Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Ε.Δ.ΣΥΚΑΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΑ ΚΕΝΤΡΑ

1.1 Βασικές έννοιες

Τηλέφωνο είναι μια συσκευή μέσω της οποίας ο χρήστης της, *συνδρομητής (subscriber)*, μπορεί να συνομιλήσει με άλλους συνδρομητές, που καθένας τους κατέχει μια παρόμοια συσκευή. Κάθε συνδρομητής τηλεφώνου συνδέεται μέσω *συνδρομητικής γραμμής (subscriber's line/loop)* σε κεντρικό σημείο μεταγωγής, το *τηλεφωνικό κέντρο (telephone exchange)*. Η κύρια λειτουργία του κέντρου είναι το να παρέχει άμεση σύνδεση μεταξύ ζευγών συνδρομητών. Το κέντρο λειτουργεί σύμφωνα με οδηγίες των συνδρομητών και η λειτουργία του είναι πλήρως αυτόματη (αυτόματα κέντρα) παρότι στο παρελθόν υπήρξαν κέντρα ελεγχόμενα από τηλεφωνητές (χειροκίνητα κέντρα). Τα κέντρα διασυνδέονται σε εθνική βάση, εμμέσως ή αμέσως, μέσω δικτύου *γραμμών (trunks)* και η μεταγωγή μπορεί να επεκταθεί και σε παγκόσμια βάση μέσω διεθνών υπεραστικών κέντρων και γραμμών. Σήμερα τα κέντρα ελέγχονται από ηλεκτρονικούς υπολογιστές (ψηφιακά κέντρα), αν και υπάρχουν ακόμα σε λειτουργία κέντρα που ελέγχονται από ηλεκτρομηχανικές συσκευές διαφόρων τύπων. Στο εγγύς μέλλον τα ψηφιακά κέντρα αναμένεται να αντικαταστήσουν πλήρως αυτά με ηλεκτρομηχανικό έλεγχο.

Εάν παραλειφθούν όλα τα τεχνικά σημεία, το τηλεφωνικό κέντρο μπορεί να ειδωθεί σαν μια ομάδα N συνδρομητών συνδεδεμένων με τέτοιο τρόπο που κάθε ένας να έχει πρόσβαση σε όλους τους άλλους. Για μεγάλα συστήματα, το N είναι συνήθως μεγαλύτερο από 10.000, ενώ για μικρά μπορεί να είναι της τάξης των 50 ή και μικρότερο. Σε αυτόματα κέντρα, οι συνδέσεις εκτελούνται μέσω διακοπτών (μεταγωγικά στοιχεία) που εν γένει αναφέρονται σαν *μεταγωγείς (switches)*. Οι μεταγωγείς είναι γνωστοί με διάφορα ονόματα ανάλογα με την κατασκευή τους, π.χ. *κινητηριακός (uniselector)*, *υψοστροφικός (two motion selector)*, *ραβδεπαφικός (crossbar switch)*, *μεταγωγής χρόνου (time switch), μεταγωγής χώρου (space switch)*, κ.λ.π. Εναλλακτικά είναι γνωστοί και με την εργασία που επιτελούν, π.χ. *ανιχνευτές (finders)*, *κλησιθήρες (hunters)*, *επιλογείς (selectors)*, κ.λ.π. Τα συνδετικά κυκλώματα μεταξύ μεταγωγέων ή ομάδων μεταγωγέων είναι γνωστά σαν *γραμμές ή κυκλώματα (trunks, links)*. Είναι βολικό να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια ο γενικός όρος "όργανα" που να περιλαμβάνει όλα τα κομμάτια του εξοπλισμού για την επίτευξη σύνδεσης.

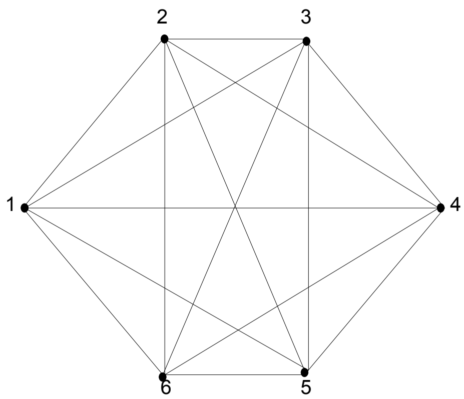
Ο συνδρομητής που ζητά μια σύνδεση αναφέρεται σαν ο καλών συνδρομητής, ενώ ο ζητούμενος συνδρομητής σαν ο καλούμενος συνδρομητής. Ο όρος "τηλεφωνική κλήση", παρότι δεν έχει ακριβή έννοια, συνήθως δηλώνει το γεγονός ότι έχει επιτευχθεί σύνδεση ή (πράγμα που δεν είναι ισοδύναμο), ότι μια συνδιάλεξη λαμβάνει χώρα. Όταν ένα όργανο λαμβάνει σήμα που το αναγκάζει να λειτουργήσει, λέμε ότι προσφέρθηκε στο όργανο αυτό μια κλήση (ή ότι έγινε μια προσπάθεια κατάληψης). Εάν, επιπλέον, το όργανο συνεχίσει να λειτουργεί σύμφωνα με τις οδηγίες που έλαβε λέμε ότι η προσφερθείσα κλήση έγινε *δεκτή ή αποκαταστάθηκε (accepted, established)* και το όργανο λέγεται *κατειλημμένο ή απασχολημένο (busy, engaged, occupied)*. Τότε το όργανο μεταφέρει την αποκατεστημένη κλήση και δεν είναι πλέον διαθέσιμο για άλλες κλήσεις. Ο χρόνος που παρέρχεται μεταξύ της κατάληψης του οργάνου από μια προσφερόμενη κλήση και της χρονικής στιγμής που ελευθερώνεται κατά το τέλος της αποκατεστημένης κλήσης και επανέρχεται στην κατάσταση του να μπορεί να εξυπηρετήσει νέες κλήσεις καλείται *χρόνος κατάληψης (holding time)*. Όταν ένα όργανο δε χρησιμοποιείται ή δεν έχει ζητηθεί για χρησιμοποίηση λέγεται *ελεύθερο (idle, free)*. Εάν για κάποιο λόγο το όργανο είναι ανίκανο να εκτελέσει τη λειτουργία του, λέμε ότι η προσφερόμενη κλήση είναι ανεπιτυχής. Η τύχη τέτοιων κλήσεων είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της δομής του κέντρου. Οι παραπάνω ορισμοί αναφέρονται τόσο στις υπό μετάβαση κλήσεις μέσω του κέντρου όσο και στις κλήσεις που προσφέρονται στο κέντρο από τους συνδρομητές του.

Τα όργανα συνήθως τοποθετούνται σε *ομάδες (groups)* και όταν όλα τα όργανα μιας ομάδας είναι κατειλημμένα λέμε ότι η ομάδα είναι *αποκλεισμένη (blocked)*. Οι κλήσεις που προσφέρονται όταν η ομάδα είναι αποκλεισμένη δε μπορούν να γίνουν δεκτές και σε ένα *σύστημα με απώλειες (loss system)*, δε μπορεί να προκύψει καμία σύνδεση και οι κλήσεις αυτές χάνονται. Σε τέτοια συστήματα θεωρείται ότι οι *χαμένες κλήσεις (lost calls)* δε ξαναεμφανίζονται και τα συστήματα χαρακτηρίζονται σαν συστήματα όπου οι *χαμένες κλήσεις εκκαθαρίζονται (lost calls cleared)* και ακόμη υποτίθεται ότι οι χαμένες κλήσεις δεν έχουν χρόνο κατάληψης. Μια παραλλαγή, γνωστή σαν σύστημα όπου οι *χαμένες κλήσεις παραμένουν (lost calls held)* διαφέρει στο ότι υποτίθεται ότι οι χαμένες κλήσεις έχουν χρόνο κατάληψης, αλλά μια κλήση που δε βρίσκει ελεύθερο όργανο για την εξυπηρέτησή της παρότι έχει χαθεί, πρακτικά συνεχίζει να απασχολεί το σύστημα, δηλαδή, έχει αποκατασταθεί. Σε *αναμονητικά συστήματα (delay, waiting systems)* όμως, μια τέτοια κλήση καθυστερεί, παραμένοντας σε μια *ουρά (queue)* και περιμένει μέχρι να ελευθερωθεί κάποιο όργανο για να το καταλάβει.

Είναι βολικό να αναφέρουμε τα όργανα που προσφέρουν κλήσεις σαν *πηγές (sources)* (πηγές μπορεί να είναι οι συνδρομητές, οι τηλεφωνητές ή οι προγενέστεροι μεταγωγείς σε ένα σύστημα, ανάλογα με την περίπτωση) και τα όργανα που χειρίζονται τις κλήσεις σαν *κανάλια (channels)* ή *σταθμοί εξυπηρέτησης (servers)* σύμφωνα με την ορολογία της θεωρίας αναμονής. Κανάλια μπορεί να είναι οι γραμμές είτε οι επόμενοι μεταγωγείς.

1.2 Συμφόρηση

Το ιδανικό σύστημα είναι προφανώς αυτό που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, όπου είναι δυνατόν όλοι οι συνδρομητές να μπορούν να συνομιλήσουν κατά ζεύγη συγχρόνως. Σε ένα τέτοιο σύστημα, ο δυνατός αριθμός συνδέσεων είναι N(N-1)/2 και εάν για κάθε ζεύγος συνδρομητών παραχωρείται ένα συνδετικό στοιχείο, τότε ο απαιτούμενος αριθμός είναι τεράστιος (πολύ μεγάλος για να είναι λογικός). Ένα τέτοιο "ιδανικό" σύστημα δεν είναι πρακτικό λόγω του τεράστιου μεγέθους, υπερβολικού κόστους και δυσκολιών συντήρησης. Είναι επομένως αναγκαίο να ελαττωθεί ο αριθμός των συνδετικών στοιχείων, που σημαίνει ότι οι συνδρομητές θα αντιμετωπίζουν την πιθανότητα μερικές από τις κλήσεις τους να είναι ανεπιτυχείς. Επομένως η μείωση του αριθμού των συνδετικών στοιχείων μειώνει επίσης και τον αριθμό των συνδιαλέξεων που μπορεί να λάβουν χώρα ταυτόχρονα. Ευτυχώς, αυτό είναι ένας μάλλον ήπιος περιορισμός, αφού συνήθως πολύ σπάνια παρά πολλοί συνδρομητές κάνουν ταυτόχρονες κλήσεις. Είναι επομένως λογικό να σχεδιάζεται ένα κέντρο έτσι ώστε να ικανοποιεί τις συνήθεις ανάγκες που λαμβάνουν χώρα συχνά και να αγνοεί αυτές που δε συμβαίνουν πολύ συχνά. Το μέγεθος των περιορισμών που επιβάλλονται εξαρτώνται από τις τοπικές συνθήκες. Έτσι για ένα κέντρο σε εμπορική περιοχή απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός οργάνων από ότι σε ένα κέντρο σε περιοχή κατοικιών.



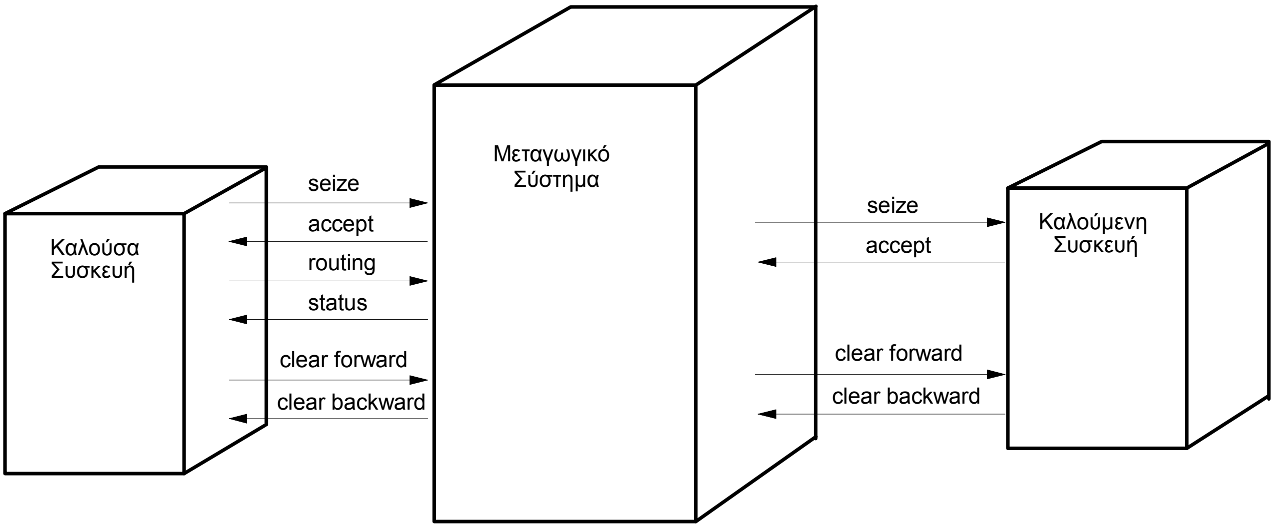
Στην πράξη ο αριθμός των κλήσεων που μπορεί να αποτύχουν λόγω ανεπάρκειας των συνδετικών στοιχείων είναι προκαθορισμός. Το πλήθος των συνδετικών στοιχείων πρέπει να είναι τέτοιο που να ικανοποιεί τις συνήθεις ανάγκες, ενώ ταυτόχρονα ο αριθμός των αποτυχιών πρέπει να περιορίζεται σε σημείο που να μη δημιουργείται ενόχληση στους συνδρομητές. Ο αριθμός των κλήσεων που προβλέπεται ότι μπορεί να χαθούν εκτιμάται από τη συχνότητα των κλήσεων και αποτελεί μια από τις βάσεις υπολογισμού του αριθμού των συνδετικών στοιχείων. Μέθοδοι υπολογισμού και η θεωρητική ανάλυση της συμπεριφοράς των οργάνων ενός τηλεφωνικού δικτύου αποτελούν το σκοπό των σημειώσεων αυτών.

Συμφόρηση (congestion) είναι η κατάσταση σε ένα κέντρο όπου ένας καλών συνδρομητής δε μπορεί να επιτύχει σύνδεση αμέσως. Ο *αποκλεισμός (blocking)* των κλήσεων προκαλείται από ανεπάρκεια μεταγωγικού εξοπλισμού και/ή κατάληψη των οργάνων μεταγωγής στα οποία ο συνδρομητής έχει πρόσβαση. Συμφόρηση, εν γένει, δηλώνει την κατάσταση όπου συμβαίνει αποκλεισμός και λαμβάνει χώρα είτε απώλεια είτε καθυστέρηση (ή και τα δύο). Όταν το σύστημα είναι αποκλεισμένο, δεν υπάρχει ελεύθερη διαδρομή που να μπορεί να αποδοθεί σε μια προσφερόμενη κλήση. Σε συστήματα με απώλειες ένας ειδικός τόνος δείχνει στο συνδρομητή ότι υπάρχει συμφόρηση. Σε αναμονητικά συστήματα, ο συνδρομητής δε λαμβάνει τέτοιο σήμα σε περίπτωση συμφόρησης, επειδή η προσφερόμενη κλήση καθυστερείται και μετάγεται μόλις παύσει η συμφόρηση. Η διαφορά μεταξύ συστημάτων με απώλειες και αναμονητικών συστημάτων είναι σημαντική για τη δομή του κέντρου, αντιστοιχεί δε στην κατάταξη των προβλημάτων συμφόρησης σε *προβλήματα αναμονής (delayed-calls, waiting problems)* ή σε *προβλήματα απωλειών (lost-calls, loss problems)*.

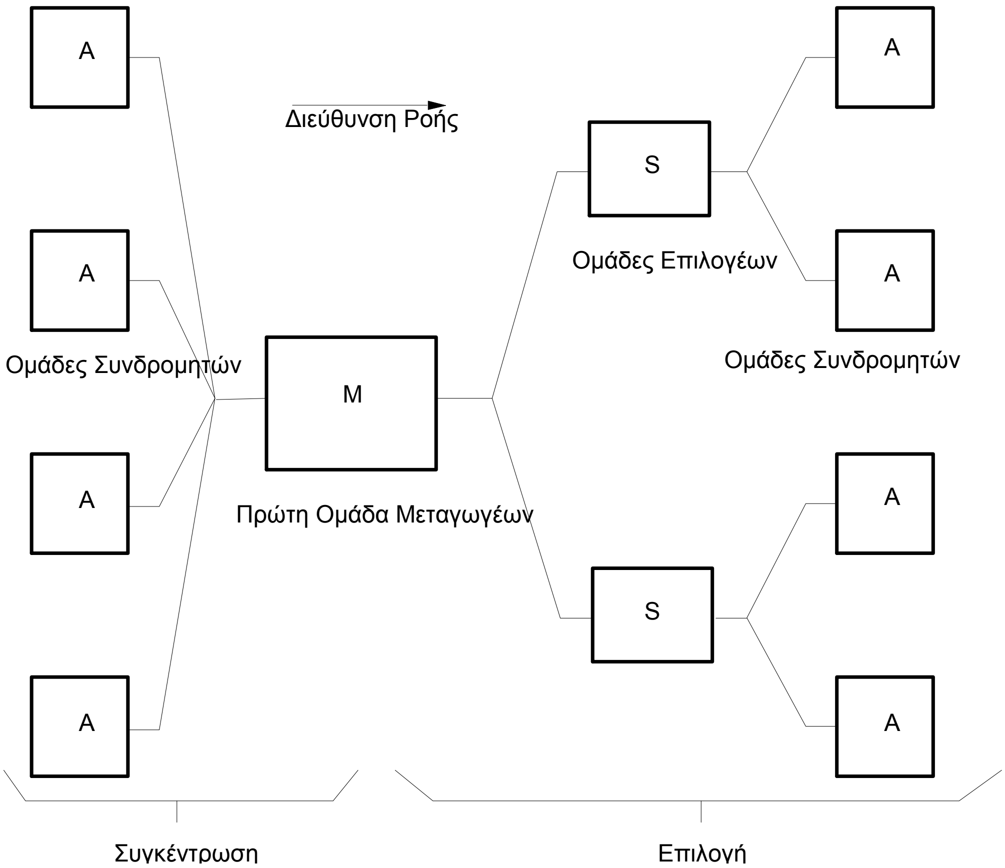
1.3 Η δομή του τηλεφωνικού κέντρου

Ένα κέντρο οφείλει να δέχεται διαταγές από τον καλούντα συνδρομητή και να είναι σε θέση να εντοπίσει τον καλούμενο συνδρομητή από τις πληροφορίες που δέχεται, να αποκαταστήσει μια σύνδεση μεταξύ των συνδρομητών, να ειδοποιήσει τον καλούμενο συνδρομητή ότι κάποιος τον ζητά και τον καλούντα συνδρομητή για το εάν ο καλούμενος συνδρομητής είναι διαθέσιμος ή όχι. Εάν αρχίσει συνδιάλεξη, πρέπει να φροντίσει να διατηρήσει τη σύνδεση όσο διαρκεί η κλήση και τελικά όταν η συνομιλία τελειώσει, να αποσυνδέσει όλα τα χρησιμοποιηθέντα κυκλώματα και να τα επαναφέρει στην κατάσταση του να μπορούν να χρησιμοποιηθούν από άλλους συνδρομητές. Επίσης, για δημόσια τηλεφωνικά συστήματα, κάθε επιτυχής κλήση καταγράφεται για λόγους χρέωσης. Φυσικά, πρέπει όλες αυτές οι λειτουργίες να μπορούν να εκτελούνται ταυτόχρονα και χωρίς διακοπή για ένα μεγάλο αριθμό κλήσεων και για μεγάλα χρονικά διαστήματα, δηλαδή, το σύστημα πρέπει να είναι *αξιόπιστο (reliable)* και να έχει *υψηλή διαθεσιμότητα (high availability)*. Για την επίτευξη των ανωτέρω λειτουργιών το τηλεφωνικό κέντρο πρέπει να κατέχει κάποιο είδος μνήμης που επίσης θα του επιτρέπει να εκτελεί τις διαταγές που δέχεται χωρίς λάθη.

Όλες αυτές οι λειτουργίες επιτυγχάνονται με την ανταλλαγή σημάτων ελέγχου, *σηματοδοσίας (signalling)*, μεταξύ των τηλεφωνικών συσκευών και του κέντρου (καθώς και μεταξύ κέντρων). Οι βασικοί τύποι σημάτων για κάθε συσκευή είτε αυτή χρησιμοποιείται σαν καλούσα ή καλούμενη φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα. Όταν η συσκευή χρησιμοποιείται σαν καλούσα, η πρώτη λειτουργία είναι η μετάδοση ενός *σήματος κατάληψης (seize)* για το σύστημα, που δείχνει ότι η συσκευή επιθυμεί την πραγματοποίηση μιας κλήσης. Το σύστημα εν γένει απαντά με ένα *σήμα αποδοχής (accept)*. Τότε η καλούσα συσκευή μεταδίδει τις *οδηγίες δρομολόγησης (routing)* και το σύστημα απαντά με μια ποικιλία *σημάτων κατάστασης (status)*, όπως, *γραμμή κατειλημμένη (line busy)*, *γραμμή ελεύθερη (line free)*, *άκυρος αριθμός (number invalid)*, *απάντηση (line answered)*. Όταν η σύνδεση τελειώσει, η καλούσα συσκευή στέλνει ένα *σήμα εκκαθάρισης (clear forward)*. Αντίστοιχα, η καλούμενη συσκευή απαντά με ένα *σήμα αποδοχής (accept)*, όταν δέχεται ένα *σήμα κατάληψης (seize)* από το σύστημα. Στο τέλος της επικοινωνίας ίσως να σταλεί ένα *σήμα εκκαθάρισης (clear forward)* από το σύστημα που δείχνει το τέλος της συνδιάλεξης. Σε πολλά συστήματα ένα *σήμα εκκαθάρισης (clear backward)* μπορεί να σταλεί και από την καλούμενη συσκευή προς το σύστημα, το οποίο τότε πιθανώς να ειδοποιήσει την καλούσα συσκευή ότι η συνδιάλεξη τελείωσε.



Μερικές φορές συμβαίνουν απρόβλεπτα γεγονότα και σαν αποτέλεσμα έχουν ότι ένας ανώμαλα υψηλός αριθμός συνδρομητών να θέλει να χρησιμοποιήσει το τηλέφωνό του κατά την ίδια χρονική στιγμή. Είναι δυνατό σε τέτοιες περιπτώσεις το κέντρο να μην είναι σε θέση να ανταποκριθεί σ' όλες αυτές τις απαιτήσεις και να αποκλειστεί. Για να ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις των συνδρομητών, κάθε τύπος μεγάλου τηλεφωνικού κέντρου πρέπει να σχεδιάζεται προσεκτικά. Ο μεγάλος αριθμός συνδρομητών αυξάνει υπερβολικά τον αριθμό των δυνατών συνδυασμών και αυτό στη συνέχεια περιπλέκει περισσότερο το σχεδιασμό. Παρότι οι τεχνικές λεπτομέρειες των κυκλωμάτων είναι πολύπλοκες και συχνά πολύ ευφυείς, η βασική αρχή της μεταγωγής παραμένει απλή: Οι συνδρομητές διαιρούνται σε πολλές μικρές *ομάδες (groups)* και οι συνδέσεις αποκαθιστώνται σε μια διαδοχή *βαθμίδων (stages)*, αποτελούμενων από ομάδες μεταγωγέων και γραμμών. Το επόμενο σχήμα δίνει το σχηματικό διάγραμμα ενός τυπικού κέντρου.



