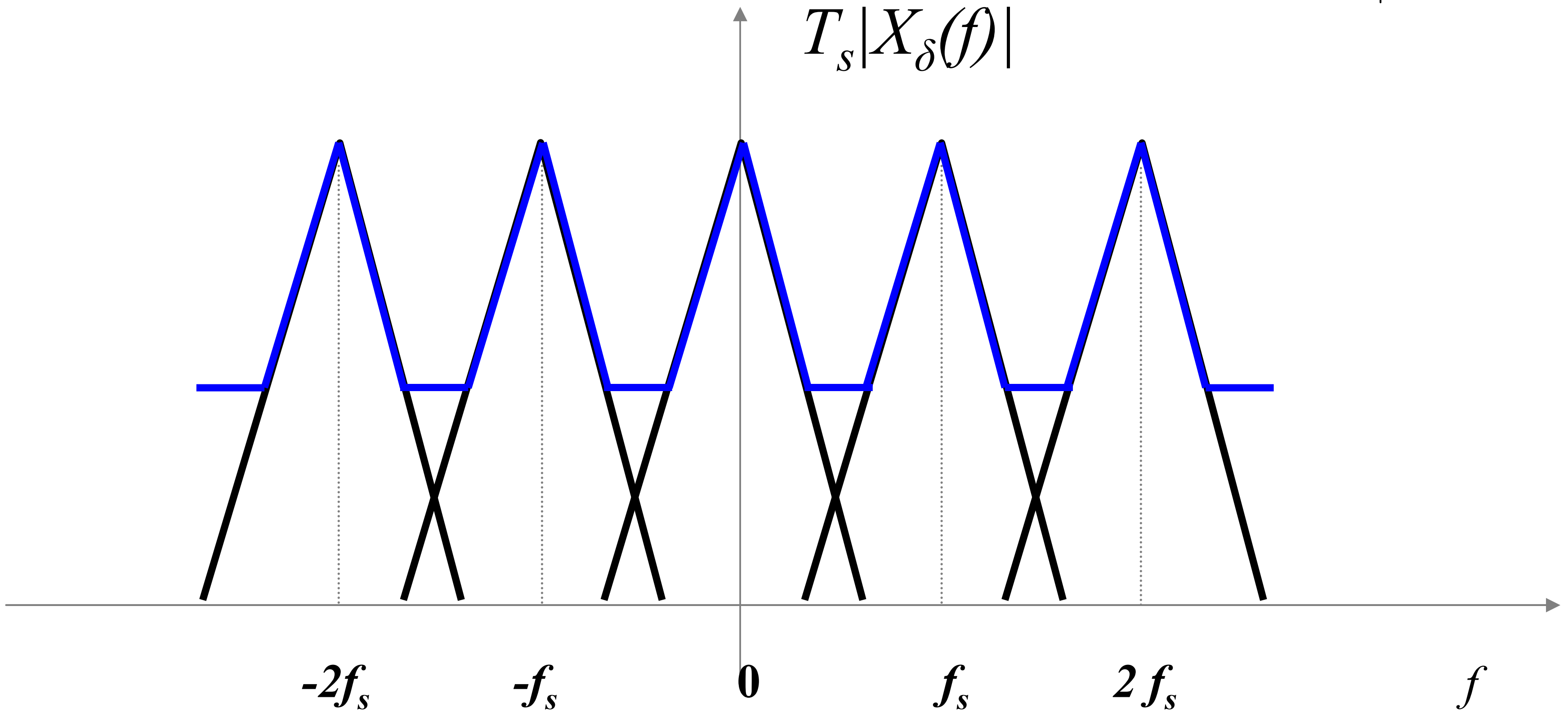
Μετά τη δειγματοληψία



Περιοδικότητα φάσματος

- Η δειγματοληψία αντιγράφει το φάσμα του αρχικού σήματος στα ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας nf_s
- Εάν η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s \geq 2W$, τότε το αρχικό σήμα μπορεί να ληφθεί με διάβαση μέσω βαθυπερατού φίλτρου
- Εάν $f_s < 2W$ εμφανίζεται παραλλαγή (aliasing), δηλαδή, αναδίπλωση του φάσματος

Παραλλαγή



Ανάκτηση του σήματος

- Τα δείγματα του σήματος αρκούν για την ανακατασκευή του
  - Είναι οι συντελεστές Fourier του περιοδικού φάσματος

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) \Rightarrow$$

$$X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\exp(-j2\pi nfT_s) \Rightarrow$$

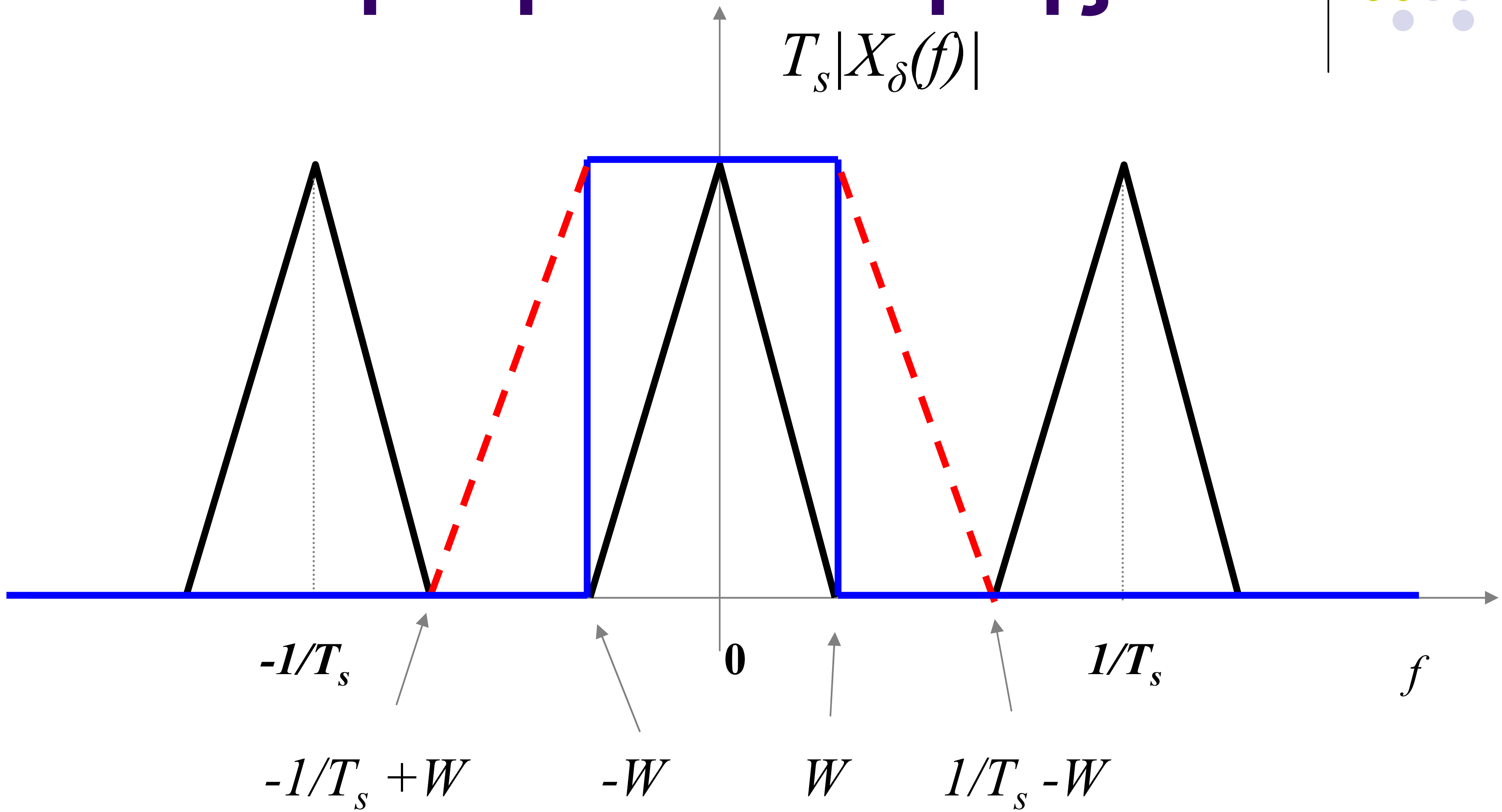
$$x(nT_s) = T_s\int_0^{1/T_s} X_\delta(f)\exp(jn2\pi fT_s)df$$

Ανάκτηση του σήματος

- Εάν $T_s \leq 1/2W$ το αρχικό σήμα είναι η έξοδος οποιουδήποτε βαθυπερατού φίλτρου, όπου

$$H(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq W \\ 0 & |f| \geq \dfrac{1}{T_s} - W \\ ? & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ιδανικό φίλτρο ανάκτησης



- Απαιτείται ζώνη ασφάλειας (guard band)

Ανάκτηση του σήματος

- Έστω βαθυπερατό φίλτρο ανάκτησης εύρους ζώνης B, όπου $W \le B \le f_s - W$ τότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\exp(j2\pi ft)df = \int_{-B}^{B} T_s X_\delta(f)\exp(j2\pi ft)df$$

$$= T_s \int_{-B}^{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\exp(-j2\pi nfT_s)\exp(j2\pi ft)df$$

$$= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\int_{-B}^{B} \exp\left[j2\pi f\left(t - nT_s\right)\right]df$$

$$= 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left[2B\left(t - nT_s\right)\right]$$

Ανάκτηση του σήματος

- Για το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο ανάκτησης εύρους ζώνης W και $T_s = 1/2W$

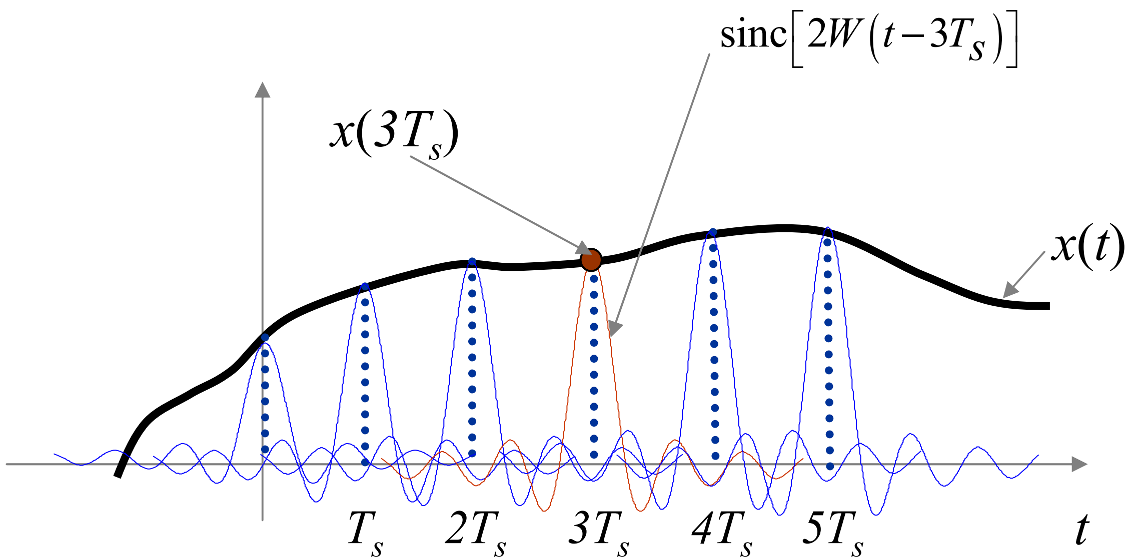
$$x(t) = 2WT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\mathrm{sinc}\left[2W\left(t - nT_s\right)\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\mathrm{sinc}\left(f_s t - n\right)$$

Τι σημαίνει αυτό;

- Μπορούμε να λάβουμε το αρχικό σήμα χωρίς λάθη αθροίζοντας καθυστερημένες εκδοχές συναρτήσεων sinc με βάρη τα δείγματα



Πρακτικά θέματα δειγματοληψίας

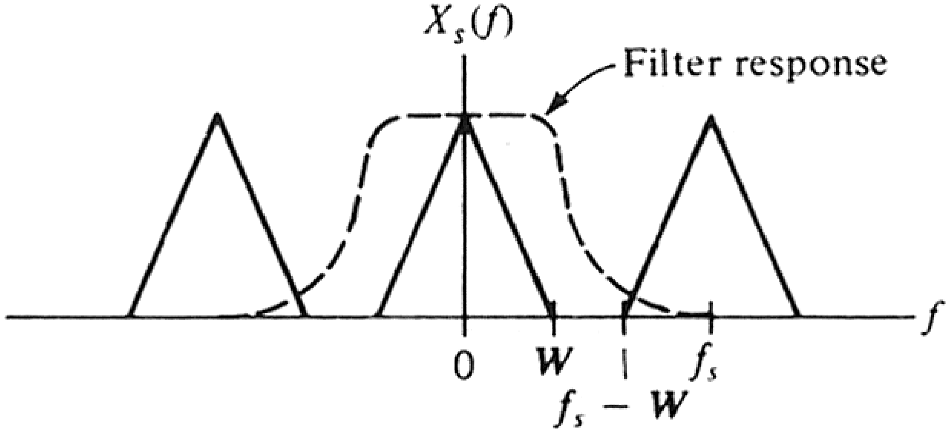
- Η συνάρτηση δειγματοληψίας αποτελείται από παλμούς πεπερασμένου πλάτους και διάρκειας αντί κρουστικές συναρτήσεις
  - Οδηγεί σε ποικίλα συστήματα διαμόρφωσης
- Το σήμα είναι χρονικά πεπερασμένο, άρα το φάσμα του δεν μπορεί να είναι βαθυπερατό
- Το φίλτρο ανάκτησης δεν είναι ιδανικό

Μη ιδανικοί παλμοί δειγματοληψίας

- Η μορφή των παλμών δειγματοληψίας δεν επηρεάζει τη διαδικασία υπό την προϋπόθεση ότι το διαμορφωμένο σήμα προκύπτει ως γινόμενο του σήματος πληροφορίας με περιοδική συνάρτηση τραίνου παλμών
  - Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι η δειγματοληψία με παλμούς επίπεδης κορυφής (flat-top sampling) → διαμόρφωση PAM πιο κάτω
- Για την αναπαραγωγή μπορεί να απαιτηθεί ισοστάθμιση (equalization)

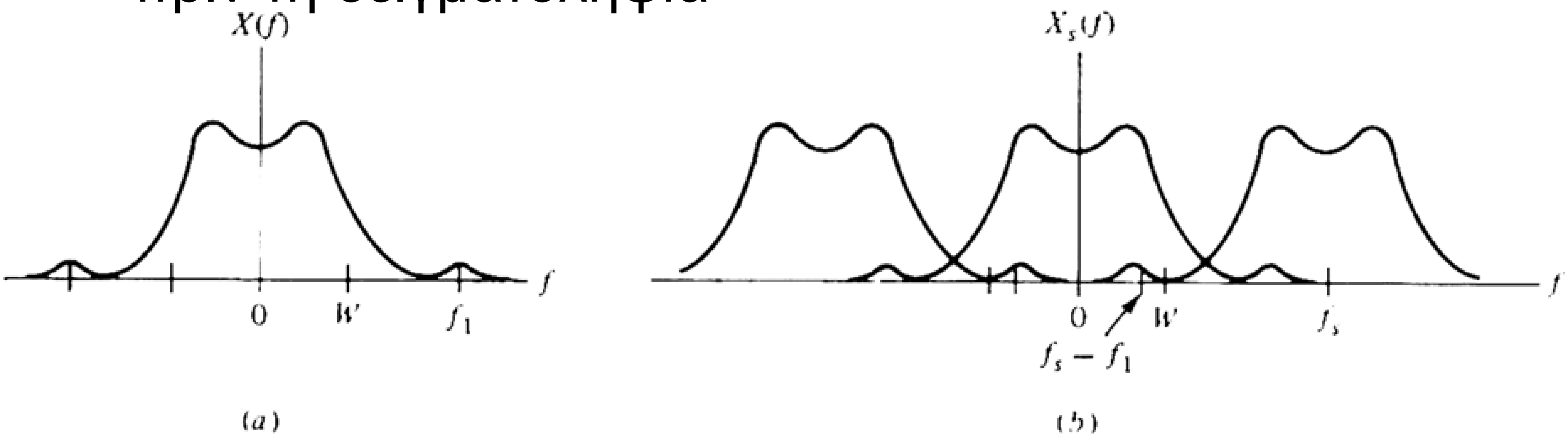
Μη ιδανικό φίλτρο ανάκτησης

- Οι ανεπιθύμητες συχνότητες που περνούν από το φίλτρο εμφανίζονται ως υψίσυχνος θόρυβος

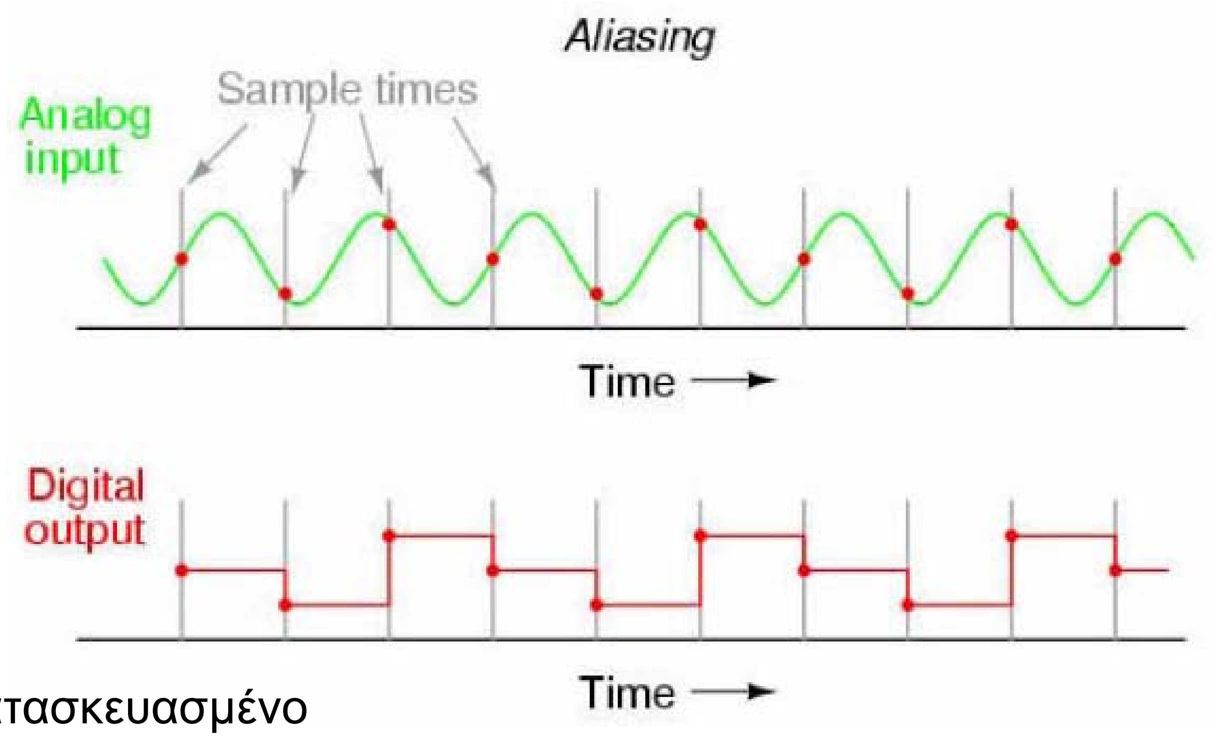


Χρονικά πεπερασμένο σήμα

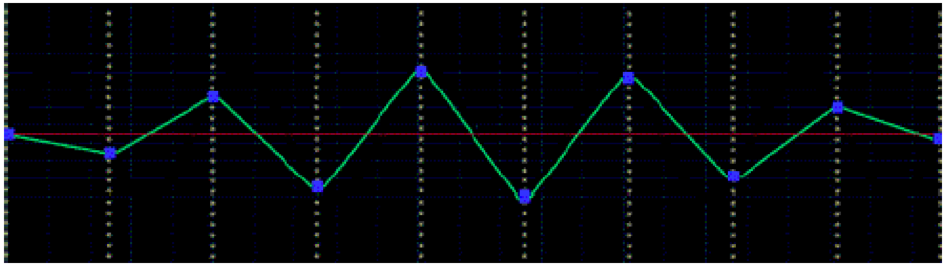
- Οδηγεί σε παραλλαγή (aliasing), δηλαδή, αναδίπλωση του φάσματος
- Υψηλές συχνότητες εμφανίζονται ως χαμηλότερες συχνότητες εντός του φάσματος του σήματος πληροφορίας
- Ανάγκη για φίλτρο αντι-παραλλαγής (anti-aliasing) πριν τη δειγματοληψία