Η λειτουργία ενός τυπικού κέντρου μπορεί να θεωρηθεί ότι περιλαμβάνει δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, γνωστή σαν *συγκέντρωση (concentration)*, οι κλήσεις των συνδρομητών συνδέονται σε μια ομάδα μεταγωγέων που παριστάνεται με Μ στο σχήμα. Κάθε συνδρομητής έχει πρόσβαση σε κάποια ομάδα μεταγωγέων του Μ και τη μοιράζεται μαζί με άλλους συνδρομητές. Όταν όλοι αυτοί οι μεταγωγείς είναι απασχολημένοι, η κλήση δε μπορεί να ολοκληρωθεί και ειδοποιείται σχετικά ο συνδρομητής. Αντιθέτως, εάν υπάρχει ένας τουλάχιστον ελεύθερος μεταγωγέας από αυτούς στους οποίους ο συνδρομητής έχει πρόσβαση, τότε καταλαμβάνεται και το κέντρο ειδοποιεί το συνδρομητή ότι μπορεί να συνεχίσει και να δώσει οδηγίες σχετικά με την επιθυμητή κλήση. Η λειτουργία που μόλις περιγράφτηκε λαμβάνει χώρα αμέσως μετά το σήκωμα του ακουστικού. Η δομή του Μ ποικίλει σημαντικά και πιθανώς να αποτελείται από δύο ή περισσότερα στάδια για να εξασφαλιστεί πιο ομαλή συγκέντρωση.

Η δεύτερη φάση, γνωστή σαν *επιλογή (selection)*, αρχίζει όταν ο συνδρομητής *σχηματίζει τον επιθυμητό αριθμό (dialling)*. Ο τηλεφωνικός αριθμός είναι στην πραγματικότητα μια κωδικοποιημένη διεύθυνση και σε ένα σύστημα *άμεσης καθοδήγησης (direct dialling)* η διέλευση της κλήσης προχωρά καθώς σχηματίζονται τα διαδοχικά ψηφία. Σε ένα σύστημα *έμμεσης καθοδήγησης (indirect dialling)* τα ψηφία σχηματίζονται από το συνδρομητή, λαμβάνονται από το σύστημα και αποθηκεύονται σε *καταχωρητή (register)*, που περιέχει πλέον την πληροφορία για την αποκατάσταση της κλήσης. Για την εξήγηση της φάσης της *επιλογής (selection)* είναι βολικό να εξετάσουμε ένα σύστημα άμεσης καθοδήγησης. Το πρώτο ψηφίο θα δρομολογήσει την κλήση μέσω ενός μεταγωγέα μιας από τις ομάδες που περιλαμβάνονται στο πρώτο στάδιο *επιλογής (selection)* προς ένα μεταγωγέα του δεύτερου σταδίου επιλογής. Το πρώτο ψηφίο, επιπλέον, καθορίζει αμέσως το μέλλον της κλήσης, επειδή οι δεύτεροι επιλογείς διαιρούνται σε ομάδες που ανταποκρίνονται στο αρχικό ψηφίο της επιθυμητής συνδρομητικής γραμμής. Όμοια, το επόμενο ψηφίο διευθύνει την κλήση σε μια ομάδα τρίτων επιλογέων που ανταποκρίνονται στο δεύτερο ψηφίο. Έτσι ο αριθμός των συνδρομητών στους οποίους είναι δυνατή η πρόσβαση μειώνεται περαιτέρω. Τελικά τα δύο τελευταίο ψηφία θα καθορίσουν το συγκεκριμένο συνδρομητή, που καλείται, μέσα σε μια ομάδα 100 συνδρομητών. Η υπεραπλουστευμένη αυτή εικόνα του τρόπου με τον οποίο δρομολογούνται οι κλήσεις μέσω ενός κέντρου τονίζει επιπλέον το φαινόμενο της *ροής (flow)* των προσφερομένων κλήσεων: Οι κλήσεις δημιουργούνται από συνδρομητές και ρέουν προς ένα σημείο Μ *συμφόρησης (bottleneck)* μέσω καναλιών που στενεύουν αυξάνοντας ταυτόχρονα τη συγκέντρωσή τους. Κατά τη μετάβαση αυτή μερικές κλήσεις χάνονται ενώ άλλες μπορεί να αναμείνουν μέχρι να γίνουν δεκτές. Οι κλήσεις που περνούν επιτυχώς από το Μ διανέμονται με μειούμενη συγκέντρωση σε διάφορα κανάλια, προς κάθε ένα από τα οποία μπορεί να μην υπάρχει ελεύθερη πρόσβαση. Σύμφωνα με την άποψη αυτή, το κέντρο μοιάζει με ένα τοπολογικό δέντρο (δηλαδή μια γεωμετρική διευθέτηση γραμμών και κόμβων). Προφανώς η δομή του επηρεάζει σημαντικά τις ιδιότητες της ροής κλήσεων.

Οι ίδιες αρχές εφαρμόζονται όταν εξετάζουμε ένα μεμονωμένο τμήμα του κέντρου. Έτσι, π.χ. μια ομάδα πηγών παράγει ροή κλήσεων και την προσφέρει σε μια ομάδα καναλιών, δηλαδή, γραμμές ή μεταγωγείς της επόμενης βαθμίδας. Υπάρχουν τρεις βασικές μέθοδοι με τις οποίες μπορούν να διασυνδεθούν μεταγωγείς διαφόρων βαθμίδων, δηλαδή

1. *Πλήρης προσιτότητα (full availability)*

1. *Μερική προσιτότητα (limited availability)*

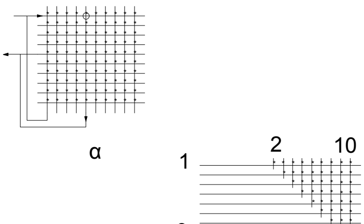
3. *Ζευκτικό σύστημα (link system)*

Η πλήρης διασύνδεση μεταξύ διαφόρων βαθμίδων μπορεί να περιλαμβάνει και συνδυασμούς αυτών των μεθόδων.

Πλήρης προσιτότητα είναι ο όρος που αποδίδεται στη μέθοδο διασύνδεσης, όπου όλες οι πηγές μιας ομάδας (σημεία εισόδου) έχουν πάντα πρόσβαση προς κάθε κανάλι (σημείο εξόδου) της ομάδας. Η μέθοδος πλήρους προσιτότητας για διασύνδεση μεταγωγέων είναι η πιο αποδοτική, αλλά ο αριθμός των εξόδων του εκάστοτε μεταγωγέα πρέπει, για φυσικούς λόγους να είναι περιορισμένος, οπότε συχνά είναι αδύνατο να έχουμε πρόσβαση προς όλα τα κανάλια της ομάδας.

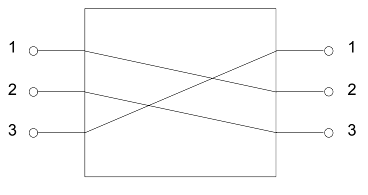
Μερική προσιτότητα έχουμε όταν κάθε πηγή έχει πρόσβαση σε μερικά μόνο από τα κανάλια. Εάν οι μεταγωγείς των πηγών της ομάδας έχουν k εξόδους ο καθένας (έχουν προσιτότητα k) και ο αριθμός των καναλιών είναι μεγαλύτερος του k, πρέπει να χρησιμοποιηθούν ειδικές μέθοδοι διασύνδεσης για να εξασφαλιστεί πιο αποδοτική ροή κλήσεων. Η πιο κοινή μέθοδος που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό είναι γνωστή σαν *μεικτονόμηση (grading)* και, όταν χρησιμοποιείται, οι ομάδες καλούνται μεικτονομημένες. Οι πηγές που έχουν πρόσβαση σε ένα ακριβώς καθορισμένο σύνολο καναλιών αποτελούν μια *ομάδα εισόδου*. Τουλάχιστον μερικά κανάλια είναι κοινά σε περισσότερες από μια ομάδες εισόδου και, επομένως, καμία ομάδα δεν είναι ανεξάρτητη από τις άλλες.

Η βάση ενός ζευκτικού συστήματος μπορεί να περιγραφεί σύντομα σαν η ομαδοποίηση δύο ή περισσότερων σταδίων ώστε να λειτουργούν *σε σειρά (in tandem)*. Σε ζευκτικά συστήματα έχουμε *επιλογή υπό συνθήκη (conditional selection)*, δηλαδή, μία σύνδεση μπορεί να δημιουργηθεί μόνο εάν η πηγή μπορεί να βρει μια ελεύθερη διαδρομή προς το επιθυμητό κανάλι ή κανάλια. Προφανώς, απαιτείται γνώση για τα εξής: ποιες *ζεύξεις (links)* είναι ελεύθερες, ποιες ζεύξεις ή κανάλια είναι απασχολημένα και για το πως συνδυάζονται τα στοιχεία των διαφόρων σταδίων. Κύριο παράδειγμα είναι το *ραβδεπαφικό (crossbar)* σύστημα. Σε τέτοια συστήματα μπορεί να συμβεί εσωτερικός *αποκλεισμός (internal blocking)*, δηλαδή, μπορεί να συμβεί να υπάρχουν ελεύθερα κανάλια στο τελευταίο στάδιο, στα οποία μια πηγή να έχει πρόσβαση, αλλά να μη μπορεί να τα καταλάβει λόγω έλλειψης των αντιστοίχων ζεύξεων που είναι απασχολημένες με άλλες κλήσεις. Ο εσωτερικός αποκλεισμός δε συμβαίνει λοιπόν από έλλειψη ελεύθερων καναλιών αλλά από έλλειψη ζεύξεων προς ελεύθερα κανάλια.

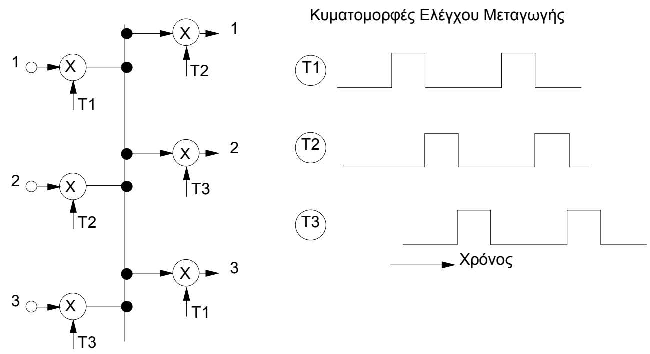


Για την καλύτερη κατανόηση των προηγουμένων ιδεών δίδονται στη συνέχεια τρία παραδείγματα απλών τηλεφωνικών κέντρων, που επιδεικνύουν πρακτικά τη δομή και μερικές από τις προαναφερθείσες έννοιες. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα απλό κέντρο μιας βαθμίδας μεταγωγής που εξυπηρετεί 10 τηλεφωνικές γραμμές. Αποτελείται από μια μήτρα με 10 εισόδους και 10 εξόδους που παριστάνονται από οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές αντίστοιχα. Κάθε τηλεφωνική γραμμή συνδέεται σε μία είσοδο και μία έξοδο. Κάθε είσοδος μπορεί να συνδεθεί σε οποιαδήποτε έξοδο μέσω ενός στοιχείου σύνδεσης, *επαφής (crosspoint)*, που βρίσκεται στην τομή τους. Στο σχήμα φαίνεται μια σύνδεση, όπου η αντίστοιχη επαφή έχει τοποθετηθεί μέσα σ' ένα κύκλο. Μόνο μία επαφή σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί ταυτόχρονα. Αφού δεν είναι αναγκαίο να συνδέσουμε ένα συνδρομητή στη δική του γραμμή, οι επαφές πάνω στη διαγώνιο της μήτρας δε χρησιμοποιούνται. Για το ειδικό αυτό παράδειγμα θα μπορούσαμε να μειώσουμε τον αριθμό των επαφών, επιτρέποντας πάντα τη σύνδεση κάθε γραμμής με οποιαδήποτε άλλη. Αυτό φαίνεται στο δεύτερο μέρος του σχήματος. Μια τέτοια διάταξη όμως θα είχε πιο πολύπλοκο κύκλωμα, αφού ο τρόπος λειτουργίας θα εξαρτάται από την εκάστοτε είσοδο και έξοδο. Επιπλέον μια τέτοια συνδεσμολογία δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν δομική μονάδα για την κατασκευή πιο πολύπλοκων συστημάτων, όπως η πρώτη, εάν θεωρηθεί ότι οι γραμμές εξόδου διαφέρουν από τις αντίστοιχες εισόδου. Παρατηρείστε επίσης ότι το σύστημα που περιγράφηκε είναι πλήρους προσιτότητας.

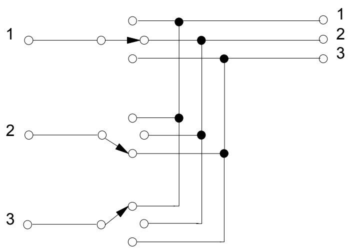
Τα βέλη στο σχήμα δείχνουν τη διαδρομή μιας κλήσης, δηλαδή, τη διεύθυνση κατά την οποία αποκαθίσταται η κλήση (και όχι τη διεύθυνση της φωνής). Για τις ανάγκες της θεωρίας τηλεφωνικής κίνησης δεν είναι αναγκαία η διάκριση μεταξύ της ευθείας και της αντίστροφης τηλεπικοινωνιακής διαδρομής, επομένως, και οι δύο μπορούν να παρασταθούν με μια απλή γραμμή. Επιπλέον, δεν είναι ανάγκη να καθοριστεί το φυσικό μέσο που αποκαθιστά τις συνδέσεις. Τα στοιχεία σύνδεσης μπορεί να είναι ηλεκτρομηχανικά ή ηλεκτρονικά. Το φυσικό μέσο επικοινωνίας μπορεί να είναι είτε διαφορετικοί αγωγοί, ή σε συστήματα πολυπλεξίας, διαφορετικές *χρονικές σχισμές (time slots)* ή διαφορετικές περιοχές συχνότητας πάνω σε ένα κοινό αγώγιμο μέσο. Το επόμενο σχήμα δείχνει παραστατικά τις τρεις αυτές κατηγορίες, που ουσιαστικά βασίζονται στη διαίρεση της πληροφορίας στο χώρο, χρόνο και συχνότητα αντίστοιχα.



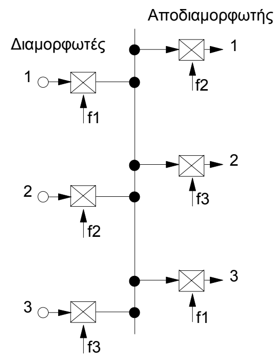
(α) Η απαίτηση



(γ) Μεταγωγή Καταμερισμού Χρόνου



(β) Μεταγωγή Καταμερισμού Χώρου

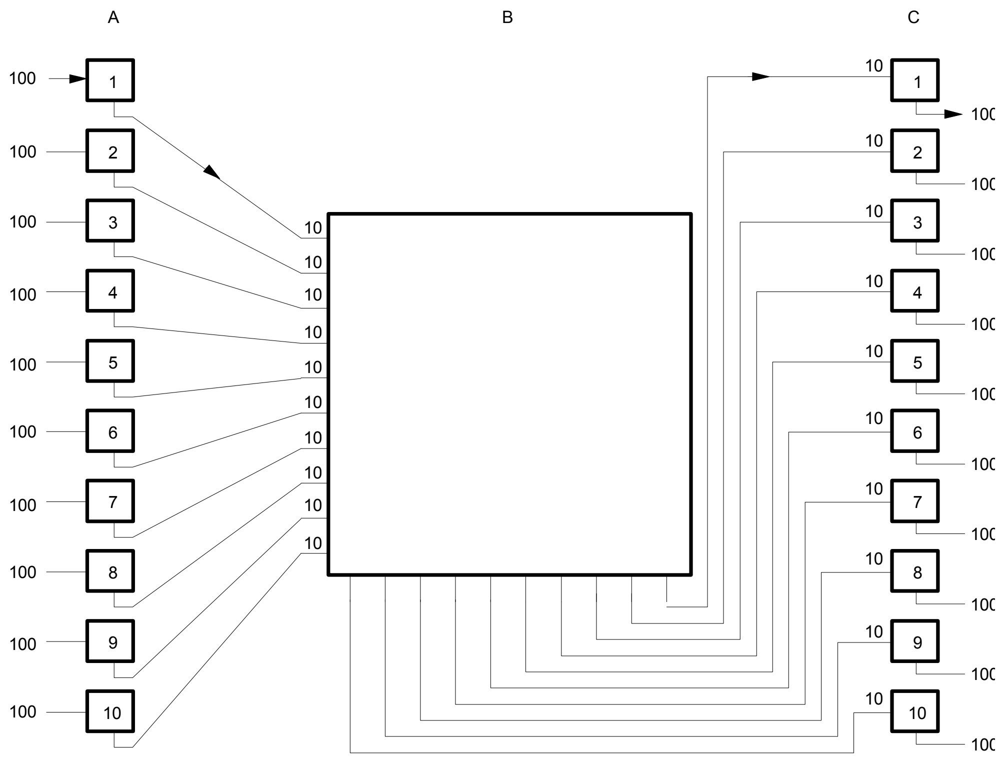


(δ) Μεταγωγή Καταμερισμού Συχνότητας

Το προηγούμενο κέντρο μιας βαθμίδας είναι αντιοικονομικό, αφού ο αριθμός των απαιτούμενων επαφών αυξάνει με το τετράγωνο του αριθμού των γραμμών. Ο αριθμός αυτός όμως μπορεί να μειωθεί εάν χρησιμοποιηθούν περισσότερες βαθμίδες. Στη συνέχεια θα δείξουμε δύο δομές κέντρων, ενός του *βηματοπορικού συστήματος (step-by-step system)* και ενός *ζευκτικού συστήματος (link system)*.

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ένα τυπικό κέντρο 3 βαθμίδων για 1000 συνδρομητές. Για απλότητα τα σημεία σύνδεσης δε φαίνονται, αλλά τα τετράγωνα παριστάνουν μια μήτρα επαφών όπως αυτή που περιγράψαμε προηγουμένως. Κάθε τηλέφωνο συνδέεται σε μία γραμμή εισόδου στην Α βαθμίδα και σε μία έξοδο στη Γ βαθμίδα. Οι γραμμές που συνδέουν τις ομάδες της Α και Γ βαθμίδας στη Β παριστάνουν 10 γραμμές φωνής η κάθε μία. Έτσι στην πρώτη βαθμίδα Α η κίνηση συγκεντρώνεται από 100 εισόδους σε 10 εξόδους, επομένως, μπορεί να προκύψει αποκλεισμός εάν όλες οι έξοδοι είναι απασχολημένες. Οι ομάδες της πρώτης βαθμίδας μπορούν να είναι πλήρους ή μερικής προσιτότητας. Αντίθετα με το κέντρο που περιγράφουμε εδώ, είναι δυνατή η κατασκευή δικτύων με πολλές βαθμίδες που να μη παρουσιάζουν αποκλεισμό. Στην πράξη όμως επιτρέπουμε συνήθως να συμβεί συμφόρηση για την επίτευξη οικονομιών στα όργανα.

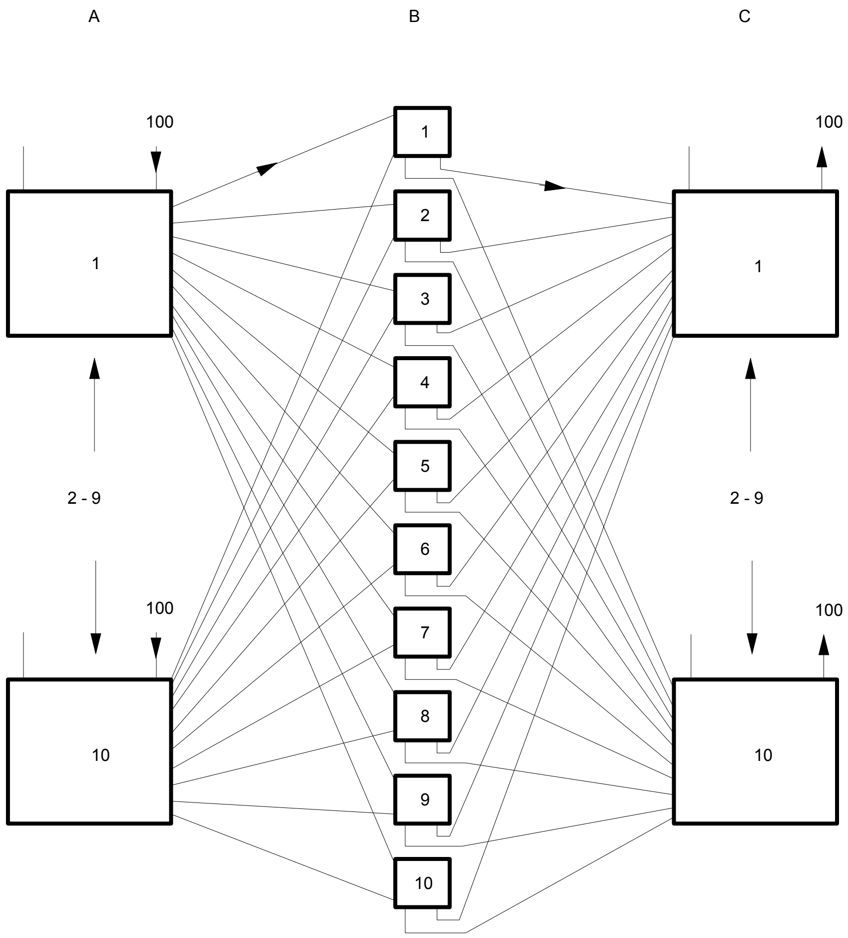
Τα όργανα της Β βαθμίδας μετάγουν την κίνηση προς την επιθυμητή οδό σύμφωνα με τον επιλεγόμενο αριθμό. Εδώ δεν έχουμε ούτε συγκέντρωση ούτε αποκέντρωση της κίνησης. Αντίθετα στη Γ βαθμίδα, όπου επιτελείται η τελική σύνδεση, η κίνηση αποκεντρώνεται. Ο αριθμός των απαιτούμενων επαφών για το κέντρο αυτό είναι προφανώς 10×100×10+100×100+10×100×10 = 30.000, που είναι εξαιρετικά μικρότερος από το 1000000 για το αντίστοιχο κέντρο μίας βαθμίδας.