Παραλλαγή



Ανακατασκευασμένο σήμα

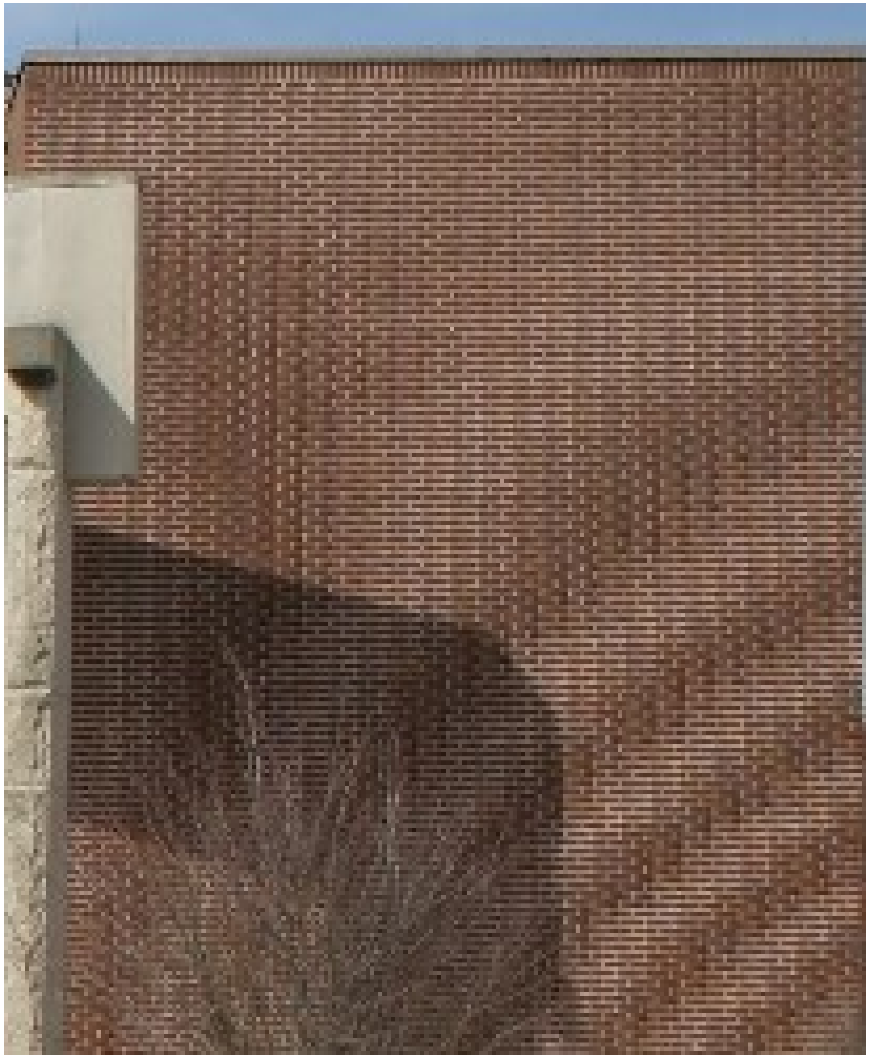


Παραλλαγή

- Στη δειγματοληψία σημάτων μουσικής και βίντεο το φαινόμενο της παραλλαγής πρέπει να αποφευχθεί
  - Εάν το μουσικό τμήμα περιέχει υψηλές συχνότητες που δεν γίνονται ακουστές, μετά τη δειγματοληψία αυτές θα ακουστούν ως χαμηλές συχνότητες
  - Στο βίντεο ή κινηματογράφο εμφανίζεται ως το φαινόμενο της αργά ή αντίστροφα κινούμενης ρόδας

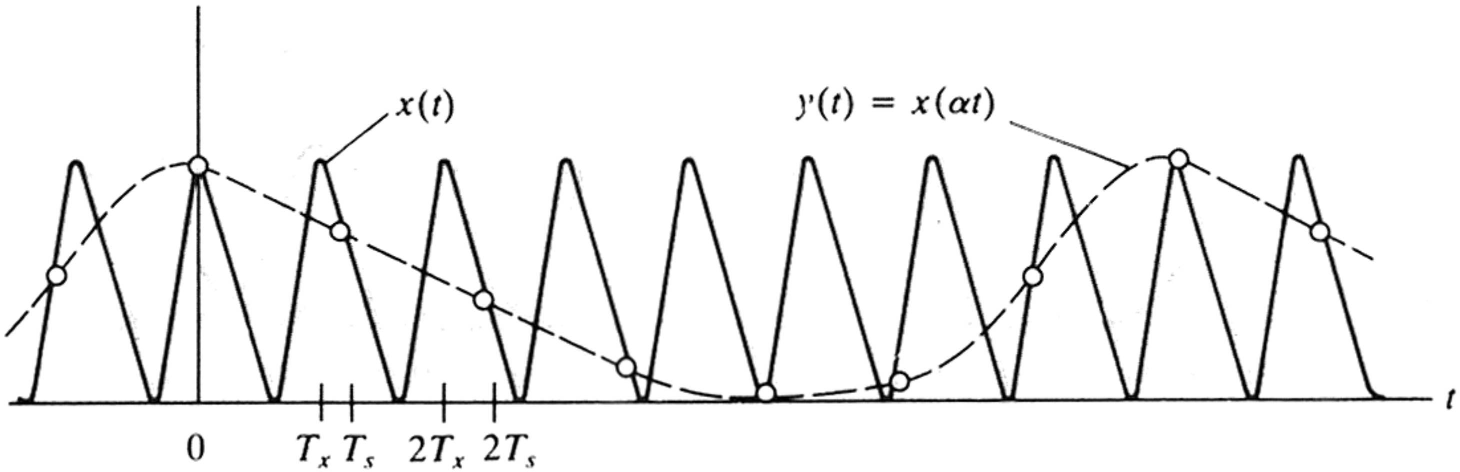
Παραλλαγή

- Τα προηγούμενα παραδείγματα αφορούν τη χρονική εκδοχή της παραλλαγής
- Στη χωρική εκδοχή της εμφανίζεται στις ψηφιακές φωτογραφίες και είναι γνωστή ως μορφές Moiré
  - Ανάγκη για φίλτρο αντι-παραλλαγής (anti-aliasing)



Παλμογράφος δειγματοληψίας

- Μια πρακτική χρήση της αναδίπλωσης (aliasing)
- Χρήση μικρής συχνότητας δειγματοληψίας f_s για παρατήρηση σημάτων μεγάλης συχνότητας f_x

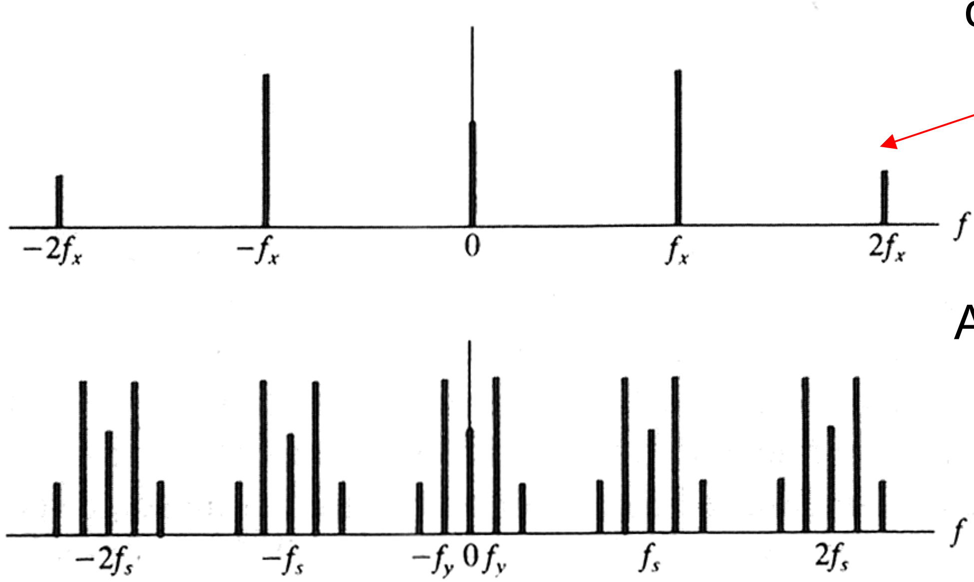


όπου f_s=(1-α)f_x, 0<α<1

Παλμογράφος δειγματοληψίας

- Η δειγματοληψία μετακινεί το φάσμα του αρχικού σήματος αριστερά και δεξιά κατά nf_s σε που απέχουν $f_y=|f_x-f_s|=\pm\alpha f_s$ από τις αρμονικές της συχνότητας δειγματοληψίας

Κρατάμε τις m αρμονικές, εδώ $m=2$



Αρκεί $a<1/(2m+1)$ για να μην έχουμε επικάλυψη

- Βαθυπερατό φίλτρο ανακτά το $y(t)=x(\alpha t)$

Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων

- Ζωνοπερατό σήμα εύρους ζώνης *W* με συχνότητες στην περιοχή από f_L έως f_H ($0<f_L<f_H$, $W= f_H-f_L$) μπορεί να ανακτηθεί από δείγματα που λαμβάνονται με ρυθμό

$$\frac{2f_{\mathrm{H}}}{n+1} < f_s < \frac{2f_L}{n}$$

- όπου *n* =0,1,… ακέραιος τέτοιος ώστε $n < \frac{f_L}{W}$

- και το φίλτρο ανάκτησης έχει κρουστική απόκριση

$$(n+1)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(n+1)t}{T_s}\right) - n\,\mathrm{sinc}\left(\frac{nt}{T_s}\right)$$

Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων

- Παράδειγμα, στη ραδιοφωνία FM έχουμε $f_L = 88$ MHz, $f_H = 108$ MHz, $W = 20$ MHz, οπότε

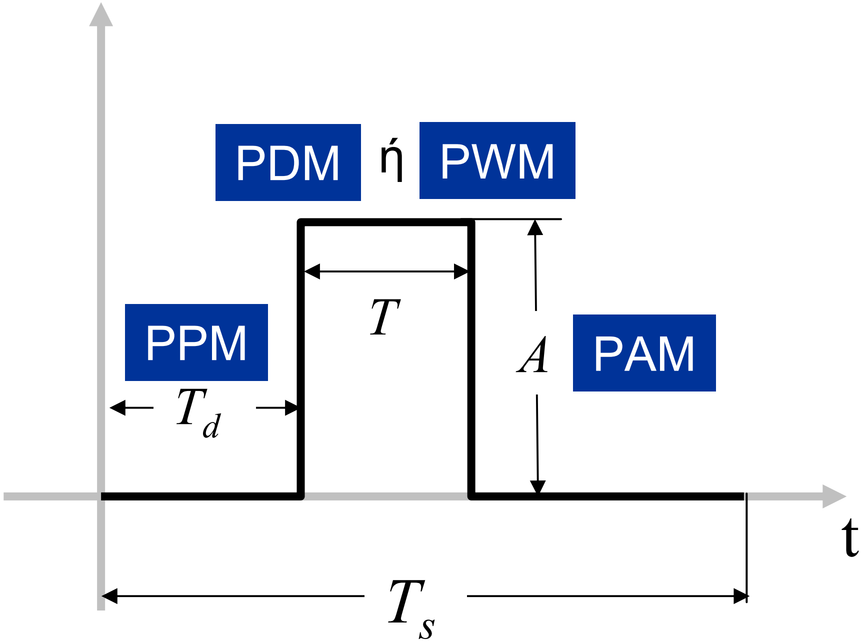
$$n < 4,4 = \frac{88}{20}$$

- Για n=4, 43,2 MHz < f_s < 44 MHz
- Για n=3, 54 MHz < f_s < 58,67 MHz
- Για n=2, 72 MHz < f_s < 88 MHz
- Για n=1, 108 MHz < f_s < 176 MHz
- Για n=0, 216 MHz < f_s (ρυθμός Nyquist)

Συστήματα διαμόρφωσης παλμών

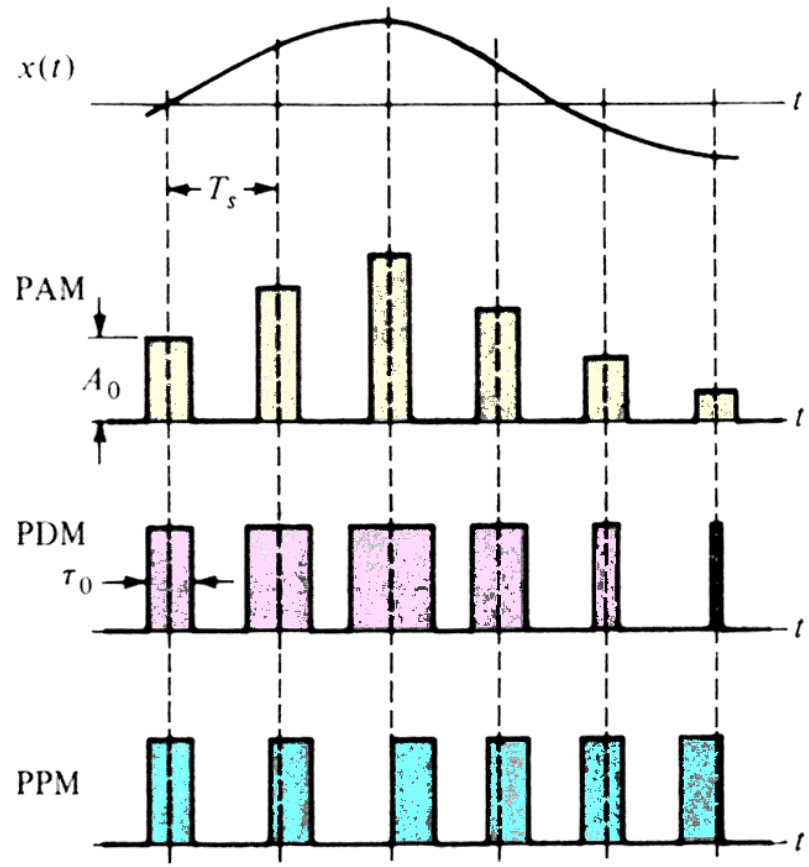
Είδη διαμόρφωσης παλμών

- Pulse Amplitude Modulation (PAM): $A \propto m(t)$
- Pulse Position Modulation (PPM): $T_d \propto m(t)$
- Pulse Duration Modulation (PDM) ή Pulse Width Modulation (PWM): $T \propto m(t)$

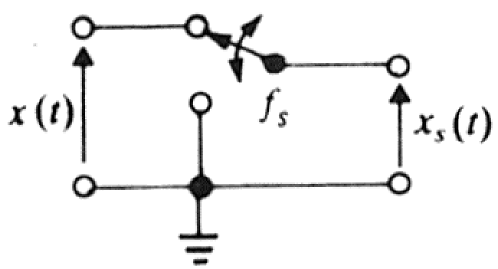


Διαμόρφωση παλμών

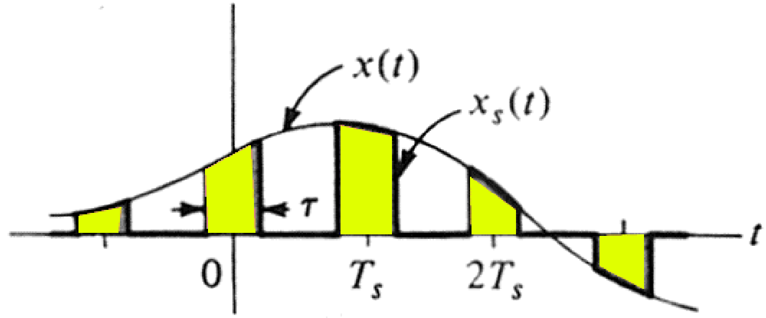
- Η διαμόρφωση πλάτους παλμών (PAM) παράγεται από τεμαχιστή (chopper)
- Συχνά όμως χρησιμοποιείται κύκλωμα sample-and-hold με αποτέλεσμα παλμούς επίπεδης κορυφής



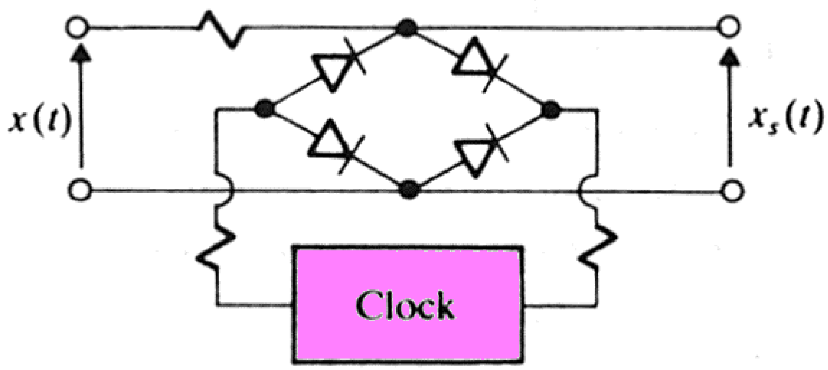
Τεμαχιστής (chopper)



(a)



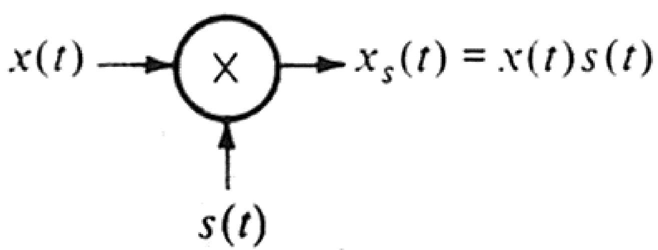
(b)

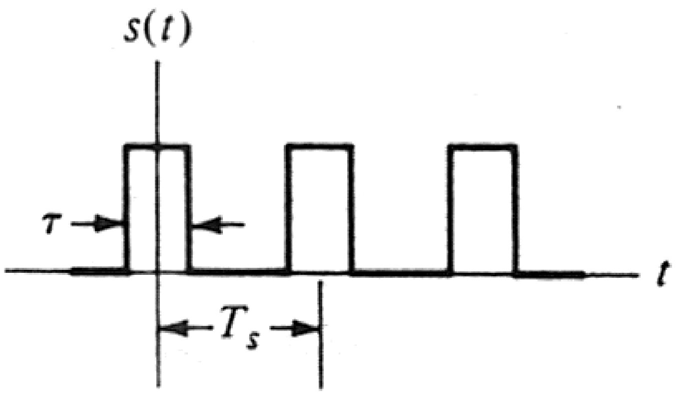


(c)

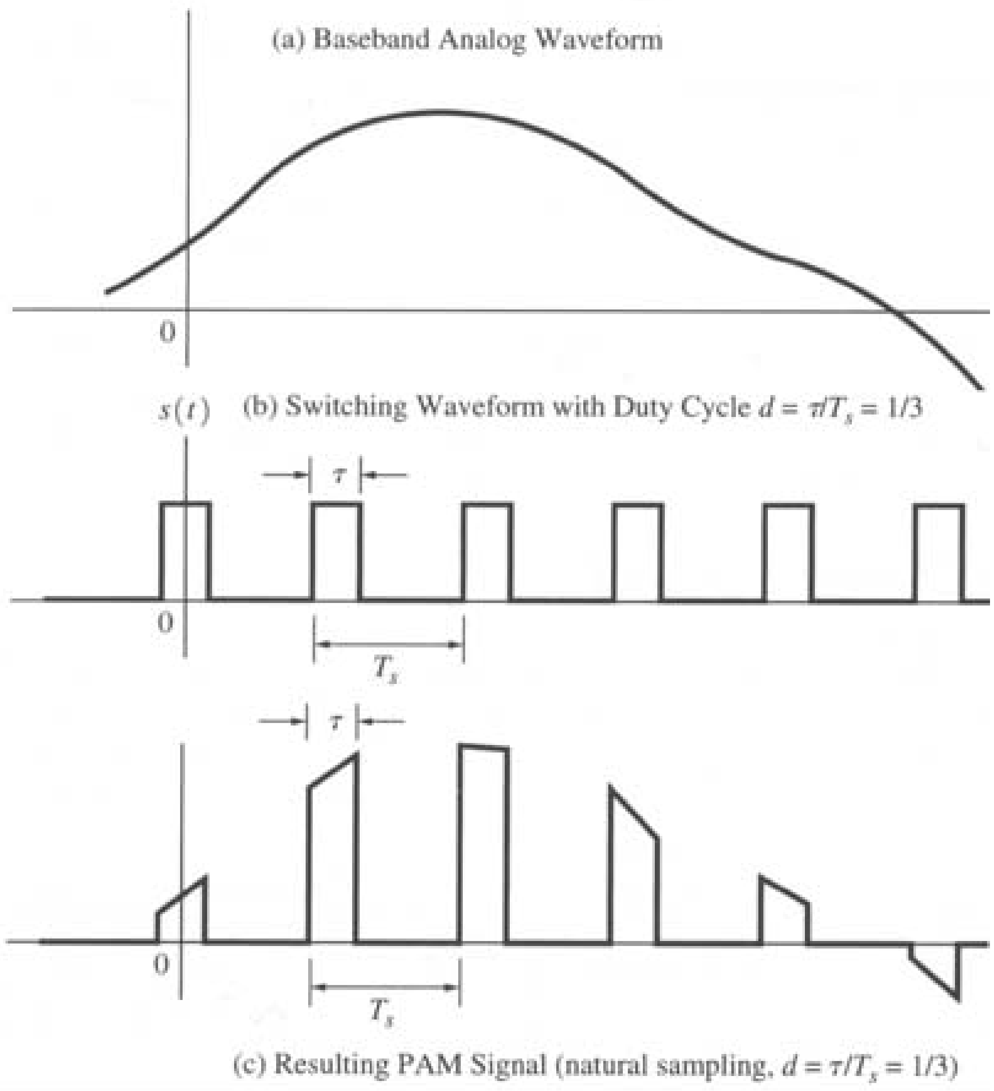
Παραγωγή PAM

- Το διαμορφωμένο σήμα PAM (φυσική δειγματοληψία) είναι το γινόμενο του σήματος επί τη συνάρτηση δειγματοληψίας (σειρά παλμών)





Παραγωγή PAM (φυσική δειγματοληψία)



Φάσμα PAM

- Εάν το σήμα είναι βαθυπερατό, τότε μπορεί να ανακτηθεί από το διαμορφωμένο σήμα PAM

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

$$s(t) = \tau f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(nf_s\tau)\exp(jn2\pi f_s t) \Rightarrow$$

$$x_s(t) = \tau f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(nf_s\tau)\exp(jn2\pi f_s t)x(t) \Rightarrow$$

$$X_s(f) = \tau f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(nf_s\tau)X(f - nf_s)$$