Συνοψίζοντας, στο κέντρο αυτό, τα όργανα της Α βαθμίδας συγκεντρώνουν την κίνηση χωρίς να τη δρομολογούν (φάση συγκέντρωσης), τα όργανα της Β βαθμίδας δρομολογούν την κίνηση χωρίς να αλλάζουν τη συγκέντρωσή της, ενώ τα όργανα της Γ βαθμίδας αντιστρέφουν τη συγκέντρωσή της (φάση επιλογής). Στην πράξη η διαφορά αυτή δεν είναι πάντα τόσο ξεκάθαρη. Παρατηρείστε ότι κάθε βαθμίδα ελέγχεται ανεξάρτητα από τις άλλες και η σύνδεση προχωρά καθώς προχωρά η επιλογή, πράγμα που αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό των βηματοπορικών συστημάτων.

Είναι όμως δυνατόν ο έλεγχος πολλών βαθμίδων να γίνεται μαζί, έτσι ώστε η κατάληψη μιας ζεύξεως να προλαμβάνεται εκτός και εάν αυτή αποτελεί μέρος της όλης σειράς σύνδεσης. Ένα τέτοιο σύστημα, ζευκτικό σύστημα (link system) ή *σύστημα επιλογής υπό συνθήκη (conditional selection system)*, φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Σε τέτοια συστήματα επιτυγχάνεται περαιτέρω μείωση του αριθμού των αναγκαίων επαφών, αφού μπορούν να χρησιμοποιηθούν μικρότερα όργανα. Η πρακτική αυτή είναι ακατάλληλη για βηματοπορικά συστήματα, αφού μετά την κατάληψη μιας εξόδου οργάνου της Α βαθμίδας, η κλήση θα είχε πρόσβαση σε μία μοναδική είσοδο της Γ βαθμίδας, που όμως με μεγάλη πιθανότητα θα είναι κατειλημμένη. Στο ζευκτικό σύστημα, αντίθετα, μια έξοδος της Α βαθμίδας δε καταλαμβάνεται εάν η αντίστοιχη είσοδος της Γ βαθμίδας δεν είναι ελεύθερη. Είναι προφανής εδώ και η ανάγκη ύπαρξης ενός καταχωρητή για την επίτευξη των ανωτέρω.

Για το παράδειγμα αυτό, ο συνολικός επαφών είναι 10×100×10 + 10×10×10 + 10×10×10 = 21.000 αντί των 30.000 του βηματοπορικού συστήματος. Στην πράξη βέβαια μπορούν να χρησιμοποιούνται περισσότερες βαθμίδες απ' ότι στα παραδείγματα. Τελειώνοντας, τονίζουμε ότι τα παραδείγματα που δόθηκαν απλώς επιδεικνύουν τις βασικές αρχές των μεθόδων και αυτό δε σημαίνει ότι είναι πρακτικά χρησιμοποιήσιμα ή θεωρητικά βέλτιστα.



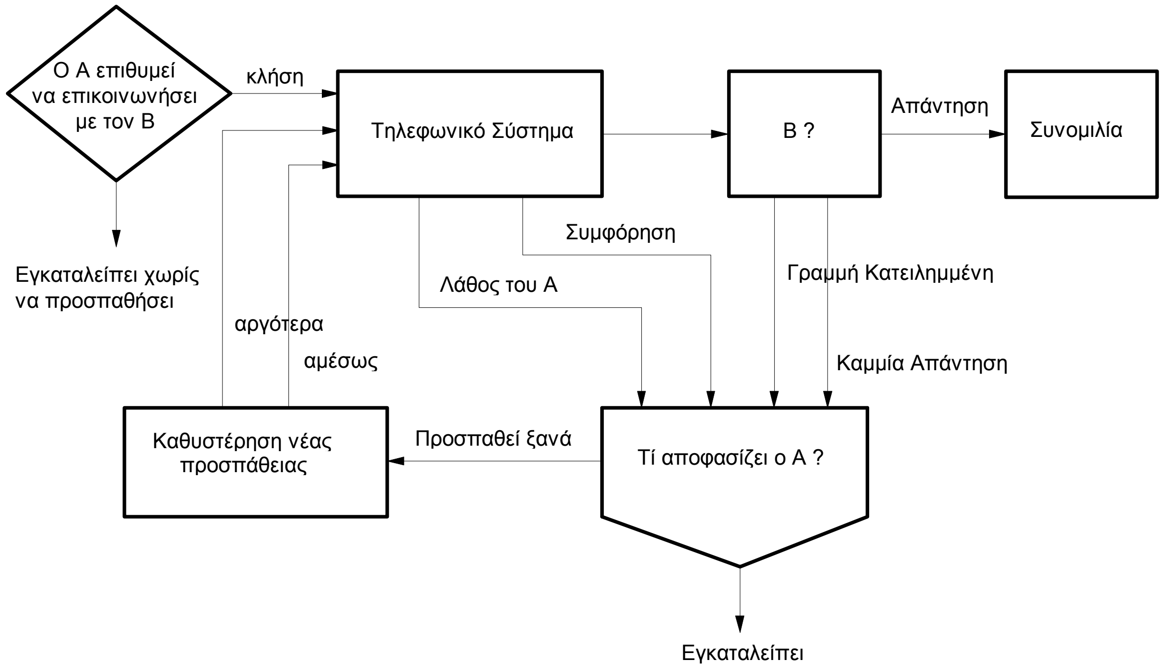
2. ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

2.1 Στοχαστικές ανελίξεις στην τηλεφωνία

Εν γένει οι τηλεφωνικές κλήσεις δημιουργούνται από τους συνδρομητές σε εντελώς τυχαίες χρονικές στιγμές και εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ιδιαίτερες ανάγκες και συνήθειες του κάθε συνδρομητή. Εάν ένας συνδρομητής Α επιθυμεί να μιλήσει με ένα συνδρομητή Β, το αποτέλεσμα θα είναι είτε η αποκατάσταση της επικοινωνίας ή εγκατάλειψη της προσπάθειας του Α. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η σειρά γεγονότων για την επίτευξη επικοινωνίας μεταξύ των Α και Β.

Η επικοινωνία μπορεί να επιτευχθεί αμέσως ή μετά ένα αριθμό αποτυχιών. Εν γένει όταν ένας συνδρομητής αποτυγχάνει στο να αποκαταστήσει μια σύνδεση με την πρώτη προσπάθεια, επαναλαμβάνει μέχρι να το επιτύχει. Έτσι δημιουργούνται *επαναλαμβανόμενες κλήσεις (repeated calls)*. Η καθυστέρηση με την οποία ο συνδρομητής επαναλαμβάνει την προσπάθεια του εξαρτάται κυρίως από την εκτίμησή του για την αιτία της αποτυχίας σύνδεσης.

Ο αριθμός των προσφερομένων κλήσεων σε ένα κέντρο ανά μονάδα χρόνου, ο *ρυθμός κλήσεων (calling rate)*, ποικίλει. Σε εμπορικές περιοχές και κατά τη διάρκεια των εργάσιμων ωρών μπορεί να είναι πολύ μεγάλος, ενώ κατά τη διάρκεια της νύχτας μειώνεται πάρα πολύ. Επιπλέον, εκτός των φυσιολογικών περιόδων αιχμής, ανώμαλα εξωτερικά γεγονότα συχνά δημιουργούν αυξημένες ροές κλήσεων και είναι δυνατόν τότε να έχουμε προσωρινά υπερβολικά κακή εξυπηρέτηση από το τηλεφωνικό κέντρο. Οι ίδιες ιδέες μπορεί να εφαρμοστούν και για τα εσωτερικά τμήματα ενός κέντρου αφού κάθε βαθμίδα λαμβάνει κλήσεις από τις προηγούμενες βαθμίδες. Οι κλήσεις αυτές παράγονται σε τυχαίες χρονικές στιγμές, όμως η ροή τους επηρεάζεται σημαντικά από τη δομή του κέντρου.



Η άφιξη των κλήσεων, ή όπως συνήθως καλείται, *διαδικασία εισόδου (input process)* είναι επομένως ένα τυχαίο φαινόμενο που χαρακτηρίζεται από πιθανοτικούς νόμους που ελέγχουν τους *χρόνους μεταξύ δύο διαδοχικών κλήσεων (interarrival times)* και από τον αριθμό των κλήσεων που φθάνουν μέσα σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα. Η διαδικασία εισόδου είναι επομένως μια *στοχαστική ανέλιξη (stochastic process)*. Όμοια η διάρκεια της συνομιλίας ή της κατάληψης ενός στοιχείου είναι και πάλι ένα τυχαίο φαινόμενο. Οι συνήθειες των συνδρομητών κυμαίνονται μεταξύ αυτών των συνδρομητών που κάνουν λίγες κλήσεις αλλά μιλούν επί πολύ και αυτών των συνδρομητών που κάνουν πολλές κλήσεις αλλά έχουν σύντομες συνδιαλέξεις. Επομένως η διάρκεια μια κλήσης, ο *χρόνος κατάληψης (holding time)*, καθορίζεται από ένα πιθανοτικό νόμο. Οι χρόνοι τερματισμού των κλήσεων συμβαίνουν λοιπόν σε τυχαίες χρονικές στιγμές και επηρεάζονται παρά πολύ από τη λειτουργία του συστήματος, επομένως οδηγούν σε μια δεύτερη στοχαστική ανέλιξη, τη *διαδικασία εξόδου (output process)*.

Είναι βολικό να αναφέρουμε τις αφίξεις και τους τερματισμούς των κλήσεων σαν *γεγονότα (events)*. Η χρονική στιγμή που συμβαίνει ένα γεγονός ανταποκρίνεται σε ένα σημείο στον άξονα των χρόνων. Έτσι οι αφικνούμενες κλήσεις στο σύστημα μπορεί να ειδωθούν σαν μια σειρά σημείων στον άξονα των χρόνων. Η στιγμή που μια κλήση φθάνει στο σύστημα σημειώνεται πάνω στον άξονα και το σύνολο των σημείων αυτών μπορεί να χαρακτηριστεί σαν μια ιδιαίτερη πραγματοποίηση της διαδικασίας εισόδου. Επιπλέον, οποιαδήποτε κατανομή σημείων στον άξονα του χρόνου μπορεί να θεωρηθεί σαν η πραγματοποίηση κάποιας διαδικασίας εισόδου. Τα ίδια ισχύουν και για τις χρονικές αναχωρήσεως των κλήσεων. Πρέπει να τονιστεί ότι διαδοχικά γεγονότα δεν είναι εν γένει ανεξάρτητα, π.χ., η άφιξη μιας κλήσης επηρεάζεται από τις αφίξεις προηγουμένων κλήσεων, όμοια ο τερματισμός μιας κλήσης κυρίως εξαρτάται από τη διάρκεια της συνομιλίας.

Οι ιδιότητες των διαδικασιών εισόδου και εξόδου μπορούν να εκφραστούν από τους πιθανοτικούς νόμους που κυβερνούν τη διάρκεια ζωής, δηλαδή, τη διάρκεια του χρόνου κατάληψης και των χρονικών διαστημάτων μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων. Οι διαδικασίες εισόδου και εξόδου μπορούν να περιγραφούν είτε με βάση το χρόνο που παρέχεται μεταξύ ενός αριθμού γεγονότων είτε με βάση τον αριθμό γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα. Η αμοιβαιότητα μεταξύ των δύο αυτών περιγραφών είναι πολλές φορές χρήσιμη για την αντιμετώπιση των προβλημάτων συμφόρησης. Όσον αφορά τη διαδικασία εξόδου πρέπει να διακρίνει κανείς τη διαφορά μεταξύ των *χρονικών διαστημάτων μεταξύ δύο διαδοχικών αναχωρήσεων (interdeparture times)* και του χρόνου κατάληψης μίας κλήσης.

Η *καθαρά τυχαία είσοδος (random, pure chance input)* είναι η γνωστότερη διαδικασία εισόδου. Μπορεί να περιγραφτεί προσεγγιστικά από την κατάσταση όπου υπάρχει μία ίδια πιθανότητα για τις προσφερόμενες κλήσεις να φθάσουν σε κάποιο χρονικό διάστημα ανεξάρτητα η μία από την άλλη και ανεξάρτητα από την κατάσταση του συστήματος. Τότε τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών κλήσεων είναι όλα ανεξάρτητα και ακολουθούν την *αρνητική εκθετική κατανομή (negative exponential distribution)* (α.ε.κ.), ενώ ο αριθμός των κλήσεων που φθάνουν μέσα σε ένα αυθαίρετο χρονικό διάστημα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Θεωρητική συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι ο αριθμός των πηγών να είναι άπειρος. Στην πράξη αυτό ικανοποιείται για τις κλήσεις που προσφέρονται στις πρώτες βαθμίδες από ένα μεγάλο αριθμό συνδρομητών, αφού αυτοί παράγουν κλήσεις σε τυχαίες στιγμές και δεν έχουν προηγούμενη γνώση της κατάστασης του κέντρου. Για τα επόμενα στάδια ο αριθμός των πηγών είναι της ίδιας τάξης με τον αριθμό των καναλιών και η ροή των κλήσεων *εξομαλύνεται (smoothed traffic)* παύοντας να είναι τυχαία. Ειδικότερα, οι κλήσεις που απέρχονται από κάποια βαθμίδα που τροφοδοτείται με τυχαία κίνηση θα χάσουν τον καθαρά τυχαίο χαρακτήρα τους. Αντίθετα, εάν οι ανεπιτυχείς κλήσεις σε μια βαθμίδα προσφέρονται σε κάποια άλλη (συνήθως υψηλότερης ιεραρχικής κατηγορίας βαθμίδα), τότε δημιουργείται μια *υπερροϊκή κίνηση (overflow traffic)* που χαρακτηρίζεται από τη *συσσώρευση των χρονικών στιγμών των αφίξεων (peaked traffic)*, αφού οι ανεπιτυχείς για την πρώτη βαθμίδα κλήσεις συμβαίνουν αναγκαστικά μέσα στα χρονικά διαστήματα όπου η βαθμίδα αυτή είναι πλήρως απασχολημένη και επιπλέον ανάμεσα στα διαστήματα αυτά παρεμβάλλονται διαστήματα όπου δε μπορεί να έχουμε ανεπιτυχείς κλήσεις.

Συχνά είναι αναγκαίο να εξετάσουμε και διαδικασίες εισόδου όπου ο *ρυθμός κλήσεων (calling rate)* μεταβάλλεται γραμμικά συναρτήσει του αριθμού των ελευθέρων πηγών. Αυτό είναι μια καλή θεωρητική προσέγγιση για την περίπτωση πεπερασμένου (μικρού) αριθμού πηγών. Προφανώς η πρώτη περίπτωση είναι το όριο της τελευταίας, όταν ο αριθμός των πηγών τείνει στο άπειρο. Άλλες παραλλαγές μπορούν να δημιουργηθούν εάν επιτραπεί η μεταβολή του ρυθμού αφίξεων με το χρόνο.

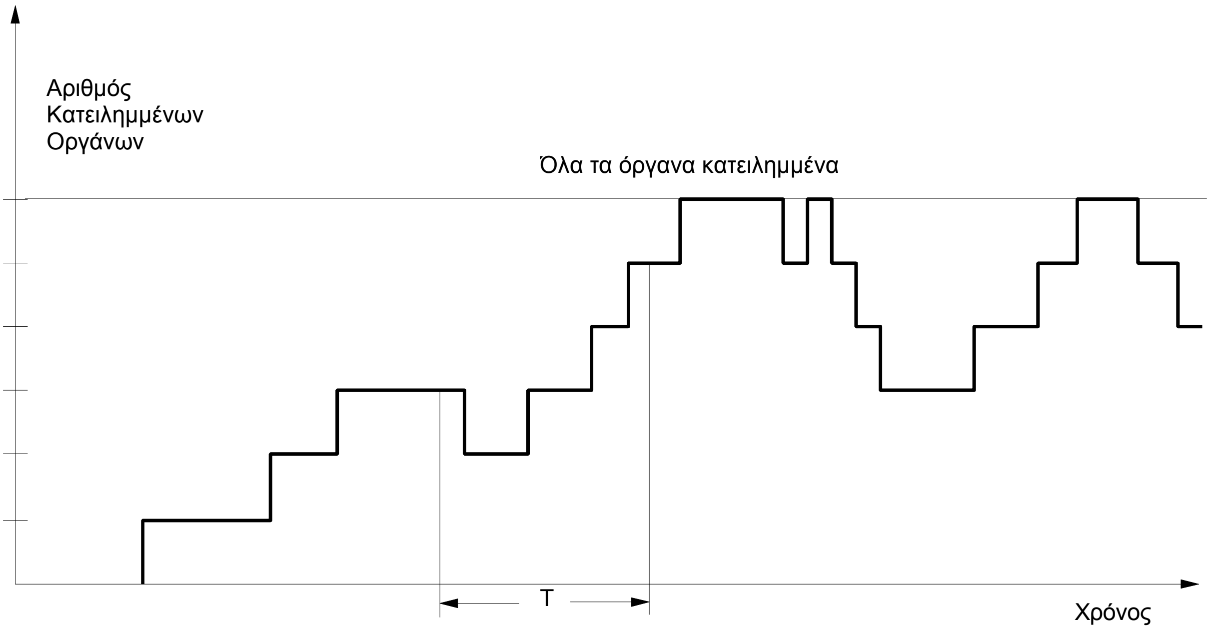
Η πιο κοινή διαδικασία τερματισμού είναι αυτή όπου έχουμε εκθετικούς χρόνους κατάληψης, δηλαδή, οι χρόνοι κατάληψης ακολουθούν αρνητική εκθετική κατανομή (α.ε.κ.). Όμως η περίπτωση *σταθερών (constant)* χρόνων καταλήψεις ή *κανονικών (regular)* αφίξεων συναντάται αρκετές φορές.

Η θεωρία τηλεφωνικής κίνησης ασχολείται με τα προβλήματα αναμονής και/ή απωλειών σε τηλεφωνικά συστήματα, όπως τον καθορισμό των συνδιαλέξεων υπό εξέλιξη, τον υπολογισμό της καθυστέρησης των κλήσεων, τον υπολογισμό του πλήθους των κατειλημμένων οργάνων, κλπ. Η ανάλυση των προβλημάτων αυτών εξαρτάται τόσο από τις διαδικασίες εισόδου και τερματικού κλήσεων όσο και τη δομή του συστήματος. Οι απαντήσεις στα προβλήματα αυτά δε μπορεί να είναι ακριβείς, υπό την έννοια ότι μπορούν να βρεθούν μόνον πιθανότητες ή μέσες τιμές για τα εξεταζόμενα μεγέθη.

2.2 Στατιστική Ισορροπία

Για λόγους ευκολίας θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε μια απλή ομάδα οργάνων πλήρους προσιτότητας. Υποθέτουμε ότι καταγράφουμε το στιγμιαίο αριθμό των κατειλημμένων οργάνων σε μια ομάδα για κάποιο χρονικό διάστημα. Ένα τέτοιο διάγραμμα θα έχει τη μορφή που φαίνεται στο επόμενο σχήμα, δηλαδή η σχετική καμπύλη παρουσιάζει βηματικές ασυνέχειες. Τα σημεία που έχουμε αύξηση (μείωση) αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές κατάληψης και ελευθέρωσης των οργάνων. Μια τέτοια καμπύλη αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη παρατήρηση. Για να λάβει κανείς πλήρη γνώση της συμπεριφοράς της ομάδας, πρέπει να λάβει ένα μεγάλο αριθμό τέτοιων γραφημάτων. Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι απλά ένα *δείγμα (sample)* της στοχαστικής ανέλιξης που περιγράφει τον αριθμό των απασχολημένων οργάνων. Το σύνολο αυτών των δειγμάτων περιγράφει επομένως όλες τις δυνατές εξελίξεις της διαδικασίας. Είναι προφανές ότι τα δείγματα διαφέρουν στις πιθανότητες εμφάνισής τους, άρα είναι βολικό να τα συσχετίσουμε με μια τυχαία μεταβλητή που να περιγράφει την πιθανότητα εμφάνισής τους. Τότε η στοχαστική ανέλιξη μπορεί να περιγραφεί σαν μια κανονική συνάρτηση του χρόνου και της τυχαίας μεταβλητής. Με τον εναλλακτικό αυτό τρόπο περιγραφής δε χρειάζεται επ’ ακριβής γνώση των δειγμάτων, αλλά η στοχαστική ανέλιξη μπορεί να περιγραφτεί (για το παράδειγμά μας) σαν μια οικογένεια στοχαστικών μεταβλητών, κάθε μία από τις οποίες παριστάνει τον αριθμό των απασχολημένων οργάνων σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Επομένως η ανέλιξη καθορίζεται αμέσως από τη συνάρτηση κατανομής για το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών που δίδουν την πιθανότητα να λάβει η ανέλιξη κάποια τιμή σε κάποιο χρονικό σημείο.

Η *μεταφερόμενη τηλεφωνική κίνηση (carried traffic)* ορίζεται σαν η μέση τιμή του αριθμού των απασχολημένων οργάνων της ομάδας. Μπορεί να βρεθεί από τη συνάρτηση κατανομής της στοχαστικής ανέλιξης και προφανώς εξαρτάται από το χρόνο (χωρική μέση τιμή). Εάν η στοχαστική ανέλιξη είναι *στατική (stationary)*, τότε ο χρόνος δεν υπεισέρχεται στη συνάρτηση κατανομής και επομένως η μέση τιμή είναι σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου. Όμως στην πράξη η χρονική μέση τιμή της κίνησης μπορεί να μετρηθεί για ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα. Η ύπαρξή της εξασφαλίζεται από το εργοδικό θεώρημα, εάν η στοχαστική ανέλιξη είναι στατική. Εάν επιπλέον η ανέλιξη είναι εργοδική, οι χρονικές μέσες τιμές είναι ανεξάρτητες του ιδιαίτερου δείγματος, αφού όλες είναι ίσες και το σημαντικότερο είναι ίσες με τη χωρική μέση τιμή. Δηλαδή, για εργοδικές στοχαστικές ανελίξεις ένα δείγμα έχει τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες με κάθε άλλο και επομένως αρκεί ένα απ’ αυτά για την περιγραφή της ανέλιξης. Για τις εφαρμογές της θεωρίας τηλεφωνικής κίνησης συνήθως υποτίθεται εργοδικότητα των εμπλεκομένων στοχαστικών ανελίξεων και τότε λέμε ότι οι διαδικασίες αυτές βρίσκονται σε στατιστική ισορροπία. Η έννοια αυτή είναι ουσιώδης για τη θεωρητική μελέτη και αναφέρεται στην υπόθεση εργοδικότητας των διαδικασιών.