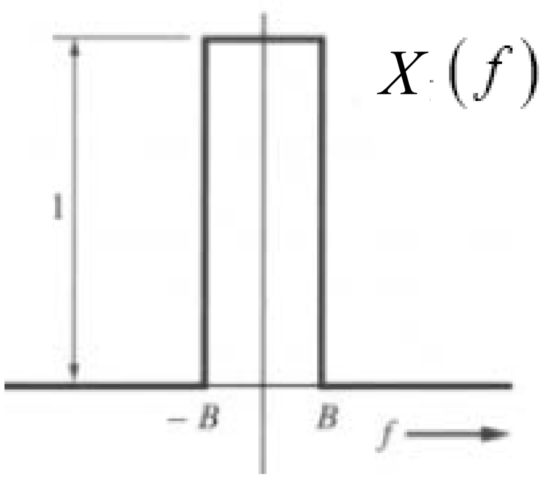
Φάσμα PAM

- Το αποτέλεσμα της πεπερασμένης διάρκειας παλμού είναι ο πολλαπλασιασμός του *n*-στου λοβού με $d\,\mathrm{sinc}(nd)$
- όπου η σταθερά *d* είναι ο κύκλος εργασίας (duty cycle) του παλμού

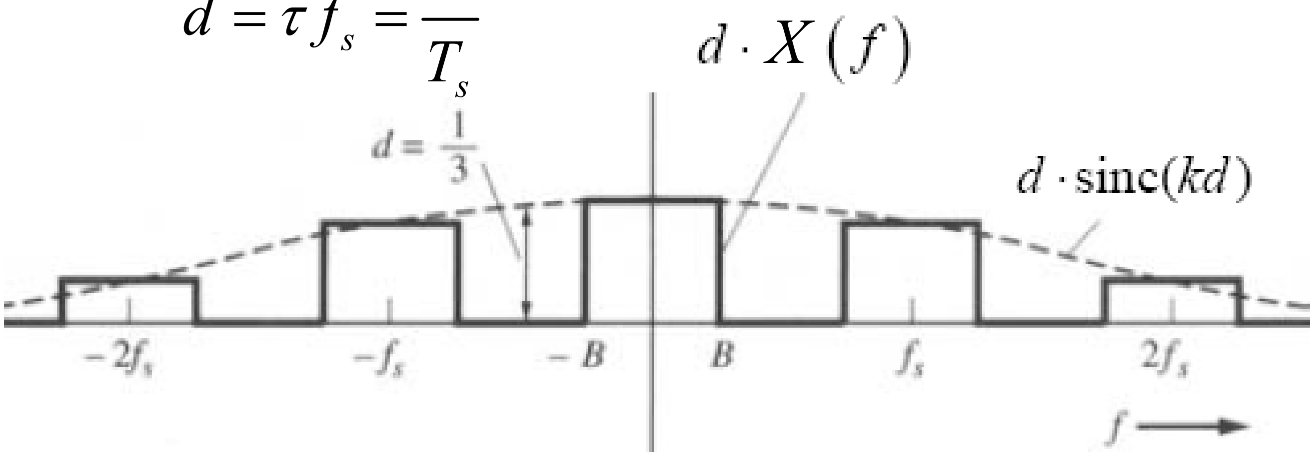
$$d = \tau f_s = \frac{\tau}{T_s}$$

Φάσμα PAM

- Ο πρώτος όρος είναι το φάσμα του σήματος, πολλαπλασιασμένο με d, άρα με διάβαση από βαθυπερατό φίλτρο ανακτάμε το σήμα

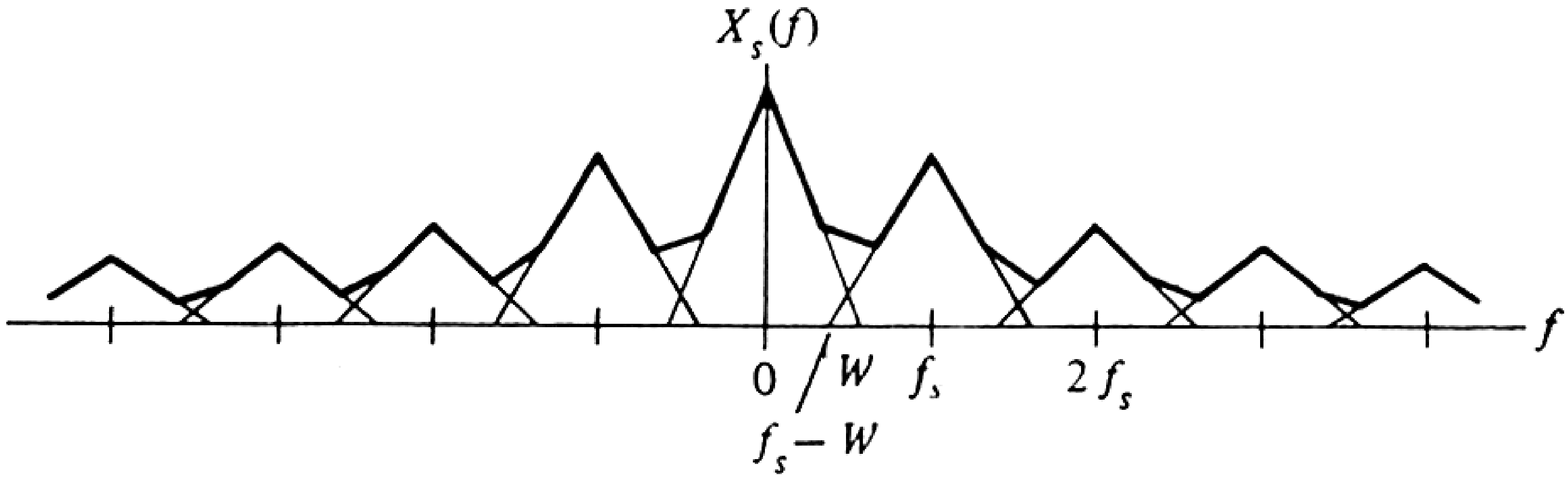


$$d = \tau f_s = \frac{\tau}{T_s}$$



Ανάκτηση σήματος

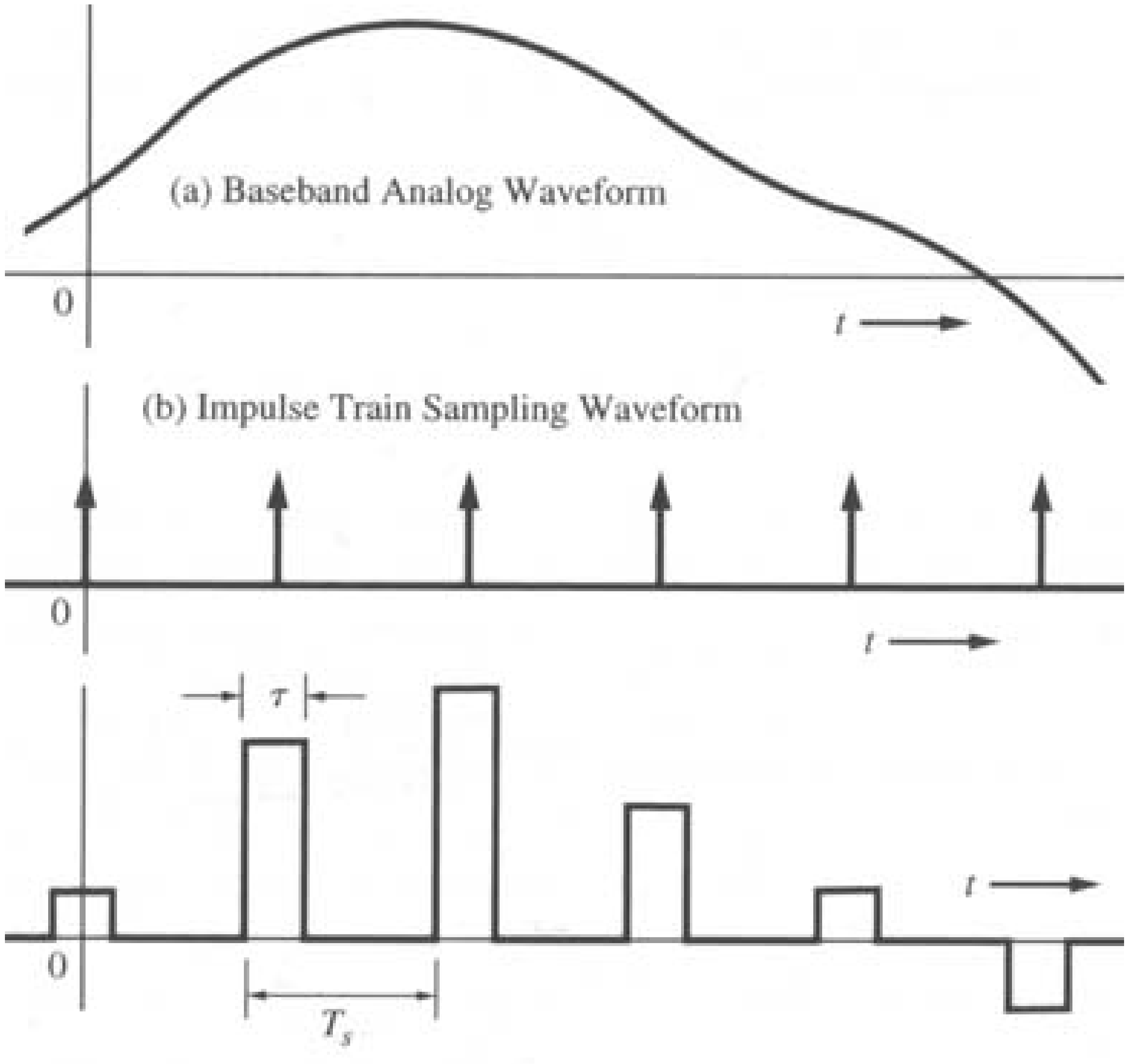
- Εάν $T_s \leq 1/2W$ μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα με χρήση κατάλληλου φίλτρου
- Αλλιώς εμφανίζεται παραλλαγή



Δείγματα με επίπεδη κορυφή

- Παρότι το σήμα PAM μπορεί να ληφθεί με τεμαχιστή, η πιο δημοφιλής μέθοδος χρησιμοποιεί την τεχνική sample-and-hold (S/H) που οδηγεί σε δείγματα με επίπεδη κορυφή (flat top sampling)

Παραγωγή δειγμάτων με επίπεδη κορυφή (στιγμιαία δειγματοληψία)



(c) Resulting PAM Signal (flat-top sampling, $d = \tau / T_s = 1/3$)

PAM και δείγματα με επίπεδη κορυφή

$$x_p(t) = \sum_n x(nT_s)p(t - nT_s)$$

$$x_p(t) = p(t) \otimes \left[\sum_n x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right]$$

$$x_p(t) = p(t) \otimes x_\delta(t) \Rightarrow$$

$$X_p(f) = P(f)X_\delta(f)$$

Φάσμα PAM με δείγματα επίπεδης κορυφής

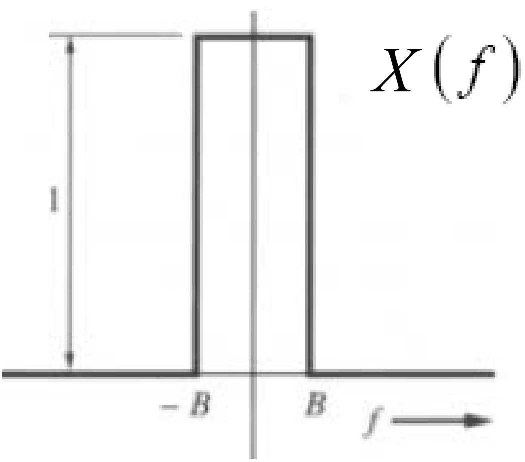
- Το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας με δείγματα επίπεδης κορυφής ισοδυναμεί με τη διάβαση του ιδανικού σήματος δειγματοληψίας μέσω φίλτρου $P(f)$
- Το $P(f)$ δρα ως βαθυπερατό φίλτρο που εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες του σήματος πληροφορίας
  - Φαινόμενο ανοίγματος (aperture effect)