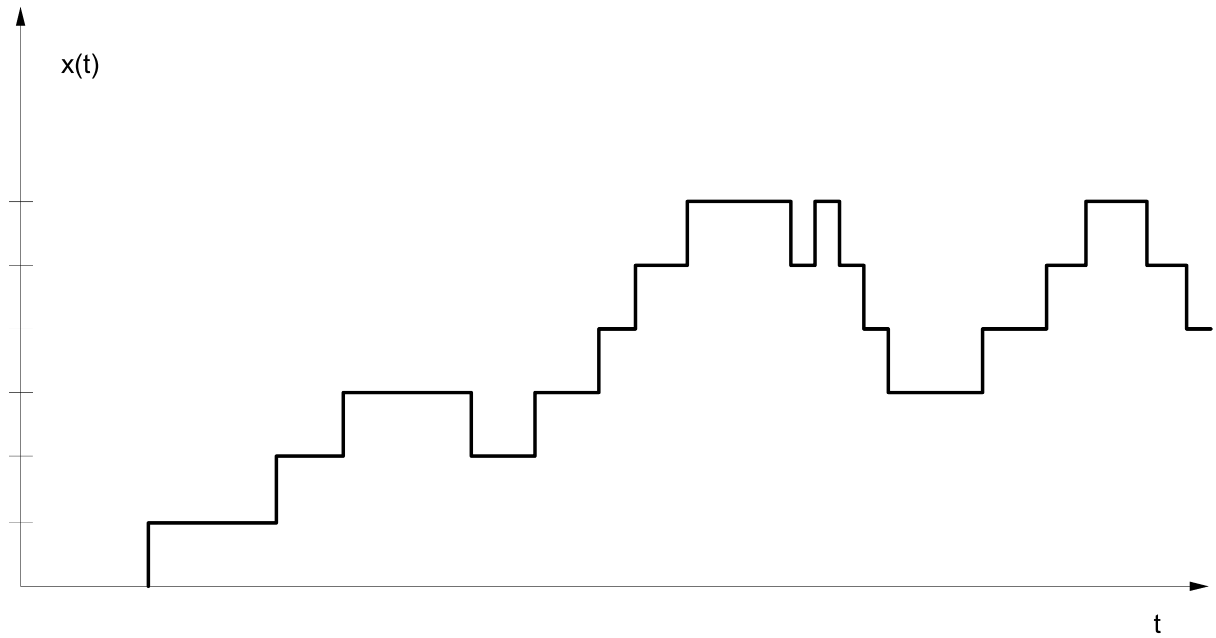


Εάν η *κατάσταση (status)* του συστήματος περιγράφεται από τον αριθμό των απασχολημένων οργάνων ή τον αριθμό των εξυπηρετουμένων ή καθυστερουμένων κλήσεων, τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι οι μεταβολές στους αριθμούς αυτούς που προκαλούνται από τις εισερχόμενες και απερχόμενες κλήσεις αντισταθμίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε οποιεσδήποτε αυξήσεις ή ελαττώσεις, σε ένα αρκούντως μικρό χρονικό διάστημα, να είναι του ιδίου μεγέθους. Η αρχή αυτή εφαρμόζεται για το σχηματισμό των εξισώσεων κατάστασης, που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων κατάστασης, δηλαδή, των πιθανοτήτων να έχουμε ένα κάποιο αριθμό κατειλημμένων οργάνων ή μια κλήση να χρειαστεί να αναμείνει κλπ. ή οποιαδήποτε άλλη πιθανότητα που μας ενδιαφέρει, που όμως είναι ανεξάρτητη από την ειδική χρονική στιγμή της περιόδου που το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία.

Στην πράξη αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι συμβαίνει κατά τη διάρκεια της *ώρας μέγιστης κίνησης (ΩΚΜ) (busy hour)*, που ορίζεται σαν η χρονική διάρκεια μιας ώρας κατά τη διάρκεια της οποίας έχουμε τη μεγαλύτερη κίνηση κατά τη διάρκεια μιας ημέρας. Τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι επικρατεί η κατάσταση της στατικής ισορροπίας. Οι υπολογισμοί που αναφέρονται στην ΩΚΜ είναι ανεξάρτητοι του χρόνου, δηλαδή, οι ιδιότητες που προκύπτουν από την εργοδικότητα χρησιμοποιούνται για αυτούς. Η ιδέα της ΩΚΜ αν και πολύ καλά καθιερωμένη είναι μάλλον ασαφής. Οι ΩΚΜ για διάφορα κομμάτια του συστήματος δε ταυτίζονται με την ΩΚΜ του όλου συστήματος, επίσης διαφέρουν από μέρα σε μέρα και από εποχή σε εποχή. Ο λόγος της κίνησης κατά την ΩΚΜ προς τη συνολική κίνηση της ημέρας καλείται *συντελεστής συγκέντρωσης (concentration factor)*.

2.3 Το Erlang

Είναι αναγκαίο να υπάρξει μια μονάδα κατάλληλη για τη μέτρηση της τηλεφωνικής κίνησης. Πολλοί ορισμοί τέτοιων μονάδων έχουν γίνει, όπως οι *TU (traffic unit)*, *UC (unit call)*, *CCS (hundred call seconds per hour)* και το *Erlang* που είναι η διεθνώς αποδεκτή μονάδα. Το Erlang ορίζεται ως εξής: *ο αριθμός Erlang (ένταση κίνησης) είναι ο μέσος αριθμός των ταυτοχρόνων καταλήψεων κατά τη διάρκεια μιας καθορισμένης χρονικής περιόδου Τ.* Ο ορισμός δεν αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη περίοδο Τ. Στην πράξη συνήθως Τ=1h. Για εργοδικές διαδικασίες το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του Τ και είναι το ίδιο για κάθε δείγμα. Στην πραγματικότητα το Erlang είναι μια αδιάστατη μονάδα (όπως το db, rad και η οκτάβα).



Έστω ότι για κάποιο σύστημα μας δίδεται ένα διάγραμμα του αριθμού των καταλήψεων x(t) κατά τη χρονική στιγμή t σαν συνάρτηση του χρόνου για μια περίοδο Τ (0≤t≤T), όπως στο σχήμα. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η x(t) είναι μια βηματική συνάρτηση που λαμβάνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Η x(t) αυξάνει κατά 1 για κάθε νέα κατάληψη και ελαττώνεται κατά 1 όταν μια κατάληψη παύσει. Τότε, η ένταση κίνησης Α για το διάστημα αυτό είναι βάσει του ορισμού

$$A = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{1}$$

Ο υπολογισμός του Α είναι πρακτικά εύκολος εάν ληφθούν υπόψη οι ιδιότητες της x(t). Έστω t_p το συνολικό χρονικό διάστημα όπου x(t)=p, προφανώς $0 \le t_p \le T$ για $p \ge 0$. Τότε

$$A = \frac{1}{T}\sum_{p=0}^{n} p t_p \tag{2}$$

όπου n ο μέγιστος αριθμός ταυτοχρόνων κλήσεων κατά το διάστημα Τ. Εναλλακτικά η ένταση κίνησης Α μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής: Έστω Ν το πλήθος των καταλήψεων κατά τη διάρκεια του Τ. Εάν t_ν η διάρκεια της ν-στής κατάληψης, τότε

$$A = \frac{1}{T}\sum_{\nu=0}^{N} t_\nu \tag{3}$$

Για τον υπολογισμό των t_ν, η διάρκεια των κλήσεων που είναι σε εξέλιξη κατά τη χρονική στιγμή t=0, αρχή του διαστήματος Τ, μετριέται από t=0, ενώ οι κλήσεις που παραμένουν σε εξέλιξη στο τέλος t=T του διαστήματος Τ θεωρούνται ότι διαρκούν μέχρι t=T. Η μέση διάρκεια 1/μ ή s μιας κατάληψης (χρόνος κατάληψης) μπορεί να εκτιμηθεί από την

$$s = 1/\mu \approx \bar{t} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N} t_\nu \tag{4}$$

Αφού η διάρκεια των κλήσεων σε εξέλιξη για t=0 και t=T υπο-εκτιμάται, $\bar{t} < s$. Ο ρυθμός κλήσεων λ πάλι εκτιμάται από την

$$\lambda = N/T \tag{5}$$

οπότε

$$A = \lambda/\mu = \lambda s \tag{6}$$

Αποδεικνύεται ότι η προηγούμενη σχέση δίδει την ένταση κίνησης όταν έχουμε στατιστική ισορροπία και οι διαδικασίες εισόδου και τερματισμού χαρακτηρίζονται από τους μέσους ρυθμούς άφιξης, λ, και μέσους χρόνους κατάληψης, 1/μ, αντίστοιχα.

Ένταση κίνησης 1 Erlang σημαίνει ότι ο μέσος αριθμός ταυτοχρόνων κλήσεων σε μια ομάδα οργάνων για κάποια χρονική περίοδο είναι ίσος με τη μονάδα. Εάν το πλήθος των οργάνων της ομάδας είναι ένα, αυτό σημαίνει ότι το μοναδικό όργανο της ομάδας είναι πλήρως απασχολημένο. Έτσι ένα όργανο μπορεί να μεταφέρει μόνο ένα Erlang το πολύ. Άρα για μια ομάδα n οργάνων, η κίνηση που μεταφέρεται ποτέ δε μπορεί να υπερβεί τα n Erlang.

Όλα τα προηγούμενα αναφέρονται στην ένταση της μεταφερόμενης κίνησης, όμως οι υπολογισμοί που γίνονται στη θεωρία τηλεφωνικής κίνησης βασίζονται στη γνώση της προσφερόμενης κίνησης. Η προσφερόμενη κίνηση δημιουργείται από τις κλήσεις που φθάνουν στο σύστημα άσχετα από τη μετέπειτα τύχη τους. Η ένταση της προσφερόμενης κίνησης ορίζεται ως εξής: *Ένταση προσφερόμενης κίνησης είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων στο σύστημα κατά τη διάρκεια του μέσου χρόνου κατάληψης*. Έτσι

$$A_o = \lambda_o/\mu_o \tag{7}$$

και

$$A_c = \lambda_c/\mu_c \quad (8)$$

όπου ο δείκτης "o" αναφέρεται στην *προσφερόμενη κίνηση (offered traffic)* και "c" στη *μεταφερόμενη κίνηση (carried traffic)*. Πρέπει να τονιστεί ότι το A_o είναι ένα υποθετικό μέγεθος. Μόνο τα λ_o, λ_c, A_c, και μ_c είναι μετρήσιμα μεγέθη. Συνήθως, δεχόμαστε ότι $\mu_o = \mu_c$. Επιπλέον πάντα $A_o \geq A_c$.

2.4 Μέτρα συμφόρησης

Όπως προαναφέραμε η Θεωρία Τηλεφωνικής Κίνησης ασχολείται με την ποσοτική μελέτη της ροής κίνησης σε τηλεφωνικά συστήματα και τον προσδιορισμό των απωλειών και καθυστερήσεων που συναντούν οι κλήσεις κατά τη διάρκεια της διέλευσής τους μέσω του συστήματος.

Για τη μελέτη αυτή τόσο οι ιδιότητες των πηγών όσο και των καναλιών πρέπει να ληφθούν υπόψη. Για τη λύση των προβλημάτων συμφόρησης οι επόμενοι παράγοντες πρέπει να καθοριστούν εξ αρχής:

i) Οι ιδιότητες των αφικνούμενων και των τερματιζόμενων κλήσεων.

ii) Η τύχη των ανεπιτυχών κλήσεων.

iii) Η δομή του συστήματος.

Όσον αφορά το i) συνήθως απαιτείται η γνώση των συναρτήσεων κατανομής των χρόνων κατάληψης και των χρονικών διαστημάτων ανάμεσα σε διαδοχικές κλήσεις, που κατά το μέγιστο δυνατό να αντιστοιχούν στις πραγματικές συνθήκες που παρατηρούνται στις διαδικασίες εισόδου και τερματισμού. Πρέπει να τονιστεί ότι είναι σχεδόν αδύνατο να σχηματιστεί ένα πλήρες και ακριβές μαθηματικό μοντέλο που να αναπαριστάνει τη φυσική πραγματικότητα.

Στο ii) απαιτείται γνώση του κατά πόσο το σύστημα λειτουργεί με βάση τη δυνατότητα απωλειών ή αναμονής κλήσεων ή συνδυασμό και των δύο και του κατά πόσο εξετάζεται η δυνατότητα επαναλαμβανόμενων κλήσεων. Σε αναμονητικά συστήματα η πολιτική εξυπηρέτησης (queue discipline) πρέπει επίσης να καθορίζεται. Έτσι τα τηλεφωνικά συστήματα κατατάσσονται σε:

1. *Συστήματα με απώλειες (Loss systems)*
2. *Αναμονητικά συστήματα (Delay systems)*

Για συστήματα με απώλειες επιπλέον μπορεί να υποτεθεί ότι:

α) Ανεπιτυχείς κλήσεις δε προκαλούν αύξηση του ρυθμού αφικνούμενων κλήσεων από τις αποκλεισμένες πηγές.

β) Ανεπιτυχείς κλήσεις προκαλούν γέννηση νέων προσπαθειών με κάποια δοθείσα πιθανότητα.

Η περίπτωση (α) οδηγεί σε απλούστερα μοντέλα. Για τα αναμονητικά συστήματα περαιτέρω μπορεί να υποτεθεί ότι:

α) Ανεπιτυχείς κλήσεις αναμένουν μέχρις εξυπηρέτησης

β) Ανεπιτυχείς κλήσεις εγκαταλείπουν με κάποια δοθείσα πιθανότητα

γ) Ανεπιτυχείς κλήσεις εγκαταλείπουν μετά την παρέλευση κάποιου χρονικού διαστήματος

Η περίπτωση (α) είναι και πάλι η απλούστερη. Η πολιτική εξυπηρέτησης αναφέρεται στο πως εκλέγεται κάποια από τις αναμένουσες κλήσεις σε ένα αναμονητικό σύστημα για εξυπηρέτηση. Συνηθισμένες τέτοιες μέθοδοι είναι:

α) *FCFS (first come, first served)*. Ο πρώτος που έφθασε εξυπηρετείται πρώτος (Ordered Queue).

β) *Τυχαία εξυπηρέτηση (Random Queue)*

γ) *Εφαρμογή προτεραιοτήτων (Priority Queue)*. Δηλαδή, σε κάθε κλήση επισυνάπτεται ένας αριθμός προτεραιότητας που εξαρτάται από την προέλευσή της ή το είδος της. Το σύστημα εξυπηρετεί πρώτα την κλήση με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα.

Η περίπτωση (α) οδηγεί στα απλούστερα μαθηματικά μοντέλα, ενώ η (γ) είναι η περισσότερο εφαρμοζόμενη στην πράξη.

Όσον αφορά το iii) είναι ουσιώδες να γνωρίζουμε πόσες ομάδες οργάνων εξετάζονται, ποια μέθοδος χρησιμοποιείται για τη διασύνδεσή τους (πλήρης προσιτότητα, μεικτονόμηση, ζευκτικό σύστημα), τη θέση τους μέσα το τηλεπικοινωνιακό δίκτυο καθώς και το μέγεθος των ομάδων, τον αριθμό των πηγών και των καναλιών. Επίσης σημασία έχει και η μέθοδος αναζήτησης *ελεύθερου καναλιού (hunting method)*. Υπάρχουν δύο τέτοιες βασικές μέθοδοι:

α) *Ακολουθιακή αναζήτηση (Sequential hunting)*, όπου η εύρεση ενός ελεύθερου καναλιού αρχίζει από την ίδια πάντα θέση, γίνεται με την ίδια πάντα σειρά και το πρώτο ελεύθερο κανάλι καταλαμβάνεται.

β) *Τυχαία αναζήτηση (Random hunting)*. Εδώ κάθε κανάλι έχει την ίδια πιθανότητα να καταληφθεί.

Η σημασία της μεθόδου αναζήτησης είναι μικρή για ομάδες πλήρους προσιτότητας, όμως διαφορετικές τεχνικές μεικτονόμησης είναι κατάλληλες για διαφορετικά είδη μεθόδου αναζήτησης. Συνοπτικά, το σημείο (i) αναφέρεται στη συμπεριφορά των συνδρομητών ή των άλλων πηγών, ενώ το (ii) βρίσκεται κάπου ανάμεσα από τα προηγούμενα.

Το βασικό πρόβλημα της θεωρίας Τηλεφωνικής Κίνησης μπορεί να τεθεί ως εξής: *Δοθέντων των χαρακτηριστικών της κίνησης και της δομής του συστήματος, να βρεθεί πόσα όργανα πρέπει να τοποθετηθούν σε κάθε ομάδα ή πόσες ομάδες σε κάθε στάδιο, ώστε η ενόχληση ενός συνδρομητή από τη συμφόρηση να μην υπερβαίνει κάποια προκαθορισμένα όρια.*

Τα βασικά μαθηματικά εργαλεία για την αντιμετώπιση των ανωτέρω παρέχονται από τη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικών Ανελίξεων, όμως πρέπει να καθορίσει κανείς με αντικειμενικό τρόπο του τι εννοείται με τον όρο "ενόχληση λόγω συμφόρησης" ενός συνδρομητή. Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι οι υποκειμενικές ανάγκες των συνδρομητών αγνοούνται, αλλά απλώς ότι είναι αναγκαία η εισαγωγή καλώς καθορισμένων μέτρων συμφόρησης, που μετρούν αντικειμενικά τα αποτελέσματα της συμφόρησης σε αναμονητικά ή συστήματα με απώλειες. Θεωρητικά, το βασικό πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της τιμής των μέτρων αυτών συμφόρησης με βάση τις υποθέσεις για τις ιδιότητες των κλήσεων και του τρόπου χειρισμού των από το σύστημα.

Ανάμεσα στα διάφορα μέτρα συμφόρησης για συστήματα με απώλειες δύο είναι τα συχνότερα χρησιμοποιούμενα: *Συμφόρηση κλήσεων (call congestion)* και *Συμφόρηση χρόνου (time congestion)*, που επίσης αποκαλούνται *πιθανότητα αποκλεισμού (blocking probability)* και *πιθανότητα απώλειας (loss probability)*, αντίστοιχα. Πιθανότητα αποκλεισμού ή συμφόρηση κλήσεων είναι η πιθανότητα μια αφικνούμενη κλήση να βρει το σύστημα αποκλεισμένο και επομένως να χαθεί, ή εναλλακτικά, είναι ο λόγος του αριθμού των χαμένων κλήσεων προς τον αριθμό των προσφερομένων κλήσεων για κάποιο χρονικό διάστημα. Πιθανότητα απώλειας ή συμφόρηση χρόνου είναι η πιθανότητα να είναι το σύστημα αποκλεισμένο, ή εναλλακτικά, είναι ο λόγος του χρόνου κατά τον οποίο συμβαίνει αποκλεισμός προς το συνολικό χρόνο παρατήρησης.

Οι ορισμοί που δόθηκαν αναφέρονται σε συνθήκες στατιστικής ισορροπίας. Εν γένει η συμφόρηση χρόνου και κλήσεων δεν είναι ίσες, παρότι σε πρακτικές περιπτώσεις οι διαφορές βρίσκονται να είναι μικρές. Σε συστήματα πλήρους προσιτότητας με τυχαία (Poisson) είσοδο τα δύο αυτά μέτρα συμφόρησης ταυτίζονται.

Η πιθανότητα αποκλεισμού λόγω του ορισμού της σαν η πιθανότητα μια κλήση να χαθεί, συνήθως, θεωρείται καλύτερο μέτρο για την ενόχληση που δημιουργείται στο συνδρομητή από τη συμφόρηση απ' ότι η πιθανότητα απώλειας, αν και μερικοί θεωρούν σωστό το αντίθετο. Σε *ζευκτικά συστήματα (link systems)* μπορεί να συμβεί και εσωτερικός αποκλεισμός. Η πιθανότητα του να έχουμε εσωτερική συμφόρηση συνήθως εκφράζεται σαν συμφόρηση χρόνου.

Όσον αφορά τα αναμονητικά συστήματα, η ενόχληση που δημιουργείται στο συνδρομητή λόγω της συμφόρησης έχει διαφορετικό χαρακτήρα απ' ότι σε συστήματα με απώλειες. Οι κλήσεις εδώ καθυστερούν, δεν απορρίπτονται. Ένας νέος παράγων, ο *χρόνος αναμονής (waiting time)* των κλήσεων είναι το κύριο αντικείμενο της μελέτης εδώ και το σημαντικότερο μέτρο συμφόρησης είναι η συνάρτηση κατανομής του, δηλαδή, η πιθανότητα η καθυστέρηση την οποία υφίστανται οι κλήσεις να μην υπερβαίνει ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα. Από αυτήν προκύπτουν και άλλα μέτρα καθυστέρησης όπως: η *πιθανότητα καθυστέρησης (probability of delay)*, ο *μέσος χρόνος αναμονής (mean waiting time)*, ο *μέσος αριθμός αναμενουσών κλήσεων (average number of waiting calls)*, κλπ.

Η πιθανότητα καθυστέρησης είναι το ποσοστό των καθυστερουμένων κλήσεων προς το συνολικό αριθμό κλήσεων που παρατηρούνται σε κάποια χρονική περίοδο. Ο ίδιος όρος χρησιμοποιείται επίσης και για το ποσοστό του χρόνου κατά τον οποίο όλα τα όργανα μιας ομάδας είναι κατειλημμένα. Οι δύο αυτοί όροι αντιστοιχούν στους όρους συμφόρηση κλήσεων και χρόνου για τα συστήματα με απώλειες. Τέλος υπάρχει και ένας τρίτος ορισμός στενά συνδεδεμένος με τον προηγούμενο δηλαδή η πιθανότητα να υπάρχουν κλήσεις σε αναμονή. Υπάρχει εδώ μια έλλειψη καθιερωμένης ορολογίας και για να διακρίνουμε τους τρεις αυτούς ορισμούς θα αναφερόμεθα σ' αυτούς σαν συμφόρηση κλήσεων, συμφόρηση χρόνου και πιθανότητα ύπαρξης κλήσεων σε αναμονή. Τέλος ο γενικός όρος *βαθμός εξυπηρέτησης (grade of service) (GOS)* χρησιμοποιείται σαν μέτρο της εξυπηρέτησης που παρέχεται από το σύστημα. Η αριθμητική τιμή του αντιπροσωπεύει κάποιο από τα προαναφερθέντα μέτρα συμφόρησης.

2.5 Σχεδιασμός

Για ένα σύστημα, με επιλεγμένο το μέτρο συμφόρησης, το πρακτικό πρόβλημα είναι η εύρεση του πλήθους των αναγκαίων οργάνων ή *διαστασιολόγηση (dimensioning)* για δοθείσα προσφερόμενη κίνηση και ένα υποτιθέμενο βαθμό εξυπηρέτησης. Το προσφερόμενο φορτίο συνήθως θεωρείται γνωστό εκ των προτέρων. Κατά το σχεδιασμό ζητείται να προσδιοριστεί η *δρομολόγηση (routing)* της κίνησης και μια εκτίμηση του μεγέθους του μεταγωγικού εξοπλισμού κατά τον πιο αποδοτικό και οικονομικό τρόπο.

Σαν παράδειγμα ένα απλό κέντρο μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από ανεξάρτητα τμήματα και οι υπολογισμοί να γίνουν από στάδιο σε στάδιο. Όμως η αλληλεξάρτηση των ομάδων ή των βαθμίδων πρέπει πολλές φορές να ληφθεί υπόψη, επειδή ο καταμερισμός ή η συγκέντρωση της κίνησης επηρεάζει προφανώς τις ιδιότητες του συστήματος, όπως π.χ. στα ζευκτικά συστήματα.