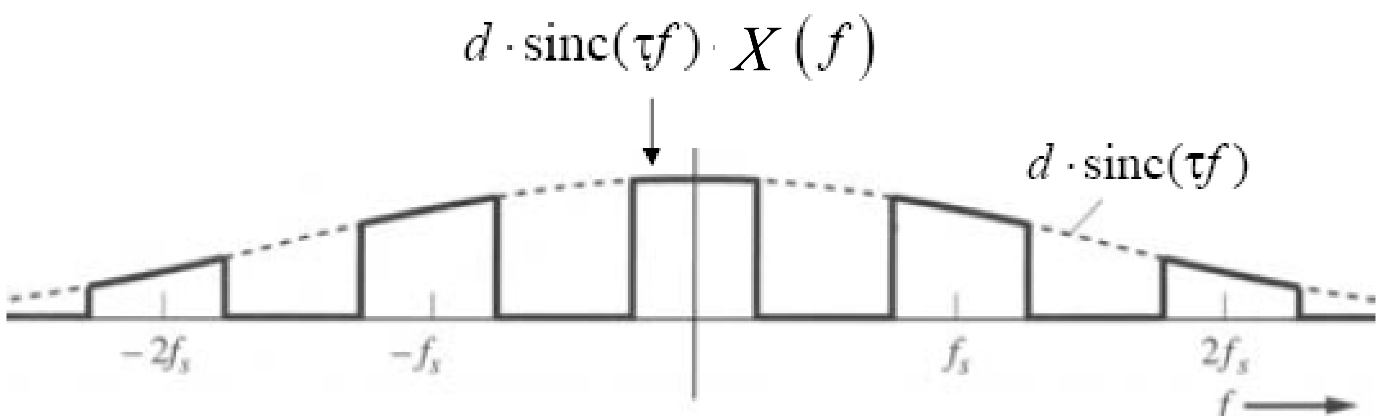
Ανάκτηση σήματος PAM με δείγματα επίπεδης κορυφής

- Το φαινόμενο ανοίγματος μπορεί να διορθωθεί με εξισωτή (equalizer)

$$H_{eq}(f) = K\exp(-j2\pi f\tau_d)/P(f)$$

- Εάν ο κύκλος εργασίας είναι μικρός $d = \tau/T_s \ll 1$ δεν απαιτείται σχεδόν καθόλου ισοστάθμιση





Εύρος ζώνης για μετάδοση PAM

- Το φάσμα της PAM περιλαμβάνει πολλές αρμονικές της συχνότητας δειγματοληψίας
- Για τον υπολογισμό του εύρους ζώνης πρέπει να ληφθεί υπόψη η συμπεριφορά των παλμών στο πεδίο του χρόνου
- Υποθέτοντας μικρή χρονική διάρκεια παλμών σε σχέση με την περίοδο δειγματοληψίας

$$\tau \ll T_s \leq \frac{1}{2W}$$

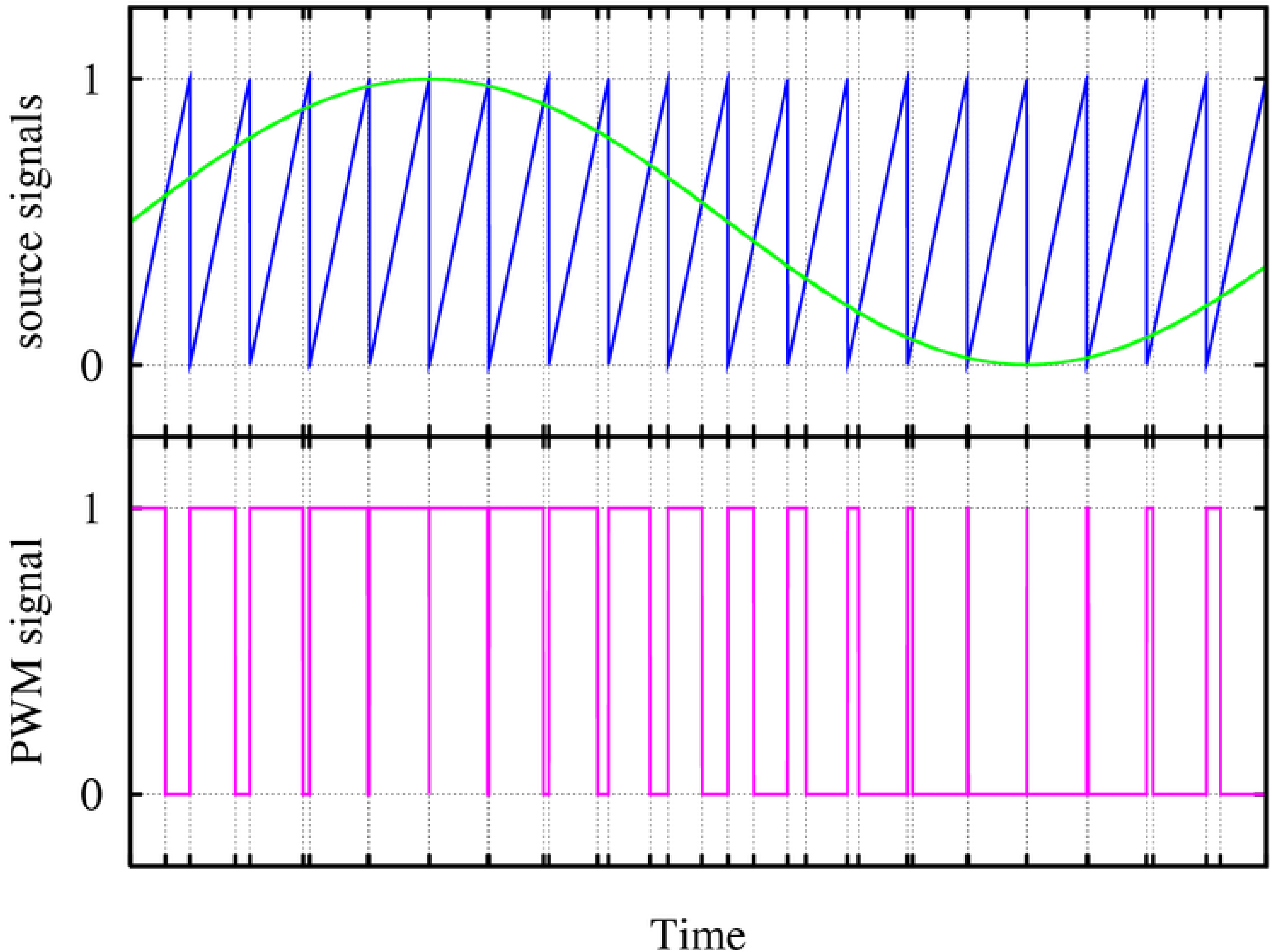
$$B_T \geq \frac{1}{2\tau} \gg W$$

Σήματα PDM και PPM

Παραγωγή σημάτων PDM

- Ο απλούστερος τρόπος παραγωγής βασίζεται στην παρατήρηση ότι το πλάτος του παλμού μπορεί να προκύψει από τη σύγκριση της τιμής το σήματος και αυτής μιας τριγωνικής κυματομορφής