Ο σχεδιασμός, επίσης, τηλεφωνικών δικτύων που διασυνδέουν πολλά κέντρα παρουσιάζει σημαντικά πρακτικά και θεωρητικά προβλήματα. Σε πολλά προβλήματα, όπου η θεωρητική λύση είναι υπερβολικά πολύπλοκη ή και δεν υπάρχει, καταφεύγουμε στην *εξομοίωση (simulation)* ή σε πειράματα με τεχνητή κίνηση. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να γίνει επίσης και έλεγχος των θεωρητικών υποθέσεων που γίνονται.

Τέλος πρέπει να τονιστεί ότι οι υπολογισμοί γίνονται συνήθως βάση της αποκαλούμενης *αρχής σταθερού βαθμού εξυπηρέτησης (fixed grade of service principle)*. Μοντέρνες μέθοδοι όμως εφαρμόζουν την *αρχή του Moe (Moe's principle)*, όπου αντικειμενικός σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος του κόστους του συστήματος και της απώλειας εισοδήματος λόγω χαμένης κίνησης.

2.6 Ασκήσεις

1. Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο 1000 συνδρομητών κατά την ΩΜΚ κάθε γραμμή (συνδρομητικός βρόγχος) παράγει κατά μέσο όρο 2,5 κλήσεις. Η μέση διάρκεια κάθε κλήσης είναι 90 sec. Να βρεθεί η ένταση της εισερχόμενης τηλεφωνικής κίνησης στο κέντρο σε Erlang και σε CCS.

2. Ένα τηλεφωνικό κέντρο έχει 10000 συνδρομητές.

   α) Εάν ο βαθμός χρησιμοποιήσεως κάθε τηλεφωνικής συσκευής κατά την Ω.Μ.Κ. είναι 15% ποια είναι η ένταση της εισερχόμενης κίνησης στο κέντρο.

   β) Εάν ο μέσος χρόνος κατάληψης μιας γραμμής είναι 90 sec και κάθε συνδρομητής παράγει 4 κλήσεις ανά ώρα κατά μέσο όρο ποια είναι η αντίστοιχη ένταση κίνησης.

3. Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο οι αφίξεις κλήσεων ακολουθούν μια διαδικασία Poisson με μέσο χρόνο μεταξύ αφίξεων 50 msec κατά την ΩΜΚ. Ο μέσος χρόνος κατάληψης είναι 100 sec. Ποια είναι η τιμή της εντάσεως της τηλεφωνικής κίνησης.

4. Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο 10000 συνδρομητών την ΩΜΚ κάθε 3 min μετράμε τον αριθμό των απασχολημένων συνδρομητικών βρόχων. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι αντίστοιχα 940, 952, 932, 885, 905, 913, 947, 985, 1003, 1078, 1130, 1205, 1056, 965, 929, 936, 919, 973, 941, 995. Υπολογίστε την παραγόμενη ανά συνδρομητικό βρόχο κίνηση σε Erlang.

5. Σε μια πλήρως προσιτή ομάδα 4 γραμμών έγιναν παρατηρήσεις κατά διαστήματα 1 min κατά τη διάρκεια 10 ωρών μέγιστης κίνησης, οπότε παρατηρήθηκε ότι 0,1,2,3,4, γραμμές ήταν κατειλημμένες σε 89, 164, 173, 114, 60 περιπτώσεις αντίστοιχα. Ο συνολικός αριθμός των απολεσθέντων κλήσεων είναι 34. Υποθέτοντας ότι η συμφόρηση κλήσεων και χρόνου είναι ίσες και χωρίς να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Erlang να εκτιμηθούν:

   α) Η μεταφερόμενη κίνηση,

   β) Η μέση διάρκεια κλήσης

   γ) Το προσφερόμενο φορτίο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

1. ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη της θεωρίας τηλεφωνικής κίνησης ξεκίνησε από τις αρχές του παρόντα αιώνα. Οι εργασίες του Δανού A.K. Erlang που δημοσιεύθηκαν από το 1909 μέχρι το 1928 αποτέλεσαν την πρωτοπορία στο πεδίο αυτό. Η θεωρία τηλεφωνικής κίνησης που μπορεί να εφαρμοστεί σε πρακτικές περιπτώσεις βασίζεται στην υπόθεση της στατιστικής ισορροπίας, δηλαδή, μπορεί να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις στατικών συνθηκών. Για μη στατικές συνθήκες δεν υπάρχουν ακόμη πρακτικές μέθοδοι υπολογισμού. Το θεωρητικό υπόβαθρο για την αντιμετώπιση τέτοιων καταστάσεων αναπτύχθηκε από το Σουηδό C. Palm στη διδακτορική διατριβή του το 1943, όπου μελέτησε τις μεταβολές στην ένταση κίνησης. Ότι θα αναπτυχθεί κατωτέρω, όμως, θα αναφέρεται αποκλειστικά σε στατικές συνθήκες. Οι εργασίες που έχουν γίνει στην περιοχή από το 1909 ασχολήθηκαν με συνδυασμούς διαφόρων υποθέσεων και βασίστηκαν σε διάφορα επίπεδα γνώσης του θέματος και μερικώς χρησιμοποιούν διαφορετική ορολογία. Μια ανασκόπηση αυτών των αποτελεσμάτων δε θα παρείχε μία καλή άποψη των δυνατοτήτων της θεωρίας για την περιγραφή των διαφόρων καταστάσεων που προκύπτουν στην πράξη. Στη συνεχεία θα παρουσιάσουμε τη θεωρία τηλεφωνικής κίνησης με μια πιο γενική μορφή, από την οποία μπορούν να προκύψουν διάφορες ειδικές περιπτώσεις. Προηγουμένως όμως θα γίνει μια σύντομη ανασκόπηση διαφόρων στοιχείων από τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Στη συνέχεια, μετά μια σύντομη ανασκόπηση βασικών εννοιών και στοιχείων από τις στοχαστικές ανελίξεις, θα αναπτυχθούν ιδιαίτερα η διαδικασία Poisson και η διαδικασία γεννήσεων-θανάτων που αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη της στοιχειώδους θεωρίας τηλεφωνικής κίνησης.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

2.1. Τυχαίες μεταβλητές και θεωρία πιθανοτήτων.

Η *συνάρτηση κατανομής (distribution function)* F(x) της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x από τη σχέση

$$F(x) = P\{X \le x\} \tag{1}$$

Μια τυχαία μεταβλητή x λέγεται *διακριτή (discrete)* εάν το σύνολο των δυνατών τιμών της είναι *απαριθμήσιμο (countable)*. Για διακριτές τυχαίες μεταβλητές ορίζουμε τη *συνάρτηση μάζας πιθανότητας (probability mass function)* με τη σχέση

$$p(x) = P\{X = x\} \tag{2}$$

$$F(x) = \sum_{y \le x} p(x) \tag{3}$$

Μια τυχαία μεταβλητή λέγεται *συνεχής (continuous)* εάν υπάρχει μια συνάρτηση F(x), που καλείται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function)*, τέτοια ώστε

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)dx \quad \text{για κάθε Borel σύνολο B.} \tag{4}$$

Αφού

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \tag{5}$$

προκύπτει ότι

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{6}$$

Η *αναμενόμενη ή μέση τιμή (expected, average, mean value)* μιας τυχαίας μεταβλητής X θα συμβολίζεται με E{X} και ορίζεται από τη σχέση

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{εάν X συνεχής} \\ \sum_x x p(x) & \text{εάν X διακριτή} \end{cases} \quad (7)$$

υπό την προϋπόθεση ότι το προηγούμενο ολοκλήρωμα υπάρχει. Από την Εξ. (7) προκύπτει και η μέση τιμή κάθε συνάρτησης της X, έστω h(x). Αφού η h(x) είναι η ίδια μια τυχαία μεταβλητή, από την Εξ. (7) έχουμε

$$E\{h(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_h(x) \quad (8)$$

όπου F_h είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής h(x). Όμως μπορεί τότε να αποδειχτεί ότι

$$E\{h(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x) \quad (9)$$

Ο υπολογισμός της $F_h(x)$ ή της $f_h(x)$ από την F(x) ή f(x) είναι εν γένει πολύπλοκος, όμως η Εξ. (9) (γνωστή και σαν *law of the unconscious statistician*) δίδει ένα άμεσο τρόπο υπολογισμού.

Η *μεταβλητότητα (variance)* της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τη σχέση

$$\sigma_X^2 = E\left\{(X - E\{X\})^2\right\} \quad (10)$$

Η τετραγωνική ρίζα, σ_X, της μεταβλητότητας καλείται *τυπική απόκλιση (standard deviation)*. Ο *συντελεστής μεταβλητότητας (coefficient of variation)* C_X μιας τυχαίας μεταβλητής είναι ο λόγος της τυπικής αποκλίσεως της προς τη μέση τιμή της, δηλαδή,

$$C_X = \frac{\sigma_X}{E\{X\}} \quad (11)$$

Η *ν-στή ροπή* της X ορίζεται από τη σχέση

$$E\{X^\nu\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu f(x) dx \quad (12)$$

ενώ η *ν-στή κεντρική ροπή* είναι η $E\left\{(X - E\{X\})^\nu\right\}$

2.2. Από κοινού κατανομή τυχαίων μεταβλητών

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής F δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y ορίζεται από την

$$F(x,y) = P\ \{X \le x, Y \le y\} \quad (1)$$

Οι κατανομές

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y) \quad (2)$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y) \quad (3)$$

καλούνται *περιθώριοι κατανομές (marginal distributions)* των X και Y. Οι X και Y λέγονται *ανεξάρτητες (independent)* εάν

$$F(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y) \tag{4}$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y. Μπορεί να αποδειχτεί ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες εάν και μόνο εάν

$$E\{g(X)h(Y)\}=E\{g(X)\}E\{h(Y)\} \tag{5}$$

για όλες τις συναρτήσεις g και h για τις οποίες υπάρχουν οι ανωτέρω μέσες τιμές.

Δύο από κοινού κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές X και Y λέγονται *ασυσχέτιστες (uncorreleted)* εάν η *συμμεταβλητότητά (covariance)* τους, οριζόμενη από την

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-E\{X\})(Y-E\{Y\})\}=E\{XY\}-E\{X\}E\{Y\} \tag{6}$$

είναι μηδέν. Προκύπτει ότι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές είναι και ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο όμως δεν είναι αληθές.

Δύο τυχαίες μεταβλητές λέγονται από κοινού συνεχείς εάν υπάρχει μια συνάρτηση F(x,y), καλούμενη *από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*, τέτοια ώστε

$$P\{X \in A, Y \in B\} = \int_A \int_B f(x,y)\,dx\,dy \tag{7}$$

για κάθε Borel σύνολο A και B.

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής για ένα σύνολο X_1, X_2, X_3,...,X_n τυχαίων μεταβλητών ορίζεται από την

$$F(x_1, x_2,..., x_n)=P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2,..., X_n \le x_n\} \tag{8}$$

Επιπλέον οι τυχαίες μεταβλητές λέγονται ανεξάρτητες εάν

$$F(x_1, x_2,..., x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdot ...\cdot F_{X_n}(x_n) \tag{9}$$

όπου

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{x_j \to \infty, j \ne i} F(x_1, x_2, ... x_n), \quad \forall i \tag{10}$$

2.3. Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις. Γεννήτριες Συναρτήσεις. Μετασχηματισμοί.

Χαρακτηριστική συνάρτηση (characteristic function) φ(·) της X καλείται η συνάρτηση, που ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό u, από την

$$\varphi(u) = E\{e^{juX}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}\,dF(x) \tag{1}$$

Μια τυχαία μεταβλητή πάντα έχει μια χαρακτηριστική συνάρτηση, δηλαδή, το ανωτέρω ολοκλήρωμα πάντα υπάρχει και αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των συναρτήσεων κατανομής και των χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Εν γένει ισχύει

$$\left.\frac{d^n \varphi(u)}{du^n}\right|_{u=0} = \varphi^{(n)}(0) = j^n E\{X^n\} \tag{2}$$

Η *γεννήτρια συνάρτηση ροπών (moment generating function)* M(·) της X ορίζεται για κάθε πραγματικό v από την

$$M(v) = E\left\{e^{vX}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{vx} f(x)dx \tag{3}$$

και ισχύει

$$M^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n M(v)}{dv^n}\right|_{v=0} = E\left\{X^n\right\} \tag{4}$$

Η Εξ. (4) δικαιολογεί και την ονομασία

Ο μετασχηματισμός Laplace $F^*(s)$ της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X ορίζεται από την

$$F^*(s) = E\left\{e^{-sX}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx \tag{5}$$

όπου s είναι μια μιγαδική μεταβλητή. Για μη *αρνητικές τυχαίες* μεταβλητές, ο προηγούμενος "δίπλευρος" μετασχηματισμός καταλήγει στην

$$F^*(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx \tag{6}$$

Αποδεικνύεται ότι

$$F^{*(n)}(0) = \left.\frac{d^n F^*(s)}{ds^n}\right|_{s=0} = (-1)^n E\left\{X^n\right\} \tag{7}$$

Είναι προφανές ότι οι προαναφερθείσες συναρτήσεις σχετίζονται στενά αφού

$$\varphi(js) = M(-s) = F^*(s) \tag{8}$$

Παρατηρείστε επίσης την ομοιότητα στις Εξ. (2), (4) και (7) που δίδουν τις n-στές ροπές της X.

Για την περίπτωση διακριτών τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη *γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων (probability generating function)* G(z) που ορίζεται από την

$$G(x) = E\left\{e^{zX}\right\} = \sum_k p(k) z^k \tag{9}$$

2.4. Συνέλιξη

Μια από τις πιο χρήσιμες εφαρμογές των γεννητριών (χαρακτηριστικών) συναρτήσεων είναι στην εύρεση της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής που προκύπτει σαν άθροισμα άλλων τυχαίων ανεξάρτητων μεταβλητών. Έστω X και Y δύο τυχαίες ανεξάρτητες μεταβλητές με αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής F και G. Τότε η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X+Y δίδεται από την F⊗G όπου

$$F \otimes G(t) = \iint_{X+Y \le t} dF(x)dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-y} dF(x)dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-y)dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)dF(x) \tag{1}$$

Η πράξη F⊗G καλείται *συνέλιξη (convolution)*. Το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικεύεται και για η τυχαίες μεταβλητές. Αποδεικνύεται όμως επίσης ότι

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(u) &= \varphi_X(u)\varphi_Y(u) \\ F^*_{X+Y}(s) &= F^*_X(s)F^*_Y(s) \end{aligned} \tag{2}$$

Εν γένει, εάν $X=X_1+X_2+...+X_n$, όπου X_i, i=1,2,...,n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$\varphi_X(u) = \varphi_{X_1}(u)\varphi_{X_2}(u)...\varphi_{X_n}(u) \tag{3}$$

Το ίδιο ισχύει και για το μετασχηματισμό Laplace.

Ένα παραπλήσιο ερώτημα που μπορεί να απαντηθεί με τη χρήση γεννητριών συναρτήσεων είναι η εύρεση της κατανομής ενός αθροίσματος ταυτοτικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών όπου το πλήθος των όρων του αθροίσματος είναι και αυτό μια τυχαία μεταβλητή. Έστω δηλαδή

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{4}$$

όπου μια N διακριτή τυχαία μεταβλητή και X_i ένα σύνολο ταυτοτικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών. Τότε

$$Y^*(s) = N\,(X^*(s)) \tag{5}$$

όπου $Y^*(s)$, $X^*(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των Y και X αντίστοιχα και N(z) η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων της N.

2.5. Υπό συνθήκη πιθανότητες

Εάν X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές τότε η *υπό συνθήκη (conditional)* συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Y δοθείσης της X, ορίζεται για όλα τα x τέτοια ώστε P{X=x}>0, από την

$$P_{Y|X}(y|x) = P\{Y = y|X = x\} = \frac{P\{Y = y, X = x\}}{P\{X = x\}} \tag{1}$$

Όμοια, η υπό συνθήκη συνάρτηση κατανομής $F_{Y|X}(y|x)$ της δοθείσης της X ορίζεται για όλα τα x τέτοια ώστε P{X=x} > 0 από την

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \le y|X = x\} = \sum_{y' \le y} P_{Y|X}(y'|x) \tag{2}$$

Η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή της Y δοθείσης της X ορίζεται για κάθε x τέτοιο ώστε P{X=x}>0 από την

$$E\{Y|X = x\} = \int_{-\infty}^{\infty} y\,dF_{Y|X}(y|x) = \sum_{y} yP_{Y|X}(y|x) \tag{3}$$

Εάν οι X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής $F_{Y|X}(y|x)$, η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y δοθείσης της X ορίζεται για κάθε x τέτοιο ώστε $f_X(x)>0$ από την

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \tag{4}$$

και η υπό συνθήκη συνάρτηση κατανομής της Y δοθείσης της X από την

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \le y|X = x\} = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y'|x)dy' \tag{5}$$

Η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή της Y δοθείσης της X ορίζεται για κάθε x τέτοιο ώστε $f_X(x)>0$ από την

$$E\{Y|X=x\} = \int_{-\infty}^{\infty} y\,dF_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy \tag{6}$$

Εάν συμβολίζουμε με E{Y|X} τη συνάρτηση της X της οποίας η τιμή στο X=x είναι η E{Y|X=x}, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει η επόμενη εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα για τις υπό συνθήκη μέσες τιμές για όλες τις τυχαίες μεταβλητές X και Y, δηλαδή

$$E\{Y\} = E\{E\{Y|X\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{Y|X=x\}dF(x) \tag{7}$$

από την προϋπόθεση ότι σχετικές αναμενόμενες τιμές υπάρχουν. Η Εξ. (7) δείχνει ότι για να βρούμε την αναμενόμενη τιμή της Y μπορούμε πρώτα να βρούμε τις υπό συνθήκη πιθανότητες, E{Y|X}, ως προς X και μετά να βρούμε τη μέση τιμή ως προς X της προηγούμενης ποσότητας.

2.6. Συναρτησιακές Εξισώσεις και η Έλλειψη Μνήμης της Εκθετικής Κατανομής

Οι επόμενες δύο συναρτησιακές εξισώσεις συναντώνται συχνά στη θεωρία πιθανοτήτων

$$f(s+t) = f(s)\cdot f(t), \text{ για κάθε } s,t > 0 \tag{1}$$

$$f(s+t) = f(s)+f(t) \text{ για κάθε } s,t > 0 \tag{2}$$

Αποδεικνύεται ότι η μόνη (μετρήσιμη) λύση των συναρτησιακών αυτών συναρτήσεων είναι της μορφής

$$f(t) = e^{-\lambda t} \tag{3}$$

και

$$f(t) = \lambda t \tag{4}$$

αντίστοιχα.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (1) για να αποδείξουμε ότι η εκθετική συνάρτηση είναι η μοναδική κατανομή με έλλειψη μνήμης. Μια τυχαία μεταβλητή λέγεται ότι δεν έχει μνήμη, εάν

$$P\{X>s+t|X>t\} = P\{X>s\}, \text{ για κάθε } s,t > 0 \tag{5}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αυτό ισχύει για την εκθετική κατανομή, αφού εάν η x είναι εκθετικά κατανεμημένη

$$P\{X\leq s\}=1-e^{-\lambda t} \text{ ή } P\{X>s\}=e^{-\lambda t} \tag{6}$$

και

$$P\{X>s+t|X>t\} = \frac{P\{X>s+t, X>t\}}{P\{X>t\}} = \frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>t\}} \tag{7}$$

Για την απόδειξη της μοναδικότητας, έστω

$$\overline{F} = P\{X>x\} \tag{8}$$

τότε η Εξ. (5) μας δίδει

$$P\{X>s+t, X>t\} = P\{X>t\}P\{X>s\} \text{ ή } \overline{F}(s+t) = \overline{F}(s)\overline{F}(t) \tag{9}$$

οπότε λόγω των Εξ. (1), (2)

$$\overline{F}(t) = e^{-\lambda t} \text{ ή } F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{10}$$

που είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής τυχαίας μεταβλητής.

Η ιδιότητα αυτή, δηλαδή, ότι η εκθετική κατανομή είναι η μόνη συνεχής κατανομή που έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης είναι εξαιρετικής σπουδαιότητας όπως θα φανεί στη συνέχεια. Για την καλύτερη κατανόηση αυτού, μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει τη ζωή λειτουργίας κάποιας λάμπας. Τότε, εάν η λάμπα έχει ήδη ζήσει για t ώρες, η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον άλλες s ώρες, δηλαδή, περισσότερο από t+s ώρες, είναι ίδια με την αρχική πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον s ώρες. Δηλαδή, η χρήση δε χειροτερεύει την κατάσταση της λάμπας.

Για να επιστρέψουμε σε τηλεφωνικά παραδείγματα έστω ότι η X κατανέμεται εκθετικά και ότι παριστάνει το χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων στη διαδικασία εισόδου. Πιο συγκεκριμένα έστω ότι μια κλήση έφθασε στο t=0. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ) του χρόνου μέχρι την επόμενη άφιξη θα είναι

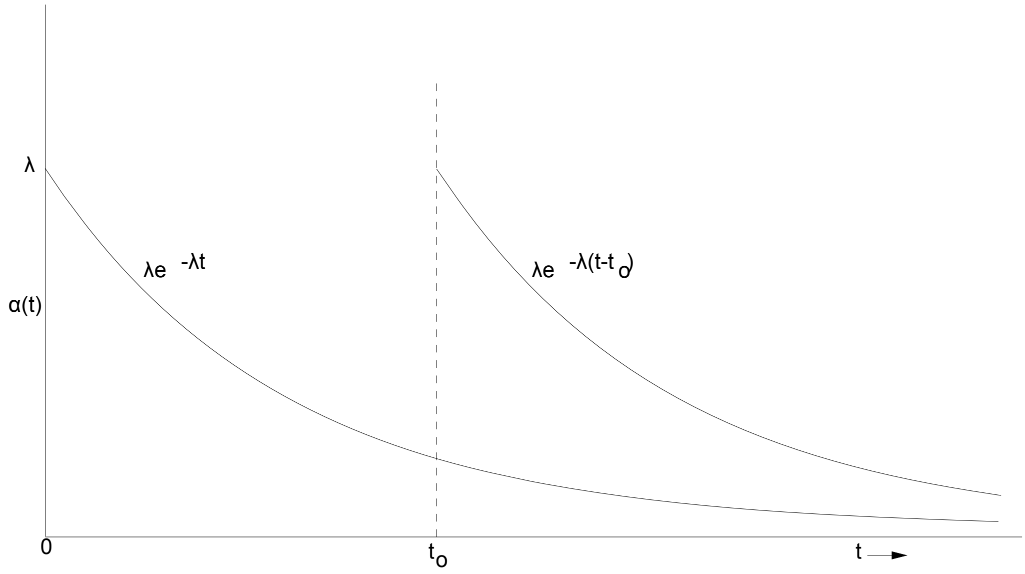
$$\alpha(t)=\lambda e^{-\lambda t} \tag{11}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι παρήλθε κάποιος χρόνος, έστω t_o sec, κατά τη διάρκεια του οποίου δεν έφθασε άλλη κλήση. Σ' αυτό το σημείο μπορούμε να ξαναρωτήσουμε "ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη κλήση θα φθάσει μέσα στα επόμενα t sec από τώρα;" Η ερώτηση είναι η ίδια με αυτή που ρωτήσαμε όταν t=0 μόνο που τώρα είναι γνωστό ότι ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων είναι τουλάχιστον t_o sec. Η απάντηση μπορεί να ληφθεί από τον επόμενο υπολογισμό

$$\begin{aligned} P\{X \le t_o + t | X > t_o\} &= \frac{P\{t_o \le X \le t + t_o\}}{P\{X > t_o\}} = \frac{P\{X \le t + t_o\} - P\{X \le t_o\}}{P\{X > t_o\}} = \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_o)} - (1 - e^{-\lambda t_o})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_o})} = 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{12}$$

που όπως αναμενόταν δείχνει ότι η κατανομή του χρόνου που απομένει μέχρι την επόμενη άφιξη κλήσης, δοθέντος ότι παρήλθαν t_o sec, είναι ίση ακριβώς με τη χωρίς συνθήκες κατανομή του χρόνου μεταξύ δύο κλήσεων.