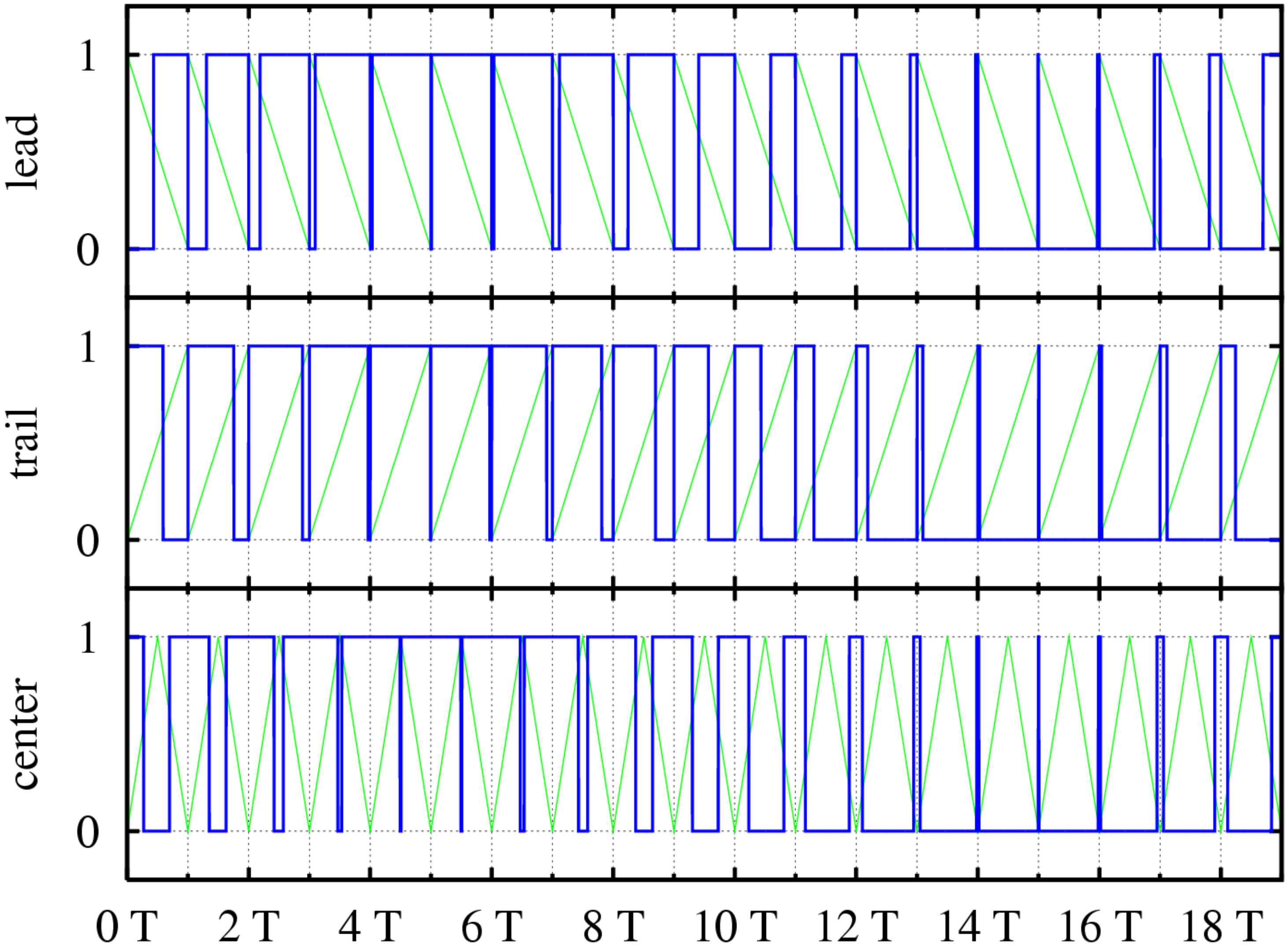
Σήμα PDM



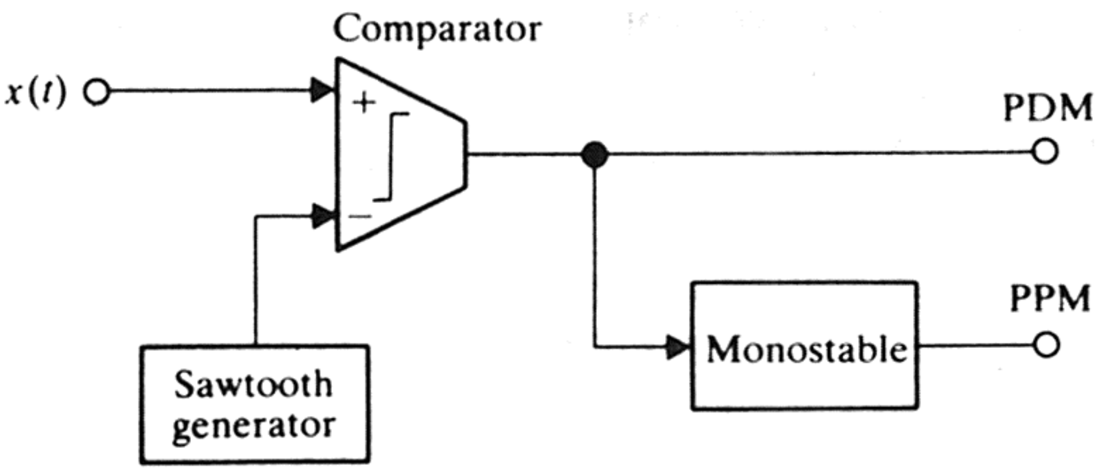
Παραγωγή σημάτων PDM

- Διάφορες παραλλαγές είναι δυνατές:
  - Η αρχή του παλμού είναι σταθερή και μεταβάλλεται το τέλος
  - Το τέλος του παλμού είναι σταθερό και μεταβάλλεται η αρχή
  - Το κέντρο του παλμού είναι σταθερό και μεταβάλλονται αμφότερες οι πλευρές

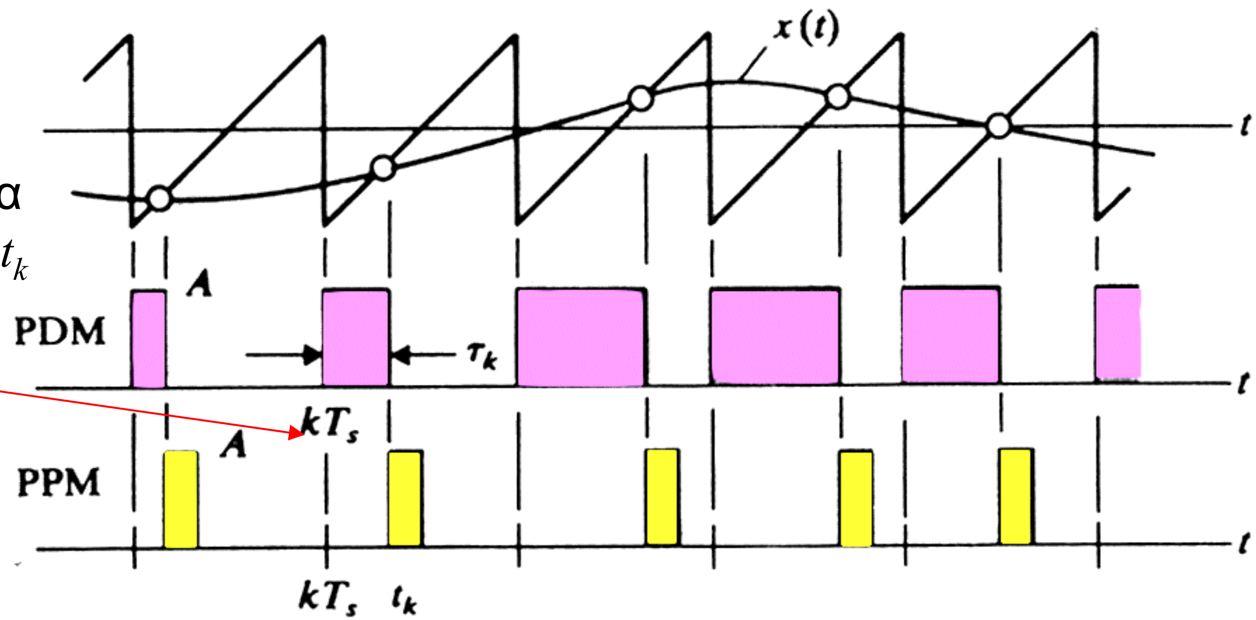
Παραλλαγές σημάτων PDM



Διαμορφωτής PDM και PPM



Μη ομοιόμορφη δειγματοληψία → Τα δείγματα εξαρτώνται από την τιμή στα t_k αντί στα kT_s



Αποδιαμόρφωση PDM

- Η διάρκεια του k-στου παλμού είναι $\tau_k = \tau_0\left[1+\mu x(kT_s)\right]$ όπου τ_0 είναι η διάρκεια όταν το σήμα είναι μηδέν
- Υποθέτοντας παλμούς μοναδιαίου πλάτους κεντραρισμένους στο kT_s και ότι η τιμή του τ_k αλλάζει αργά από παλμό σε παλμό, αναλύοντας σε Fourier

$$x_s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \cos(2\pi n f_s t)$$

$$c_n = \tau f_s \operatorname{sinc}(n f_s \tau)$$

$$\tau = \tau_0\left[1+\mu x(t)\right]$$

$$x_s(t) = \tau f_s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin(\pi n f_s \tau)\cos(2\pi n f_s t)$$

Αποδιαμόρφωση PDM

- Οπότε

$$x_s(t) = \tau f_s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin(\pi n f_s \tau) \cos(2\pi n f_s t)$$

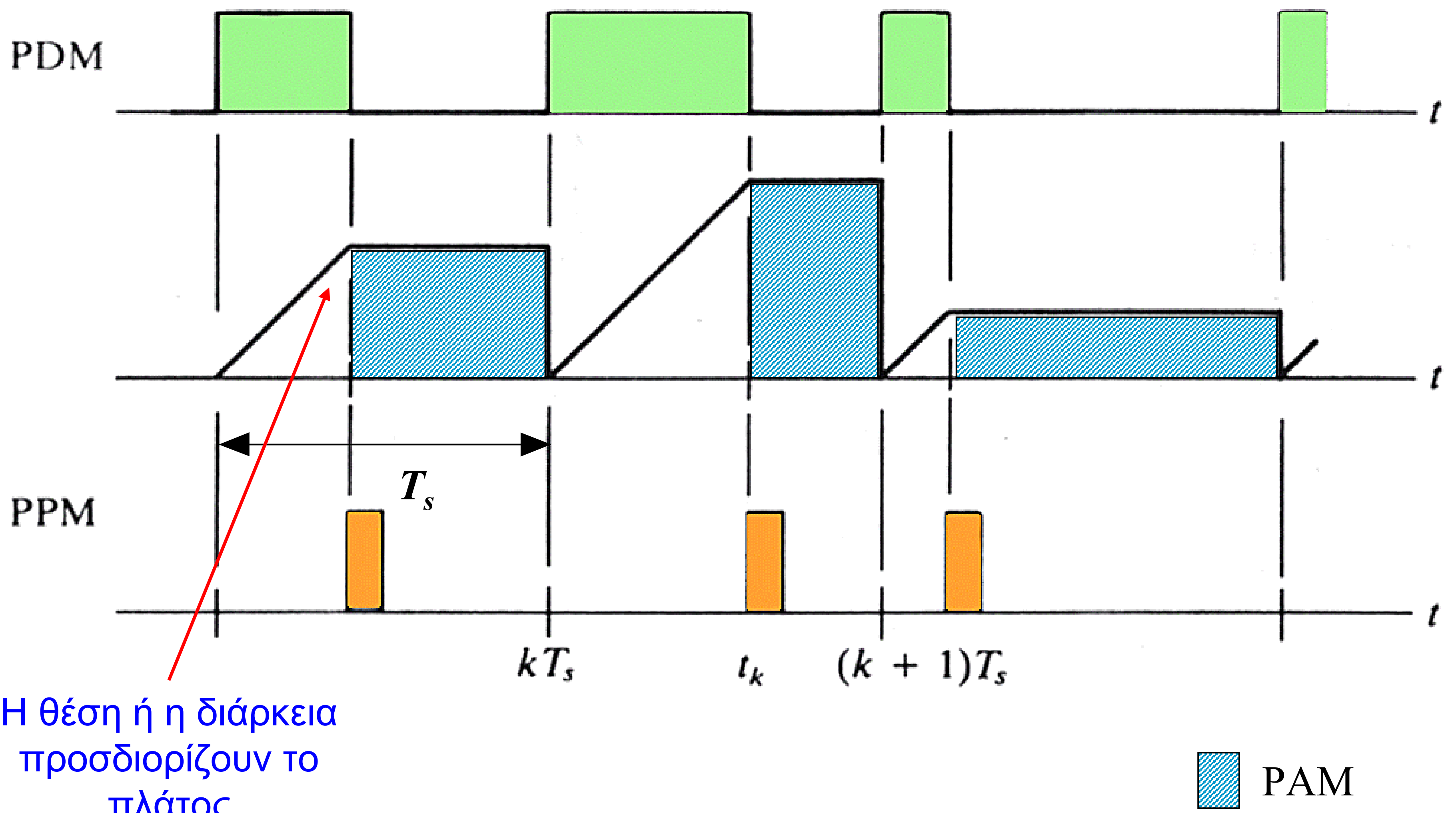
$$\approx f_s \tau_0 \left[1 + \mu x(t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin\left\{\pi n f_s \tau_0 \left[1 + \mu x(t)\right]\right\} \cos(2\pi n f_s t)$$

- δηλαδή, το σήμα PDM αποτελείται από μια συνιστώσα DC, το προς διαμόρφωση σήμα πληροφορίας $x(t)$ και σήματα PM στις αρμονικές της συχνότητας δειγματοληψίας f_s
- Εάν δεν υπάρχει επικάλυψη των φασμάτων των σημάτων PM με το σήμα πληροφορίας, δηλαδή, $\tau_0 \ll T_s$, τότε το $x(t)$ λαμβάνεται με βαθυπερατό φιλτράρισμα!