Τα προηγούμενα μπορούν να φανούν παρατηρώντας το επόμενο σχήμα, όπου είναι σχεδιασμένη η σππ για μια εκθετική μεταβλητή, $\lambda e^{-\lambda t}$. Τώρα, δοθέντος ότι πέρασαν t_o sec, για να υπολογίσουμε τη σππ για το χρόνο μέχρι την επόμενη άφιξη κλήσης, πρέπει να λάβουμε το κομμάτι της σππ που κείται δεξιά από το σημείο t_o (γραμμοσκιασμένη περιοχή), αφού αυτό παριστάνει τι θα γίνει στο μέλλον. Το τμήμα από 0 έως t_o είναι η προηγούμενη ιστορία για την οποία δεν υπάρχει καμία αμφιβολία. Για να γίνει όμως η γραμμοσκιασμένη περιοχή κανονική συνάρτηση κατανομής πρέπει να μεγενθυθεί ώστε το συνολικό εμβαδόν της να γίνει ίσο με 1. Η κατάλληλη μεγένθυση γίνεται διαιρώντας τη συνάρτηση που παριστάνει την ουρά της κατανομής δια του εμβαδού της γραμμοσκιασμένης περιοχής, που προφανώς είναι η πιθανότητα $P\{X > t\}$. Η πράξη αυτή ταυτίζεται με τη δημιουργία μιας υπό συνθήκη κατανομής δια διαιρέσεως της από κοινού κατανομής με την πιθανότητα της συνθήκης. Το αποτέλεσμα της μεγέθυνσης φαίνεται στη δεύτερη καμπύλη του σχήματος. Η νέα συνάρτηση είναι *ακριβές αντίγραφο* της αρχικής σππ μόνο που έχει μετατοπιστεί t_o sec προς τα δεξιά. Όπως ήδη έχουμε αποδείξει καμία άλλη συνάρτηση δεν έχει την ιδιότητα αυτή. Τελειώνοντας τονίζουμε ότι οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για τους χρόνους κατάληψης (χρόνους συνομιλίας) εάν υποτεθεί ότι κατανέμονται εκθετικά.



2.7. Στοχαστικές ανελίξεις

Μια *στοχαστική ανέλιξη (stochastic process)* $\{X(t), t \in T\}$ είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή, για κάθε t που ανήκει στο σύνολο δεικτών T, X(t) είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η μεταβλητή t συχνά θεωρείται ότι παριστάνει το χρόνο και η X(t) παριστάνει την *κατάσταση (state)* της ανέλιξης στη χρονική στιγμή t. Π.χ. η X(t) μπορεί να παριστάνει το πλήθος των σε εξέλιξη τηλεφωνικών συνδιαλέξεων τη χρονική στιγμή t ή το πλήθος των αναμενουσών τηλεφωνικών συνδιαλέξεων τη χρονική στιγμή t ή το πλήθος των αναμενουσών τηλεφωνικών συνδιαλέξεων τη στιγμή t.

Το σύνολο T καλείται σύνολο δεικτών της στοχαστικής ανέλιξης. Εάν το T είναι απαριθμήσιμο, τότε η στοχαστική ανέλιξη λέγεται ανέλιξη διακριτού χρόνου. Εάν το T είναι ένα κλειστό ή ανοικτό σύνολο των πραγματικών αριθμών, η ανέλιξη λέγεται στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου. Το σύνολο των τιμών που λαμβάνουν οι τυχαίες μεταβλητές X(t), $t \in T$ καλείται ο *χώρος καταστάσεων (state space)* της ανέλιξης.

Μια στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου $\{X(t), t \in T\}$ λέγεται ότι έχει *ανεξάρτητες αυξήσεις (independent increments)* εάν για όλες τις επιλογές των $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές

$$X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1),...,X(t_n)-X(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες. Η στοχαστική ανέλιξη λέγεται ότι έχει *στατικές ανεξάρτητες αυξήσεις (stationary independent increments)* εάν επιπλέον η $X(t_2+s)-X(t_1+s)$ έχει την ίδια κατανομή με την $X(t_2)-X(t_1)$ για κάθε $t_1, t_2 \in T$ και $s < 0$.

2.7.1 Παραδείγματα στοχαστικών ανελίξεων

α) Γενικός Τυχαίος Περίπατος

Έστω $Y_1, Y_2, ...$, μια ακολουθία ανεξαρτήτων και ταυτοτικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, και έστω

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (1)$$

Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n = 0,1,2,...\}$ καλείται, ένας γενικός τυχαίος περίπατος. Εάν οι Y_i παριστάνουν τον αριθμό των αφικνουμένων (ανεπιτυχών) κλήσεων μέσα στη i-στή ώρα, τότε η X_n

παριστάνει το συνολικό αριθμό των αφικνουμένων (ανεπιτυχών) κλήσεων μέσα στις πρώτες n ώρες.

β) Διαδικασία Wiener

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t\geq 0\}$ λέγεται *διαδικασία Wiener* εάν

(i) $\{X(t), t\geq 0\}$ έχει στατικές ανεξάρτητες αυξήσεις

(ii) για κάθε $t>0$ η $X(t)$ κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή 0

(iii) $X(0)=0$

γ) Διαδικασία Markov

Ο γενικός τυχαίος περίπατος, η διαδικασία Wiener καθώς και η *διαδικασία Poisson* και η *διαδικασία γεννήσεων-θανάτων* (που θα εξεταστούν στη συνέχεια) είναι παραδείγματα μιας γενικότερης στοχαστικής ανέλιξης γνωστής σαν *διαδικασία Markov*. Μια διαδικασία Markov είναι μια στοχαστική ανέλιξη με την ιδιότητα: Δοθείσης της τιμής της $X(t)$ στο t η πιθανότητα του $X(t+s)$, όπου $s>0$, είναι ανεξάρτητη των τιμών $X(u)$, $u<t$. Δηλαδή, η υπό συνθήκη κατανομή του "μέλλοντος" $X(t+s)$, δοθέντος του "παρόντος" $X(t)$ και του "παρελθόντος" $X(u)$, $u<t$, είναι ανεξάρτητη του παρελθόντος. Πιο αυστηρά η ανέλιξη $\{X(t), t\in T\}$ θα λέγεται διαδικασία Markov εάν

$$P\{X(t)\leq x|X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,...,X(t_n)=x_n\} = P\{X(t)\leq x|X(t_n)=x_n\} \quad (2)$$

όπου $t_1<t_2<...<t_n<t$

δ) Αλυσίδα Markov

Η *αλυσίδα Markov* είναι ειδική περίπτωση της διαδικασίας Markov, ειδικότερα, μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n=0,1,2,...\}$ με πεπερασμένο ή απαριθμήσιμο χώρο καταστάσεων λέγεται αλυσίδα Markov εάν για όλες τις καταστάσεις i_o, $i_1,...i_{n-1}$, i,j και για όλα τα $n\geq 0$

$$P\{X_{n+1}=j|X_0=i_0, X_1=i_1,...,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n\} = P\{X_{n+1}|X_n\} \quad (3)$$

Εάν οι πιθανότητες $P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$ είναι ανεξάρτητες του n, τότε η αλυσίδα Markov λέγεται ότι έχει *στατικές πιθανότητες μετάβασης (stationary transition probabilities)*. Τότε θα συμβολίζουμε:

$$P_{ij} = P\{X_{n+1}=j|X_n=i\} \quad (4)$$

Μια στοχαστική ανέλιξη που ικανοποιεί την Εξ. (3) λέγεται ότι έχει τη μαρκοβιανή ιδιότητα. Η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με το ότι η υπό συνθήκη πιθανότητα οποιουδήποτε μελλοντικού γεγονότος ($X_{n+1}=j$), δοθέντων όλων των παρελθόντων γεγονότων ($X_0=i_0$, $X_1=i_1,...,X_{n-1}=i_n$) και του παρόντος γεγονότος ($X_n=i$), είναι ανεξάρτητη από τα παρελθόντα γεγονότα.

Μια *αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου (semi-Markov)* $\{Z(t), t\geq 0\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη που κάνει τις μεταβάσεις της όπως και η αλυσίδα Markov, αλλά ο χρόνος παραμονής σε μια κατάσταση πριν να συμβεί μετάβαση είναι τυχαίος.

2.8. Στοχαστικές Ανελίξεις στη Θεωρία Αναμονής

Η θεωρία αναμονής μελετά τα φαινόμενα καθυστέρησης σε γραμμές αναμονής. Μια ουρά μπορεί να δημιουργηθεί όταν φθάνουν πελάτες, ενώ οι σταθμοί εξυπηρέτησης είναι απασχολημένοι, οπότε πρέπει να περιμένουν σε μια ουρά. Τα προβλήματα της Θεωρίας Τηλεφωνική Κίνησης κατά κύριο λόγο είναι προβλήματα τέτοιου είδους. Για τη συνέχεια θα κάνουμε τις επόμενες παραδοχές και συμβολισμούς όσον αφορά τα μοντέλα θεωρίας αναμονής που θα χρησιμοποιήσουμε. Έστω

r_n = ο χρόνος άφιξης n-στής κλήσης C_n

$t_n = r_n - r_{n-1}$ = ο χρόνος μεταξύ αφίξεων των κλήσεων C_{n-1} και C_n.

Υποθέτουμε ότι τα t_1, t_2,... είναι ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένα τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής A(t), δηλαδή

$P\{t_n \le t\} = A(t)$ για κάθε n

Όμοια εάν

X_n = ο χρόνος εξυπηρέτησης (χρόνος κατάληψης) της κλήσης C_n

W_n = ο χρόνος αναμονής της C_n στην ουρά, και

$S_n = W_n + X_n$ = ο χρόνος παραμονής της C_n στο σύστημα

Θα δεχτούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_n είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες, με κοινή συνάρτηση κατανομής την B(x), δηλαδή

$P\{X_n \le x\} = B(x)$ για κάθε n

Θα ορίσουμε και τις στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς χρόνου

N(t) = το πλήθος κλήσεων σε εξέλιξη στο σύστημα

U(t) = το ημιτελές έργο στο σύστημα τη στιγμή t

= ο υπόλοιπος χρόνος που απαιτείται μέχρι να αδειάσει το σύστημα από όλους τους πελάτες (κλήσεις) που ήταν παρόντες τη στιγμή t.

Όταν U(t)>0, το σύστημα είναι απασχολημένο. Όταν U(t)=0, το σύστημα είναι ελεύθερο (αργεί). Επιπλέον, οι ανελίξεις W_n, n=1,2,..., S_n, n=1,2,..., αποτελούν παραδείγματα ανελίξεων διακριτικού χρόνου στο σύστημα αναμονής.

Μερικοί άλλοι χρήσιμοι συμβολισμοί είναι οι ακόλουθοι:

$E\{t_n\} = 1/\lambda$

$E\{X_n\} = 1/\mu$

$E\{S_n\} = T$

$E\{W_n\} = W$

Με βάση τα προηγούμενα θα χρησιμοποιείται ο εξής γενικός συμβολισμός για ένα σύστημα αναμονής

A / B / m / k / M

όπου:

A: Παριστάνει την κατανομή του χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων.

B: Παριστάνει την κατανομή του χρόνου μεταξύ καταλήψεων.

m: Ο αριθμός των καναλιών (σταθμών εξυπηρέτησης).

k: Η χωρητικότητα του συστήματος (μέγιστο πλήθος πελατών που χωρούν στο σύστημα, μέγιστο πλήθος παράλληλων κλήσεων).

M: Μέγεθος του πληθυσμού των πελατών (πηγών).

Μερικές τιμές των συμβόλων A,B είναι

M: για εκθετική *κατανομή (Memoryless)* ή διαδικασία Poisson.

E_r: για *κατανομή Erlang* r-σταδίων

D: για *σταθερή κατανομή (Dererministic)*

H_R: για *υπερεκθετική (Hyperxponential)* κατανομή R-σταδίων

G: για *γενικές (General)*, οποιεσδήποτε, κατανομές.

2.9 Ασκήσεις

1. Η διάρκεια ενός τηλεφωνήματος είναι μια τυχαία μεταβλητή με αρνητική εκθετική κατανομή και μέση τιμή 100 sec. Να βρεθεί: η πιθανότητα να διαρκέσει ένα τηλεφώνημα λιγότερο από 1 min, η πιθανότητα να διαρκέσει περισσότερο από 3 min και η πιθανότητα να διαρκέσει περισσότερο από 10 min.

   Εάν τ είναι η διάρκεια του τηλεφωνήματος να βρεθούν σαν συναρτήσεις του x οι πιθανότητες: $P\{\tau>x\}$, $P\{\tau>x|\tau>3\text{ min}\}$ καθώς και η $P\{\tau>10\text{ min}|\tau>8\text{ min}\}$

2. Βρέστε την πιθανότητα $P\{x_1>x_2\}$, όπου x_1, x_2 είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, με παραμέτρους λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

3. Βρέστε τη συνάρτηση πυκνότητας της μικρότερης από K ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές κάθε μία από τις οποίες είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο λ_k.

4. Έστω η τυχαία μεταβλητή $S_N=x_1+x_2+ \dots +x_N$ όπου x_i, i=1,2,...,N είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές εκθετικά κατανεμημένες με παράμετρο λ. Εάν N είναι μια τυχαία μεταβλητή γεωμετρικής κατανομής παραμέτρου, δηλαδή

   $P(N=i)=p(1-p)^{i-1} \quad 0<p<1, \qquad i=1,2,3,...$

   αποδείξτε ότι η S_N είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο λp.

3. Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ POISSON

3.1. Εισαγωγή και ορισμός

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t), t\geq 0\}$ λέγεται *διαδικασία άθροισης (counting process)*, εάν το N(t) παριστάνει το συνολικό αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν μέχρι το t. Μια ιδιαίτερα σημαντική διαδικασία άθροισης είναι η διαδικασία Poisson. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τη διαδικασία Poisson με δύο διαφορετικούς τρόπους, θα αποδείξουμε την ισοδυναμία τους και μερικές χρήσιμες ιδιότητές της για τα επόμενα.

Ορισμός 1

Μια διαδικασία άθροισης $\{N(t), t>0\}$ λέγεται *διαδικασία Poisson* εάν

(i) $N(0) = 0$

(ii) $\{N(t), t\geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες αυξήσεις

(iii) Ο αριθμός των γεγονότων σε κάθε διάστημα μήκους t έχει κατανομή Poisson με μέση τιμή λt. Δηλαδή, για κάθε s,t ≥ 0

$$P\{N(t+s)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, n \geq 0 \tag{1}$$

Από την (iii) προκύπτει ότι

$$E\{N(t)\} = \lambda t \tag{2}$$

και το λ καλείται ο *ρυθμός της διαδικασίας (rate of the process)*.

Ένας περισσότερο φυσικός ορισμός είναι δυνατός, εάν προηγουμένως εισαχθεί η επόμενη έννοια: Μια συνάρτηση f καλείται o(t), εάν

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=0 \tag{3}$$

Τότε

Ορισμός 2

Η στοχαστική ανέλιξη {N(t), t>0} είναι διαδικασία Poisson εάν

(i) N(0) = 0

(ii) {N(t), t≥0} έχει στατικές, ανεξάρτητες αυξήσεις

(iii) P{N(t)≥2} = o(t)

(iv) P{N(t)≥1} = λt+o(t)

Αποδεικνύουμε τώρα ότι οι δύο αυτοί ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι από τον ορισμό 2 προκύπτει ο 1. Έστω

$$P_n(t) = P\{N(t) = n\}, n\geq 0 \tag{4}$$

Μπορούμε να λάβουμε μια διαφορική εξίσωση για την $P_0(t)$ ως εξής:

$$P_0(t+h) = P\{N(t+h) = 0\} = P\{N(t)=0, N(t+h) - N(t)= 0\} = P\{N(t)=0\}P\{N(t+h) - N(t)= 0\} = P_0(t)P_0(h) \tag{5}$$

όπου η (ii) χρησιμοποιήθηκε για να ληφθούν οι δύο τελευταίες ισότητες. Τότε

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=P_0(t)\frac{P_0(h)-1}{h} \tag{6}$$

Τώρα, για h→0 και χρησιμοποιώντας τις (iii) και (iv) λαμβάνουμε ότι $P_0(h)$ = 1-λh+o(h) οπότε

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t) \tag{7}$$

ή ισοδύναμα

$$\ln P_0(t) = -\lambda t + c \tag{8}$$

ή

$$P_0(t) = ce^{-\lambda t} \tag{9}$$

Αφού όμως $P_0(0)$ = 1 θα έχουμε

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{10}$$

Όμοια για κάθε n>0

$$\begin{aligned} &P_n(t+h) = P\{N(t+h) = n\} = \\ &= P\{N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0\} + P\{N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1\} + \\ &+ \sum_{k=2}^{n} P\{N(t) = n-k, N(t+h) - N(t) = k\} \end{aligned} \quad (11)$$

Όμως λόγω της (iii) ο τελευταίος όρος της προηγούμενης παράστασης είναι o(t) και χρησιμοποιώντας την (ii) λαμβάνουμε

$$P_n(t+h) = P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(t) = (1-\lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(t) \quad (12)$$

Άρα

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Για $h \to 0$ έχουμε

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad (13)$$

ή ισοδύναμα

$$e^{\lambda t}\{P_n'(t) + \lambda P_n(t)\} = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \quad (14)$$

Άρα

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_n(t)\right) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \quad (15)$$

Από την Εξ. (10) λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_1(t)\right) = \lambda \quad (16)$$

ή

$$P_1(t) = (\lambda t + c)e^{-\lambda t} \quad (17)$$

και αφού $P_1(0) = 0$, έχουμε

$$P_1(t) = (\lambda t)e^{-\lambda t} \quad (18)$$

Για να αποδείξουμε ότι $P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ ας υποθέσουμε ότι ισχύει αυτό για n-1. Τότε από την Εξ. (15) λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_n(t)\right) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (19)$$

ή

$$e^{\lambda t} P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + c$$

αλλά αφού $P_n(0) = 0$ λαμβάνεται το ζητούμενο. Η απόδειξη του ότι ο ορισμός (2) προκύπτει από την Εξ. (1) αφήνεται για τον αναγνώστη.

3.2. Κατανομές των χρόνων άφιξης και των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων

Έστω t_1 ο χρόνος από το 0 μέχρι το πρώτο γεγονός και εν γένει t_n, n>1 ο χρόνος από το (n-1)-στό γεγονός μέχρι το n-στό γεγονός. Η ακολουθία t_n, n=1,2,... αποτελείται τους χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων. Για τον προσδιορισμό της κατανομής του t_n παρατηρούμε πρώτα ότι

$$P\{t_1 > t\} = P\{N(t)=0\} = e^{-\lambda t} \tag{1}$$

Άρα η t_1 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ. Αλλά

$$P\{t_2 > t\} = E\{P\{t_2 > t|t_1\}\} \tag{2}$$

όμως

$$P\{t_2 > t|t_1 = s\} = P\{0 \text{ γεγονότα στο } (s,s+t]|t_1=s\} = P\{0 \text{ γεγονότα στο } (s,s+t]\} = e^{-\lambda t} \tag{3}$$

όπου οι δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτουν από την ιδιότητα των ανεξάρτητων και στατικών αυξήσεων της διαδικασίας Poisson. Όμως από την Εξ. (3) προκύπτει ότι η t_2 κατανέμεται εκθετικά με μέση τιμή 1/λ και επιπλέον η t_2 είναι ανεξάρτητη της t_1. Επαναλαμβάνοντας την ίδια σειρά σκέψεων καταλήγουμε στο:

Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων t_n, n=1,2,... μιας διαδικασίας Poisson ρυθμού λ είναι ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ.

Η προηγούμενη ιδιότητα δε πρέπει να μας εκπλήσσει. Η υπόθεση (ii) στατικών και ανεξαρτήτων αυξήσεων είναι βασικά ισοδύναμη με το ότι για οποιοδήποτε χρονικό σημείο t, ξαναρχίζει πιθανοτικά η ίδια στοχαστική διαδικασία, δηλαδή, η διαδικασία από το σημείο αυτό και μετά είναι ανεξάρτητη του τι έχει συμβεί προηγουμένως (λόγω των ανεξαρτήτων αυξήσεων) και έχει την ίδια κατανομή όπως και η αρχική διαδικασία (λόγω των στατικών αφίξεων). Με άλλες λέξεις, η διαδικασία δεν έχει μνήμη επομένως πρέπει να αναμένονται εκθετικοί χρόνοι ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις.

Μία άλλη ενδιαφέρουσα ποσότητα είναι η τ_n, ο χρόνος άφιξης του n-στού γεγονότος. Προφανώς

$$\tau_n = \sum_{i=1}^{n} t_i \tag{4}$$

και λόγω της προηγουμένως ιδιότητας και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των χαρακτηριστικών συναρτήσεων για τα αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών προκύπτει ότι η τ_n ακολουθεί κατανομή Erlang με παραμέτρους n και λ, δηλαδή

$$f_{\tau_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad x \geq 0 \tag{5}$$

Η Εξ. (5) μπορεί επίσης να προκύψει εάν παρατηρήσουμε ότι

$$P\{\tau_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\} \tag{6}$$

οπότε

$$F_{\tau_n}(t) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \tag{7}$$

και με παραγώγιση λαμβάνεται η Εξ. (5).