Αποδιαμόρφωση PDM

- Ένας άλλος πρακτικός τρόπος αποδιαμόρφωσης για την PDM και PPM είναι η μετατροπή τους σε PAM χρησιμοποιώντας ramp generator
- Άσχετα από τη μέθοδο αποδιαμόρφωσης, οι PDM και PPM απαιτούν μικρούς χρόνους ανόδου (risetime) παλμών, ώστε να διατηρηθεί η ακρίβεια της πληροφορίας
  - Το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι σημαντικά μεγαλύτερο σε σχέση με την PAM
  - Το σταθερό πλάτος παλμών δίνει ανοσία σε μη γραμμικότητες
  - Η μεταφορά της πληροφορίας μέσω της θέσης των παλμών και όχι του πλάτους προδίδει ιδιότητες καταστολής του θορύβου παρόμοιες των PM και FM

Μετατροπή PDM, PPM σε PAM



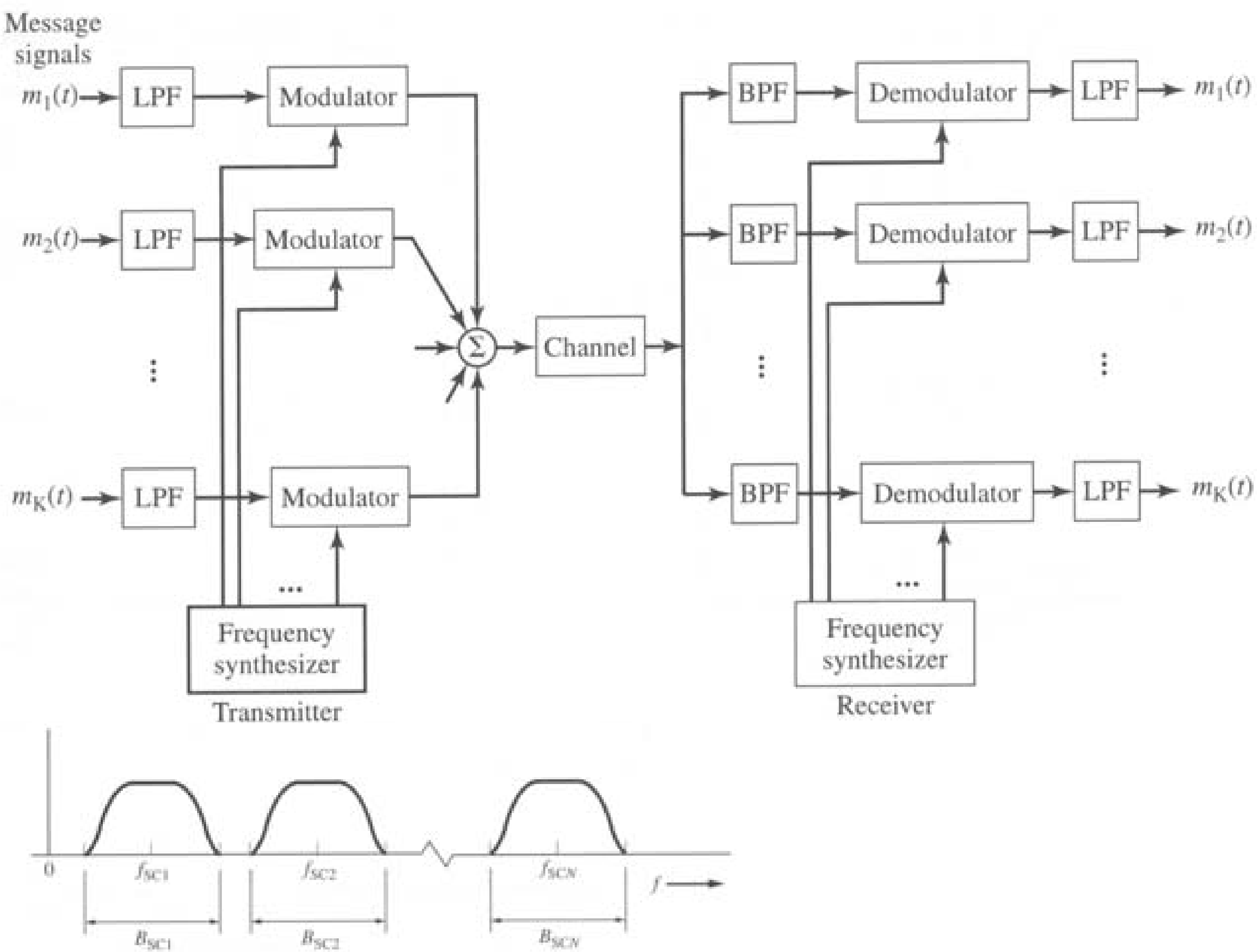
Η θέση ή η διάρκεια προσδιορίζουν το πλάτος

Πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου

Πολυπλεξία αναλογικών σημάτων

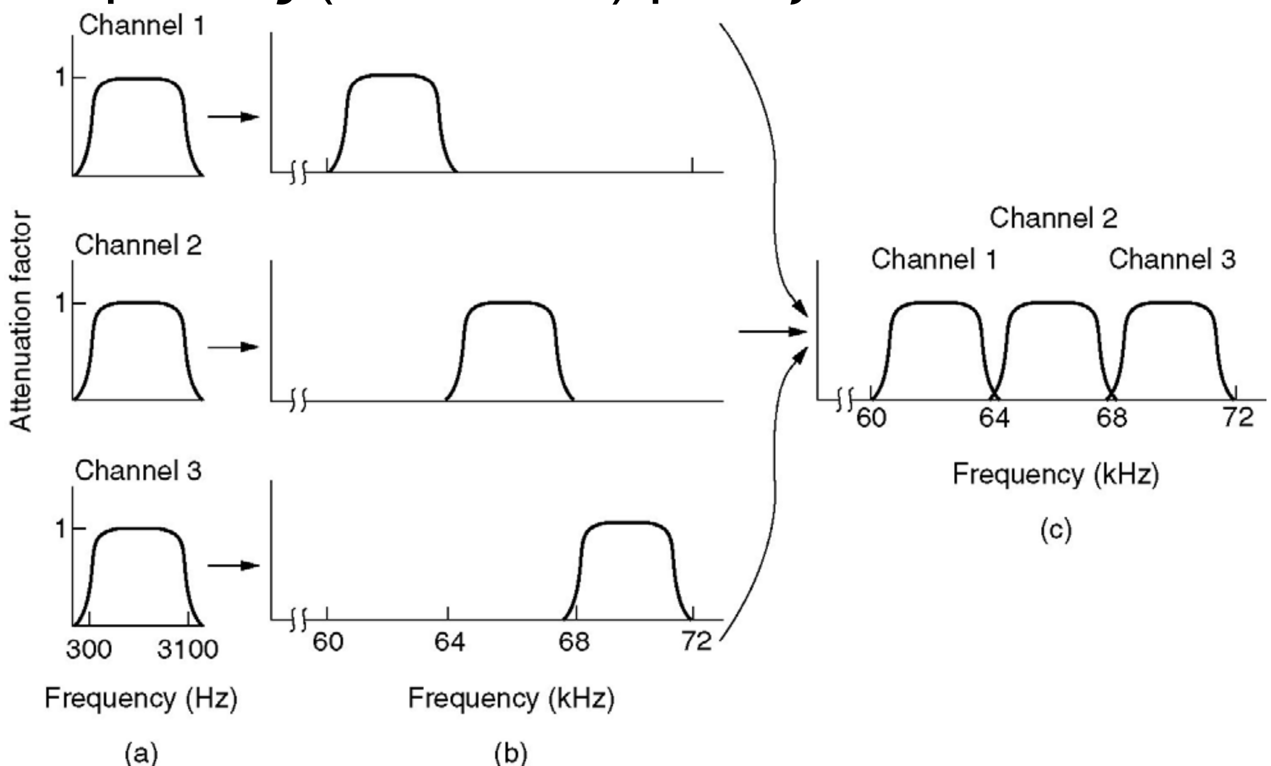
- Πολλά αναλογικά σήματα μπορούν να διαμορφωθούν κατά SSB και μεταδοθούν μέσω ενός κοινού διαύλου
  - Πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM)
- Μια εναλλακτική μέθοδος είναι η πολυπλεξία το πεδίο του χρόνου (TDM)
  - Το σήμα που προκύπτει από διαμόρφωση PAM είναι μηδέν τον περισσότερο καιρό
  - Τα κενά αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μετάδοση άλλου διαμορφωμένου κατά PAM σήματος

Frequency Division Multiplexing (FDM)



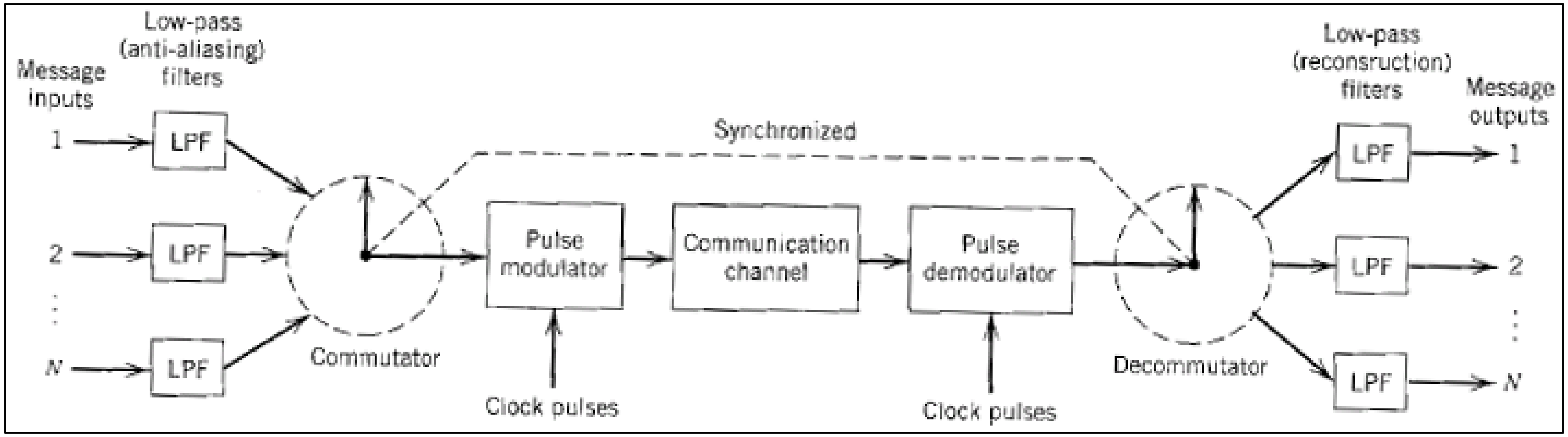
Μειονέκτημα FDM

- Στις αναλογικές μεθόδους πολυπλεξίας συχνότητας, που χρησιμοποιήθηκαν στην τηλεφωνία (SSB-FDM), λόγω μη γραμμικοτήτων, εμφανίζεται το πρόβλημα της διαφωνίας (cross-talk) μεταξύ των καναλιών φωνής



Time Division Multiplexing (TDM)

- Ο δίαυλος μοιράζεται στα προς μετάδοση σήματα σε χρονική βάση
- Τα διαφορετικά σήματα μεταδίδονται δειγματοληπτημένα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές



Συγχρονισμός

- Σε όλα τα συστήματα TDM πρέπει να υπάρχει συγχρονισμός μεταξύ πομπού και δέκτη!
- Διαφορετικά δεν θα ληφθούν τα σωστά σήματα