3.3. Υπό συνθήκη κατανομή των χρόνων άφιξης

Ας υποθέσουμε ότι ακριβώς ένα γεγονός έλαβε χώρα μέσα στο διάστημα [0, t] και ότι ζητάμε την κατανομή του χρόνου κατά τον οποίο συνέβη αυτό. Λόγω της υπόθεσης (ii) για στατικές και ανεξάρτητες αυξήσεις, είναι προφανές ότι όλα τα διαστήματα ίσου μεγέθους μέσα στο [0, t] έχουν την ίδια πιθανότητα να περιέχουν το γεγονός, δηλαδή, ο χρόνος άφιξης του γεγονότος πρέπει να έχει ομοιόμορφη κατανομή στο [0, t]. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί ως εξής, αφού για $s \le t$.

$$P\{t_1 < s | N(t)=1\} = \frac{P\{N(s)=1, N(t)-N(s)=0\}}{P\{N(t)=1\}} = \frac{s}{t} \tag{1}$$

Το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί, αλλά προηγουμένως πρέπει να εισαχθεί η έννοια της *στατιστικής διατάξεων (order statistics)*. Εάν η $Y_1,Y_2,...,Y_n$ είναι οι τυχαίες μεταβλητές, λέμε ότι $Y_{(1)},Y_{(2)},...,Y_{(n)}$ είναι η στατιστική διάταξης που αντιστοιχεί στις $Y_1,Y_2,...,Y_n$, εάν η $Y_{(i)}$ είναι η i-στή μικρότερη τιμή μεταξύ των $Y_1,Y_2,...,Y_n$, i=1,2,...,n. Εάν οι Y_i κατανέμονται ταυτοτικά και ανεξάρτητα με κοινή σπп την f, τότε η από κοινού συνάρτηση κατανομής της στατιστικής διατάξεων δίδεται από την

$$f_{Y_{(1)},Y_{(1)},...,Y_{(n)}}(y_1,y_1,...y_n) = n!f(y_1)f(y_2)...f(y_n) \quad y_1 < y_2 < ... < y_n \tag{2}$$

Αυτό είναι αληθές αφού κάθε μια από τις n! μεταθέσεις των $Y_1,Y_2,...,Y_n$ οδηγεί στην ίδια στατιστική διατάξεων. Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι: *Δοθέντος ότι N(t)=n, οι n χρόνοι άφιξης $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n$ έχουν την ίδια κατανομή όπως η κατανομή διατάξεων που αντιστοιχεί σε η ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα (0, t).*

Απόδειξη

Έστω $0<t_1, t_2,...t_n<t_{n+1} = t$ και έστω h_i αριθμοί αρκούντως μικροί ώστε $t_i+h_i<t_{i+1}$, i=1,2,...,n

$$\frac{P\{\text{ακριβώς 1 ένα γεγονός στο } [t_i, t_i+h_i], i=1,2,...,n, \text{ κανένα γεγονός αλλού στο } [0,t]\}}{P\{N(t)=n\}} =$$

$$= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \lambda h_2 e^{-\lambda h2} ... \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t-h_1-h_2-...-h_n)}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 ... h_n \tag{3}$$

Άρα

$$\frac{P\{t_i \le ™_i \le t_i+h_i, i=1,2,...,n || N(t)=n\}}{h_1 h_2 ... h_n} = \frac{n!}{t^n} \tag{4}$$

και για $h_i \to 0$ λαμβάνουμε

$$f_{\tau_i,\tau_2,...,\tau_n}(t_1,t_2,...,t_n | N(t)=n) = \frac{n!}{t^n} \quad 0 < t_1 < t_2 < ... t_n < t \tag{5}$$

Μια διαισθητική εξήγηση του προηγούμενου είναι η εξής: υπό την προϋπόθεση ότι συνέβησαν n γεγονότα στο (0,t), οι χρόνοι $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n$ κατά τους οποίους τα γεγονότα αυτά συμβαίνουν, θεωρούμενα σαν μη διατεταγμένες τυχαίες μεταβλητές, κατανέμονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα στο διάστημα (0,t). Η προηγούμενη ιδιότητα μπορεί να χρησιμεύσει και για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι μια διαδικασία άθροισης είναι Poisson. Αυτό μπορεί να γίνει παρατηρώντας τη διαδικασία για ένα σταθερό χρονικό διάστημα t. Εάν μέσα σ' αυτήν την περίοδο φθάσουν n αφίξεις θα πρέπει να κατανέμονται ομοιόμορφα στο (0,t). Άρα μπορούμε να ελέγξουμε εάν μια διαδικασία είναι Poisson, ελέγχοντας την υπόθεση ότι η χρόνοι αφίξεων προέρχονται από μια ομοιόμορφη κατανομή στο (0,t). Αυτό μπορεί να γίνει με γνωστές διαδικασίες ελέγχου υποθέσεων (π.χ. Kolmogorov-Smirnov τεστ, κλπ).

3.4 Ασκήσεις

1. Θεωρείστε K ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με παραμέτρους λ_k, k=1,2,...,K. Θεωρείστε τώρα τη διαδικασία αφίξεων που σχηματίζεται από τη συγχώνευση των προηγουμένων διαδικασιών. Αποδείξτε ότι η διαδικασία αυτή είναι Poisson με παράμετρο $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k$.
2. Μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ χωρίζεται σε K υποδιαδικασίες ως εξής: Μια άφιξη της αρχικής διαδικασίας θα αντιστοιχίζεται στην k υποδιαδικασία με πιθανότητα p_k, όπου οι πιθανότητες p_k, k=1,2,...,K εκλέγονται ανεξάρτητα για κάθε άφιξη. Αποδείξτε ότι όλες οι υποδιαδικασίες είναι διαδικασίες Poisson με παραμέτρους αντίστοιχα λp_k.

4. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ-ΘΑΝΑΤΩΝ

Μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου {Z(t), t≥0} με χώρο καταστάσεων {0,1,2,...} όπου $P_{ij}=0$ όταν |i-j|≥2 καλείται διαδικασία *γεννήσεων-θανάτων (birth and death process)*. Δηλαδή, η διαδικασία γεννήσεων-θανάτων είναι μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου όπου οι αλλαγές κατάστασης γίνονται μόνο με μεταβάσεις μεταξύ γειτονικών καταστάσεων. Ένας πιο παραστατικός αλλά ισοδύναμος τρόπος περιγραφής της διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων προκύπτει εάν θεωρήσουμε το ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση k δηλώνει το γεγονός ότι ο πληθυσμός τότε έχει μέγεθος k. Επιπλέον μια μετάβαση από την κατάσταση k στην k+1 θα σημαίνει μια "γέννηση" στον πληθυσμό, ενώ η μετάβαση από την κατάσταση k στην k-1 θα σημαίνει ένα "θάνατο" στον πληθυσμό.

Έτσι θεωρούμε μόνο μεταβολές στο μέγεθος του πληθυσμού όπου οι μεταβάσεις από μια κατάσταση k λαμβάνουν χώρα μόνο προς τις *πλησιέστερες καταστάσεις* (k-1 και k+1). Ο *ρυθμός γεννήσεων* λ_k θα περιγράφει τον ρυθμό με τον οποίο συμβαίνουν οι γεννήσεις, όταν ο πληθυσμός έχει μέγεθος k. Όμοια ορίζεται ο *ρυθμός θανάτων* μ_k, που είναι ο ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν οι θάνατοι, όταν το μέγεθος του πληθυσμού είναι k. Για να είμαστε πιο ακριβείς, οι προϋποθέσεις για μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων είναι:

(α) να είναι μια διαδικασία Markov {X(t), t≥0} με χώρο καταστάσεων {0,1,2,...},

(β) οι γεννήσεις και οι θάνατοι να είναι ανεξάρτητοι (αυτό προφανώς προκύπτει αμέσως από τη μαρκοβιανή ιδιότητα) και

(γ) B_1: P{ακριβώς 1 γέννηση στο (t,t+Δt) | μέγεθος πληθυσμού k} = $\lambda_k\Delta t+o(\Delta t)$ (1)

D_1: P{ακριβώς 1 θάνατος στο (t,t+Δt) | μέγεθος πληθυσμού k} = $\mu_k\Delta t+o(\Delta t)$ (2)

B_2: P{ακριβώς 0 γεννήσεις στο (t,t+Δt) | μέγεθος πληθυσμού k} = $1-\lambda_k\Delta t+o(\Delta t)$ (3)

D_2: P{ακριβώς 0 γεννήσεις στο (t,t+Δt) | μέγεθος πληθυσμού k} = $1-\mu_k\Delta t+o(\Delta t)$ (4)

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι πολλαπλές γεννήσεις, πολλαπλοί θάνατοι ή ταυτόχρονες γεννήσεις και θάνατοι στο διάστημα (t,t+Δt) είναι της τάξης o(Δt).

Αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε για μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων είναι οι πιθανότητες.

$$P_k(t) = P\{X(t)=k\} \quad (5)$$

Εξετάζοντας τις μεταβολές του πληθυσμού σε ένα διάστημα (t,t+Δt) βρίσκουμε ότι μπορούμε να φθάσουμε στην κατάσταση k τη χρονική στιγμή t+Δt εάν συνέβη κάτι από τα επόμενα:

Κατά τη χρονική στιγμή t το μέγεθος του πληθυσμού ήταν

1. k και δε συνέβη καμία μεταβολή κατάστασης στο (t,t+Δt)

2. k-1 και είχαμε μία ακριβώς γέννηση στο $(t,t+\Delta t)$
3. k+1 και είχαμε ένα ακριβώς θάνατο στο $(t,t+\Delta t)$
4. Οτιδήποτε άλλο και είχαμε τον κατάλληλο αριθμό θανάτων και γεννήσεων στο $(t,t+\Delta t)$

Έστω $q_{k,k}(\Delta t)$, $q_{k-1,k}(\Delta t)$ και $q_{k+1,k}(\Delta t)$ οι υπό συνθήκη πιθανότητες να συμβούν οι μεταβάσεις που περιγράφονται στα 1, 2 και 3, αντίστοιχα. Η πιθανότητα να συμβεί το 4 είναι της τάξης $o(\Delta t)$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)q_{k,k}(\Delta t) + P_{k-1}(t)q_{k-1,k}(\Delta t) + P_{k+1}(t)q_{k+1,k}(\Delta t) + o(\Delta t),\ k\geq 1 \qquad (6)$$

Προφανώς η Εξ. (6) έχει νόημα μόνο για $k\geq 1$. Εάν $k=0$, δεν υπάρχει προηγούμενη κατάσταση k-1. Τότε έχουμε μια ειδική οριακή εξίσωση την

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)q_{0,0}(\Delta t) + P_1(t)q_{1,0}(\Delta t) + o(\Delta t),\ k=0 \qquad (7)$$

Προφανώς επίσης πρέπει για κάθε t να ισχύει

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \qquad (8)$$

Για τη λύση του συστήματος των Εξ. (6), (7) και (8) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις υποθέσεις B_1, D_1, B_2, D_2, για τον υπολογισμό των $q_{i,j}(\Delta t)$. Τότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} P_k(t+\Delta t) &= P_k(t)[1-\lambda_k\Delta t+o(\Delta t)][1-\mu_k\Delta t+o(\Delta t)] + P_{k-1}(t)[\lambda_{k-1}\Delta t+o(\Delta t)] + \\ &+ P_{k+1}(t)[\mu_{k+1}\Delta t+o(\Delta t)] + o(\Delta t),\ k\geq 1 \end{aligned} \qquad (9)$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-\lambda_0\Delta t+o(\Delta t)] + P_1(t)[\mu_1\Delta t+o(\Delta t)] + o(\Delta t),\ k=0 \qquad (10)$$

Για την Εξ. (10) θεωρήθηκε ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε θανάτους όταν k=0,(δηλαδή $\mu_0=0$, αλλά μπορούμε να έχουμε γεννήσεις, $\lambda_0\geq 0$. Μετά από πράξεις στα δεξιά μέλη των Εξ. (9) και (10) λαμβάνουμε

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)-P_k(t)(\lambda_k+\mu_k)\Delta t + P_{k-1}(t)\lambda_{k-1}\Delta t + P_{k+1}(t)\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t),\ k\geq 1 \qquad (11)$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)-P_0(t)\lambda_0\Delta t + P_1(t)\mu_1\Delta t + o(\Delta t),\ k=0 \qquad (12)$$

ή

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda_k+\mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t)+ \mu_{k+1}P_{k+1}(t) + o(\Delta t)/\Delta t,\ k\geq 1 \qquad (13)$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) + o(\Delta t)/\Delta t,\ k=0 \qquad (14)$$

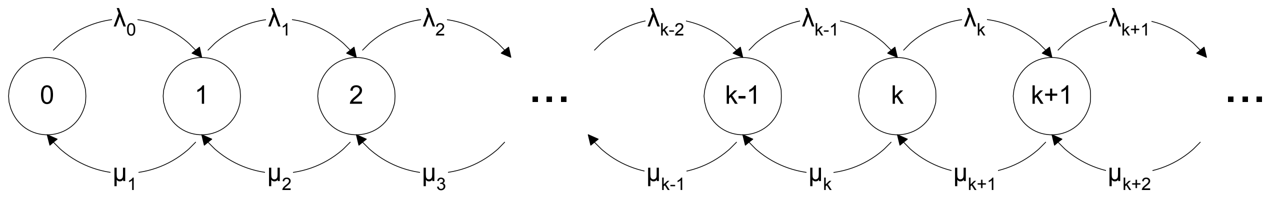
Θεωρώντας ότι $\Delta t\to 0$ λαμβάνουμε από τις Εξ. (13) και (14)

$$P_k'(t) = -(\lambda_k+\mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t)+ \mu_{k+1}P_{k+1}(t),\ k\geq 1 \qquad (15)$$

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t),\ k=0 \qquad (16)$$

Το σύνολο αυτό των *διαφορο-διαφορικών εξισώσεων* παριστάνει τη δυναμική του πιθανοτικού μας συστήματος. Για τη λύση του συστήματος αυτού απαιτείται ο καθορισμός των αρχικών τιμών, δηλαδή, των $P_k(0)$ για k=1,2,... καθώς και η ισχύς της Εξ. (8).

Θα σταματήσουμε για λίγο εδώ για να περιγράψουμε μια απλή μέθοδο που *με επισκόπηση* δίδει τις προηγούμενες διαφορο-διαφορικές εξισώσεις. Ένας εναλλακτικός τρόπος περιγραφής μιας διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων είναι το *διάγραμμα ρυθμού μετάβασης καταστάσεων (state transition rate diagram)*. Ένα τέτοιο διάγραμμα φαίνεται κατωτέρω, όπου οι κύκλοι που περικλείουν έναν αριθμό k παριστάνουν την αντίστοιχη κατάσταση k και κάθε μη μηδενικός ρυθμός μετάβασης (από την κατάσταση i στην κατάσταση j) παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινά από την κατάσταση i και καταλήγει στην j και έχει επισυνημμένη την αντίστοιχη τιμή του ρυθμού μετάβασης.



Είναι προφανές ότι δεν υπάρχουν βρόχοι από μια κατάσταση i στον εαυτό της. Τονίζουμε ότι τα βέλη (και οι επισυνημμένοι αριθμοί) *δε παριστάνουν πιθανότητες μετάβασης αλλά ρυθμούς μετάβασης*. Εάν θέλει κανείς να τα μετατρέψει σε πιθανότητες μετάβασης πρέπει να πολλαπλασιάσει με Δt για να λάβει την αντίστοιχη πιθανότητα μετάβασης για χρονικό διάστημα Δt ($\Delta t \rightarrow 0$) και να προσθέσει ένα βρόχο για κάθε κατάσταση που να δίδει την πιθανότητα να παραμείνουμε στην κατάσταση αυτή μετά από την πάροδο του χρονικού διαστήματος Δt.

Παρατηρώντας την κατάσταση k βλέπουμε ότι κανείς εισέρχεται σ' αυτή μόνο από τις k-1 ή k+1 και παρόμοια φεύγει μόνο εισερχόμενος στην k+1 ή k-1. Η δυναμική περιγραφή του συστήματος τώρα μπορεί να γίνει θεωρώντας ότι η διαφορά των ρυθμών εισόδου στην k από τους ρυθμούς εξόδου από την k πρέπει να ισούται με τη μεταβολή της "ροής" στην κατάσταση αυτή. Ειδικότερα

$$\text{Ροή προς την κατάσταση } k = \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t) \tag{17}$$

$$\text{Ροή έξω από την κατάσταση } k = (\lambda_k + \mu_k) P_k(t) \tag{18}$$

άρα η μεταβολή της πιθανότητας $P_k(t)$ να βρισκόμαστε στην κατάσταση k είναι

$$P'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t) \tag{19}$$

που είναι ακριβώς ίδια με την Εξ. (15). Φυσικά η ιδιαιτερότητα των ορίων στην κατάσταση 0 οδηγεί, όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς, στη σωστή εξίσωση για $k = 0$.

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι αυτό που κάναμε είναι να σχεδιάσουμε ένα υποθετικό όριο γύρω από την κατάσταση k και να υπολογίσουμε τις ροές ρυθμών που διασχίζουν το όριο αυτό, όπου ροές που εισέρχονται θεωρούνται θετικές ενώ οι εξερχόμενες αρνητικές και το αποτέλεσμα να το εξισώσουμε με την παράγωγο ως προς το χρόνο της πιθανότητας να βρισκόμαστε στην κατάσταση αυτή. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κανείς ιδιαίτερος λόγος για την εκλογή μιας μεμονωμένης κατάστασης σαν το "σύστημα" για το οποίο οι εξισώσεις ροής μπορούν να εφαρμοστούν. Μπορεί κανείς να περικλείσει οποιοδήποτε αριθμό καταστάσεων σε μια καμπύλη και να γράψει την αντίστοιχη εξίσωση ροών. Ο μόνος κίνδυνος που δημιουργείται είναι να καταλήξουμε τελικά σε ένα σύνολο εξαρτημένων εξισώσεων αντί ανεξάρτητων. Ο προηγούμενος τρόπος του αποκλεισμού κάθε μιας κατάστασης χωριστά και η συγγραφή της αντίστοιχης εξίσωσης οδηγεί σίγουρα σε ένα σύνολο ανεξαρτήτων εξισώσεων.

Η διαδικασία γεννήσεων-θανάτων όπως περιγράφτηκε εδώ αποτελεί τη βάση για μελέτη ενός μεγάλου αριθμού σημαντικών προβλημάτων της θεωρίας αναμονής και ειδικότερα της Θεωρίας Τηλεφωνικής Κίνησης. Προτού συνεχίσουμε την εξέταση του πως μπορούν να λυθούν οι Εξ. (15) και (16) για ειδικές περιπτώσεις τηλεφωνικών συστημάτων, θα μελετήσουμε ένα ενδιαφέρον παράδειγμα.

Το απλούστερο σύστημα που μπορεί να εξεταστεί είναι αυτό των *καθαρών γεννήσεων (pure birth)*, όπου υποθέτουμε ότι $\mu_k=0$ και $\lambda_k=\lambda$ για κάθε k=0,1,2,.... Αντικαθιστώντας στις Εξ. (15) και (16) λαμβάνουμε

$$P'_k(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t),\ k \geq 1 \tag{20}$$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t),\ k=0 \tag{21}$$

Εάν για απλότητα υποθέσουμε ότι το σύστημα αρχίζει στο 0 μη μηδενικό πληθυσμό, δηλαδή

$$P_k(0) = \begin{cases} 1 \text{ για } k = 0 \\ 0 \text{ για } k \neq 0 \end{cases} \tag{22}$$

λύνοντας ως προς $P_0(t)$ έχουμε

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{23}$$

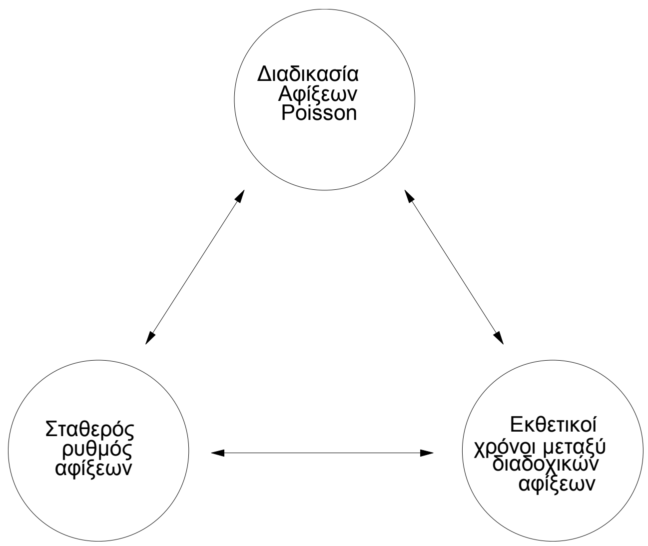
και αντικαθιστώντας στην Εξ. (20) για k=1 υπολογίζεται η $P_1(t)$ από την

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \tag{24}$$

Με επαγωγή τελικά λαμβάνεται

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k! \tag{25}$$

δηλαδή, η κατανομή Poisson. Άρα η διαδικασία καθαρών γεννήσεων με σταθερό ρυθμό γεννήσεων λ είναι μια διαδικασία Poisson. Το γεγονός αυτό μαζί με τις ιδιότητες που αποδείχτηκαν στο κεφάλαιο για τη διαδικασία Poisson φαίνονται παραστατικά στο επόμενο σχήμα.



5. ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ-ΘΑΝΑΤΩΝ ΣΕ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Η λύση των εξισώσεων που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά μιας διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων είναι εν γένει σημαντικά δύσκολη εκτός και εάν εκλεχτούν κατάλληλα οι ρυθμοί θανάτων και γεννήσεων. Όμως είναι πάντα σχετικά εύκολο να βρούμε τη λύση στην κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή, να βρούμε τις οριακές τιμές προς τις οποίες τείνουν τα $P_k(t)$ όταν $t \to \infty$. Έστω ότι

$$P_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t) \tag{1}$$

όπου P_k παριστάνει την οριακή πιθανότητα ο πληθυσμός του συστήματος να είναι k κάποια τυχαία χρονική στιγμή στο απώτερο μέλλον. Η βασική ερώτηση είναι το κατά ποσόν τα προηγούμενα όρια υπάρχουν. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη γι’ αυτό θα δοθεί στη συνέχεια. Πρέπει όμως να κατανοηθεί ότι παρότι το P_k, εάν υπάρχει, δεν είναι πλέον συνάρτηση του χρόνου t, αυτό δε σημαίνει ότι η διαδικασία οριακά δε μετακινείται από κατάσταση σε κατάσταση. Το μέγεθος του πληθυσμού αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, αλλά μακροπρόθεσμα η πιθανότητα να βρούμε το σύστημα στην κατάσταση k περιγράφεται από τις P_k. Υποθέτοντας την ύπαρξη των ορίων της Εξ. (1) μπορούνε να θέσουμε

$$\lim_{t\to\infty} P_k'(t) = 0 \tag{2}$$

οπότε οι Εξ. (15) και (16) της προηγούμενης παραγράφου 4 γίνονται

$$0=-(\lambda_k+\mu_k)P_k + \lambda_{k-1}P_{k-1}+ \mu_{k+1}P_{k+1},\ k\geq 1 \tag{3}$$

$$0=-\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1,\ k=0 \tag{4}$$

Μπορούμε να γράψουμε μια γενική μορφή εξίσωσης για τα P_k για κάθε k εάν θέσουμε

$$\lambda_{-1}=\lambda_{-2}=\lambda_{-3}= 0 \tag{5}$$

$$\mu_0= \mu_{-1}= \mu_{-2}= \ldots =0 \tag{6}$$

$$P_0= P_{-2}=P_{-3}=\ldots=0 \tag{7}$$

Τότε για κάθε k = 0,±1,±2,... η εξίσωση ισορροπίας είναι

$$0 = -(\lambda_k+\mu_k)P_k+\lambda_{k-1}P_{k-1}+\mu_{k+1}P_{k+1} \tag{8}$$

Επιπλέον πρέπει

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \tag{9}$$

Οι Εξ. (8) μπορούν να προκύψουν εύκολα με επισκόπηση χρησιμοποιώντας την ίδια αρχή όπως και στην παράγραφο 3, μόνο που τώρα στην κατάσταση ισορροπίας η ροή πρέπει να διατηρείται υπό την έννοια ότι η ροή εισόδου ισούται με την ροή εξόδου για κάθε κατάσταση. Δηλαδή, παρατηρούμε ότι

$$\text{Ρυθμός εισόδου στην } k = \lambda_{k-1}P_{k-1}+\mu_{k+1}P_{k+1} \tag{10}$$

$$\text{Ρυθμός εξόδου από την } k = (\lambda_k+\mu_k)P_k \tag{11}$$

Για την κατάσταση ισορροπίας οι δύο αυτοί ρυθμοί είναι ίσοι, οπότε

$$\lambda_{k-1}P_{k-1}+\mu_{k+1}P_{k+1}= (\lambda_k+\mu_k)P_k \tag{12}$$

Αλλά η Εξ. (12) είναι ακριβώς η ίδια με την Εξ. (8). Όμοια με την αντίστοιχη παρατήρηση στην παράγραφο 3, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια αρχή διατήρησης ροής για κάθε κλειστή γραμμή που περιλαμβάνει κάποιες καταστάσεις. Έτσι, εάν αντί του να περικλείσουμε κάθε κατάσταση με μια κλειστή γραμμή χρησιμοποιήσουμε ένα νέο σύνολο τέτοιων ορίων ως εξής, η πρώτη να περικλείει την κατάσταση 0, η δεύτερη τις καταστάσεις 0 και 1, η τρίτη τις 0,1 και 2 και εν γένει η k-στή τις 0,1,2,...,k-1, θα έχουμε τις επόμενες απλές εξισώσεις διατήρησης της ροής

$$\lambda_{k-1}P_{k-1} = \mu_k P_k \tag{13}$$

που είναι ισοδύναμες με τις Εξ. (8).

Η λύση για την εύρεση των P_k μπορεί να γίνει με δύο τουλάχιστον τρόπους, ως εξής:

<u>(α) Τρόπος</u>

Για k=0 υπολογίζουμε το P_1 συναρτήσει του P_0, οπότε

$$P_1 = (\lambda_0/\mu_1)\ P_0 \tag{14}$$

Για k=1 λαμβάνουμε

$$0 = \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 - (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_0/\mu_1)\, P_0 \text{ ή } P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0 \tag{15}$$

και με επαγωγή, εν γένει

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} P_0 \tag{16}$$

Παρατηρείστε ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα λαμβάνεται πιο εύκολα εάν χρησιμοποιηθεί το σύνολο Εξ. (13) αντί των Εξ. (8). Άρα τελικά

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{17}$$

Απομένει πλέον να υπολογιστεί το P_0. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την Εξ. (9) και με αντικατάσταση των Εξ. (17) σ' αυτήν. Τότε

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \tag{18}$$

<u>(β) Τρόπος</u>

Το σύνολο των Εξ. (8) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\lambda_{k-1} P_{k-1} - \mu_k P_k = \lambda_k P_k - \mu_{k+1} P_{k+1} \tag{19}$$

ορίζοντας

$$g_k = \lambda_k P_k - \mu_{k+1} P_{k+1} \tag{20}$$

η Εξ. (19) γράφεται

$$g_k = g_{k-1} \tag{21}$$

ή ισοδύναμα

$$g_k = c = \text{σταθερά ανεξάρτητη του } k \tag{22}$$

Όμως επειδή $\lambda_{-1} = \mu_0 = 0$ θα είναι $g_{-1} = 0$ άρα $g_k=0$ για κάθε $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ δηλαδή

$$P_{k+1} = (\lambda_k/\mu_k)\, P_k \tag{23}$$

που είναι το ίδιο σύνολο εξισώσεων με τις Εξ. (13). Τώρα με εφαρμογή της Εξ. (23) αρχίζοντας για k=0 κλπ, λαμβάνεται η λύση.

Τέλος αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη των P_k εξασφαλίζεται εάν $P_0>0$, δηλαδή, ικανή και αναγκαία συνθήκη για στατική ισορροπία είναι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < \infty \tag{24}$$

Επιπλέον πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η συνθήκη για εργοδικότητα εξασφαλίζεται πάντα, εάν για την ακολουθία $\{\lambda_k/\mu_k\}$ ισχύει ότι υπάρχει ένα k_0 τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να έχουμε

$$\lambda_k < \mu_k \tag{25}$$

5.1 Ασκήσεις

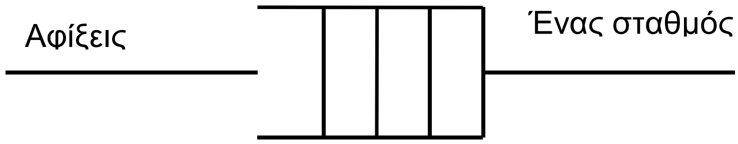
3. Σε μια διαδικασία καθαρών θανάτων έχουμε μόνο θανάτους με ρυθμό ανάλογο του δείκτη της κατάστασης, δηλαδή, μ_k=kμ. Εάν για t=0 βρισκόμαστε στην κατάσταση n βρέστε τις $P_k(t)$, k=0,1,2,...,n.

4. Σε μια διαδικασία καθαρών γεννήσεων ο ρυθμός γεννήσεων είναι ανάλογος του πληθυσμού, δηλαδή λ_k=kλ. Βρέστε τις πιθανότητες $P_k(t)$ ο πληθυσμός τη χρονική στιγμή t να είναι k εάν ο πληθυσμός για t=0 είναι 1.

5. Η λειτουργία μιας απλής τηλεφωνικής συσκευής μπορεί να περιγραφεί από μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων δύο καταστάσεων 0 {ελεύθερη} και 1{κατειλημμένη}. Εάν λ_0=λ και μ_1=μ βρέστε τις $P_0(t)$ και $P_1(t)$.

6. ΟΥΡΕΣ Μ/Μ/1

Μια απλή εφαρμογή των ανωτέρω προκύπτει εάν θεωρήσουμε το αναμονητικό σύστημα που φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Έχουμε αφίξεις Poisson και χρόνους εξυπηρέτησης εκθετικά κατανεμημένους. Τα πακέτα που έρχονται εξυπηρετούνται με σειρά προτεραιότητας (first-come-first-served). Ένα μοντέλο σαν αυτό ονομάζεται Μ/Μ/1 και είναι το απλούστερο μοντέλο στη Θεωρία Αναμονής.



Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα $P_k(t)$ να υπάρχουν k πακέτα στο σύστημα τη στιγμή t. Οι εξισώσεις ισορροπίας, βρίσκονται από αυτές του γενικού μοντέλου γεννήσεων-θανάτων της προηγούμενης παραγράφου, θέτοντας, μ_k=μ, k=1,2,3,.. και λ_k=λ, k=0,1,2,....Οπότε:

$$(\lambda+\mu)P_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t), \; k\geq 1 \tag{1}$$

$$\lambda P_0(t) = \mu P_1(t), \; k=0 \tag{2}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν για λύση την:

$$P_k = \rho^k P_0, \; k\geq 1 \tag{3}$$

όπου ρ=λ/μ. Επειδή το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι ένα, προφανώς

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k} = 1-\rho \tag{4}$$

και επομένως η γενική λύση είναι

$$P_k = (1-\rho)\,\rho^k, \; k\geq 1 \tag{5}$$

Ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο είναι η γνώση της πιθανότητας τα πακέτα που περιμένουν στην ουρά να υπερβαίνουν έναν συγκεκριμένο αριθμό Ν. Από τις Εξ. (4) και (5) έχουμε:

$$p\{k>N\} = \sum_{k=N+1}^{\infty} P_k = (1-\rho)\sum_{k=N+1}^{\infty}\rho^k = \rho^{N+1} \tag{6}$$

Θα δούμε τώρα τις αλλαγές που χρειαζόμαστε στην περίπτωση των συστημάτων M/M/1/N, όπου ο χώρος αναμονής είναι πεπερασμένος και ίσος με N. Στα συστήματα αυτά η γενική λύση έχει την μορφή των Εξ. (3). Όμως τώρα πρέπει:

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{N} \rho^k = P_0 \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} = 1 \tag{7}$$

οπότε έχουμε

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \tag{8}$$

6.1 Ασκήσεις

6. Σε σύστημα M/M/1 ο ρυθμός αφίξεων είναι λ=2 πελάτες/hr, ενώ ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 10 min.

   α) Υπολογίστε τη μέση ουρά στο σύστημα.

   β) Αν το λ αυξηθεί σε 4 πελάτες/hr υπολογίστε πάλι τη μέση ουρά αναμονής.

   γ) Ποια είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του λ ώστε να υπάρχει μόνιμη κατάσταση;

7. Να βρείτε το μέσο μήκος ουράς και τη μέση καθυστέρηση σε κάποιο κόμβο (ο κόμβος θεωρείται σύστημα M/M/1) όταν τροφοδοτείται από 10 τερματικά που το καθένα στέλνει κατά μέσο όρο ένα πακέτο ανά 4 sec, με μέσο μήκος 40 bit. Η γραμμή εξόδου έχει χωρητικότητα 1000 bps. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με την περίπτωση που έχουμε ένα τερματικό που στέλνει κάθε 0,4 sec κατά μέσο όρο, πακέτα ίδια με τα παραπάνω.

8. Ένας κόμβος μπορεί να δεχτεί ως N πακέτα το πολύ. Να βρείτε την πιθανότητα ο κόμβος να είναι πλήρης στις ακόλουθες περιπτώσεις: α) N=2, ρ=0,1, β) N=4, ρ=0,1, γ) N=4, ρ=0,8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

1. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ-ΘΑΝΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΤΗΛΕΦΩΝΙΑ

Η διαδικασία γεννήσεων-θανάτων μπορεί να εφαρμοστεί σε τηλεφωνικά συστήματα, εάν υποθέσουμε ότι αυτή περιγράφει τη μεταβολή συναρτήσει του χρόνου του αριθμού των κατειλημμένων οργάνων και εφόσον οι πρακτικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι άλλες θεωρητικές προϋποθέσεις της διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με το να δείξουμε τον τρόπο και τις προϋποθέσεις εφαρμογής της διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων σε πρακτικά τηλεφωνικά συστήματα. Κατ' αρχήν πρέπει για το πρακτικό σύστημα να ισχύουν τα επόμενα:

1) Στατιστική ισορροπία, που μακροπρόθεσμα ($t \to \infty$) συνεπάγεται

ΑΥΞΗΣΗ = ΜΕΙΩΣΗ

2) Ύπαρξη συνάρτησης κατανομής για τα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων.
3) Ύπαρξη συνάρτησης κατανομής για τη διάρκεια των καταλήψεων.
4) Κάθε πηγή κίνησης δρα ανεξάρτητα από την κατάσταση άλλων πηγών.
5) Η διάρκεια μιας κατάληψης είναι ανεξάρτητα από τη διάρκεια άλλων καταλήψεων.
6) Ύπαρξη ντετερμινιστικών ή πιθανοτικών κατανομών για το τι συμβαίνει στις ανεπιτυχείς κλήσεις.
7) Υποτίθεται ότι οι κατανομές για τα (2) και (3) είναι εκθετικές.

Η κίνηση υποτίθεται ότι δημιουργείται από απλές πηγές που μπορούν να δημιουργήσουν μία μόνο κλήση κάθε φορά. Δηλαδή μία απλή πηγή μπορεί να βρίσκεται σε μία από δύο δυνατές καταστάσεις: "0" ελεύθερη και "1" απασχολημένη. Το πλήθος όλων των άλλων πηγών ("πηγές" όπως θα αναφέρεται στη συνέχεια) μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο, αλλά η προηγούμενη απλή πηγή είναι ένας συνδρομητής ή γενικά ένα όργανο προηγούμενης βαθμίδας. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με α τον ρυθμό κλήσεων μιας απλής πηγής όταν είναι ελεύθερη (όταν η πηγή είναι απασχολημένη ο ρυθμός κλήσεων είναι 0) και με 1/μ ή s τη μέση διάρκεια μιας κατάληψης.

Βάσει των προηγουμένων πρέπει να εκφραστεί ο συνολικός ρυθμός κλήσεων y_k από τις πηγές όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση k. Διάφορες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, που προκύπτουν για πρακτικά συστήματα, είναι

<u>1) Είσοδος Engest ή Bernoulli</u>

Υποτίθεται ότι έχουμε πεπερασμένο πλήθος πηγών, οπότε ο ρυθμός κλήσεων μειώνεται με τον αριθμό καταλήψεων, δηλαδή

$$y_k = (N-k)\alpha \tag{1}$$

όπου

N = το πλήθος των πηγών, k = το πλήθος των καταλήψεων (κατάσταση του συστήματος), α = ο ρυθμός κλήσεων όταν η πηγή είναι ελεύθερη.

<u>2) Είσοδος Poisson</u>

Υποτίθεται άπειρο πλήθος πηγών και ρυθμός κλήσεων ανεξάρτητος του αριθμού καταλήψεων, δηλαδή

$$y_k = \lambda,\ \lambda = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \alpha \to 0}} N\alpha = \text{πεπερασμένο} \tag{2}$$

3) Είσοδος αρνητικού διωνυμικού τύπου

Ο ρυθμός κλήσεων, υποτίθεται ότι αυξάνει με τον αριθμό των καταλήψεων, δηλαδή

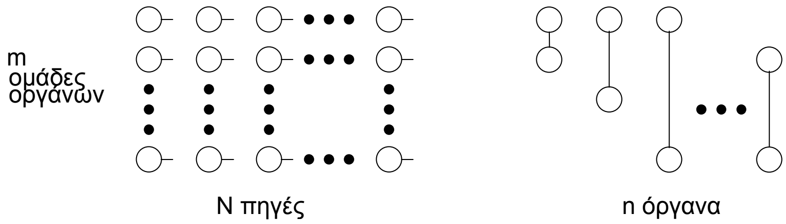
$$y_k = a + kb \tag{3}$$

Τα διάφορα είδη ομαδοποιήσεως που περιγράφτηκαν στο πρώτο κεφάλαιο των σημειώσεων και ο αντίστοιχος ορισμός της κατάστασης k μπορούν να φανούν παραστατικά με τα επόμενα σχήματα.

α) Πλήρης προσιτότητα

Εδώ το k παριστάνει το πλήθος των κατειλημμένων οργάνων, $k \le \min(N,n)$

β) Μερική προσιτότητα. Μεικτονόμηση



Εδώ το πλήθος N των πηγών χωρίζεται σε m ομάδες εισόδου κάθε μία από τις οποίες έχει πρόσβαση σε 3 από τις n εξόδους. Η κατάσταση εδώ σημαίνει κατάληψη συνολικά k από τις N πηγές ή ισοδύναμα, κατάληψη k από τα n όργανα. Ανάλογα με την κατανομή των k καταλήψεων ανάμεσα στις m ομάδες εισόδου και τα n όργανα λαμβάνονται διαφορετικές αποκλεισμένες ομάδες εισόδου (εάν βέβαια $k \ge 3$).

Παρατηρείστε ότι το σύστημα πρέπει να εξεταστεί στο σύνολο του και δεν είναι δυνατή η εξέταση των τμημάτων του μεμονωμένα. Στην πραγματικότητα το k δεν αρκεί για την περιγραφή της κατάστασης, αφού απαιτείται η γνώση της κατανομής των k καταλήψεων στις διάφορες ομάδες εισόδου.

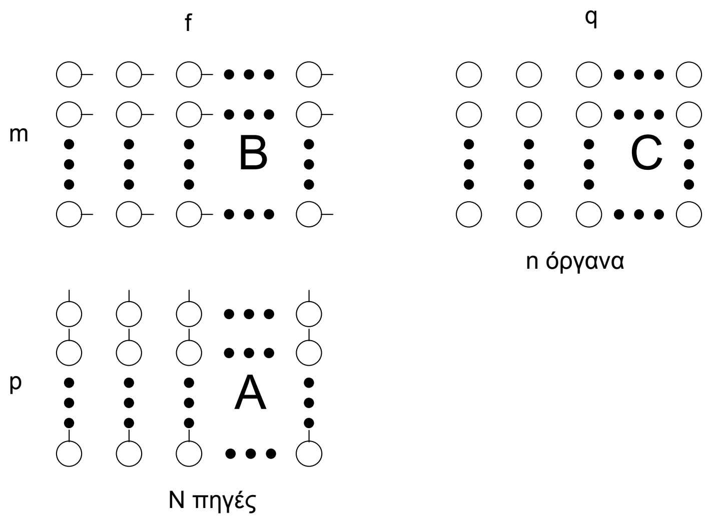
γ) Ζευκτικό σύστημα δύο σταδίων

Εδώ οι πηγές (A) χωρίζονται σε ομάδες, p πηγές ανά στήλη και σκοπός είναι η κατάληψη κάποιου οργάνου μιας συγκεκριμένης στήλης της (C) μέσω ενός οργάνου της (B). Υποτίθεται ότι κάθε όργανο της (A) έχει πρόσβαση σε κάθε ένα από τα m όργανα της αντίστοιχης στήλης της (B) και επίσης κάθε όργανο της (B) έχει πρόσβαση προς όλα (q συνολικά) όργανα της αντίστοιχης γραμμής της (C).

Για σύστημα με απώλειες, το πλήθος των κατειλημμένων οργάνων είναι το ίδιο για κάθε στάδιο. Έτσι το k μπορεί να περιγραφεί είτε τον αριθμό των κατειλημμένων πηγών ή ζεύξεων ή εξόδων. Και πάλι το k πρέπει να αναφέρεται σε όλο το σύστημα. Απομένει τώρα να υπολογιστούν οι ρυθμοί λ_k και μ_k της αντίστοιχης διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων. Εάν υποθέσουμε k καταλήψεις εκθετικά κατανεμημένες ο ρυθμός μ_k είναι

$$\mu_k = k\mu = k/s \tag{4}$$

Αυτό ουσιαστικά ισοδυναμεί με το ότι ο χρόνος που παρέχεται μέχρι το πρώτο τερματισμό από τις k καταλήψεις κατανέμεται εκθετικά με μέση τιμή s/k ή 1/(kμ).



Για τον προσδιορισμό των λ_k πρέπει να παρατηρηθεί ότι δεν ισχύει πάντα $\lambda_k = y_k$, y_k= ο ρυθμός κλήσεων όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση k. Ο λόγος είναι το σύστημα δεν είναι πάντα σε θέση να δεχτεί όλες τις αφικνούμενες κλήσεις. Έτσι εν γένει

$$\lambda_k = y_k w_k \tag{5}$$

όπου

$w_k = 1$ σημαίνει ότι κάθε νέα κλήση μπορεί πάντα να καταλάβει ένα όργανο στο σύστημα

$w_k = 0$ σημαίνει ότι το σύστημα δε μπορεί να δεχτεί καμία νέα κλήση

$0<w_k<1$ σημαίνει ότι μερικές μόνο κλήσεις μπορούν να γίνουν δεκτές στο σύστημα

Για συστήματα πλήρους προσιτότητας με απώλειες (N>n) είναι

$$w_k = \begin{cases} 1 & \text{για } k < n \\ 0 & \text{για } k = n \end{cases} \tag{6}$$

Για αναμονητικά συστήματα

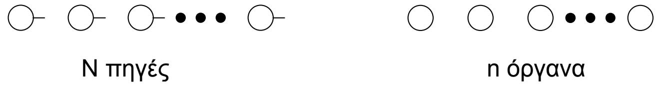
$$w_k = 1,\ 0<k<n \tag{7}$$

αφού οι ανεπιτυχείς κλήσεις αναμένουν.

2. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΠΡΟΣΙΤΟΤΗΤΟΣ ΜΕ ΑΠΩΛΕΙΕΣ

2.1 Υπολογισμός βασικών μεγεθών σε συστήματα με απώλειες

Θα εφαρμόσουμε εδώ το μοντέλο της θεωρίας γεννήσεων-θανάτων για ειδικές περιπτώσεις συστημάτων με απώλειες πλήρους προσιτότητας. Ένα τέτοιο σύστημα φαίνεται παραστατικά στο κατωτέρω σχήμα



όπου N και n μπορεί να είναι αδιακρίτως πεπερασμένα ή άπειρα. Στο σύστημα μπορεί να έχουμε το πολύ r ταυτόχρονες καταλήψεις, δηλαδή

$$0 \le k \le r = \min(n, N) \tag{1}$$

Επίσης η έκφραση $\lambda_k = w_k y_k$ εδώ γίνεται

$$\lambda_k = \begin{cases} y_k, 0 \le k \le r-1 \\ 0, \quad k \ge r \end{cases} \tag{2}$$

ή ισοδύναμα

$$w_k = \begin{cases} 1, \quad 0 \le k \le r-1 \\ 0, \quad k \ge r \end{cases} \tag{3}$$

Παρατηρείστε ότι για N≤n δεν έχουμε απόρριψη κλήσεων, αφού διατίθεται περισσότερα όργανα n απ' ότι ταυτόχρονες δυνατές καταλήψεις N. Όσον αφορά τους ρυθμούς τερματισμού θα έχουμε

$$\mu_k = k/s = k\mu \tag{4}$$

Οι ειδικές περιπτώσεις που θα εξετάσουμε αφορούν την εκλογή των ρυθμών κλήσεων y_k και του πλήθους οργάνων n και πηγών N. Ειδικότερα θα εξεταστούν τα επόμενα συστήματα

(a) Erlang

$N>>n$ ή $N=\infty$, $y_k=\lambda$

(b) Poisson

$N=\infty$, $n=\infty$, $y_k=\lambda$

(c) Engset

$N>n$, $y_k=(N-k)\alpha$

(d) Bernoulli

$N\le n$, $y_k=(N-k)\alpha$ (8)

2.1.1 Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης

Έστω X(t) είναι ο αριθμός των κλήσεων σε εξέλιξη στο σύστημα τη χρονική στιγμή t και C(t,t+h) το γεγονός {άφιξη μιας κλήσης στο χρονικό διάστημα (t,t+h)}. Ορίζουμε με $P_k(t)$ την πιθανότητα να υπάρχουν k κλήσεις στο σύστημα τη χρονική στιγμή t και με $\Pi_k(t)$ την πιθανότητα μια κλήση που έρχεται τη χρονική στιγμή t να βρει k κλήσεις σε εξέλιξη. Τότε

$$\begin{aligned} P_k(t) &= P\{X(t) = k\} \\ \Pi_k(t) &= \lim_{h\to 0} P\{X(t) = k | C(t, t+h)\} \end{aligned} \tag{5}$$

και στη μόνιμη κατάσταση

$$\begin{aligned} P_k &= \lim_{t\to\infty} P_k(t) \\ \Pi_k &= \lim_{t\to\infty} \Pi_k(t) \end{aligned} \tag{6}$$

Σημειώστε ότι το γεγονός C(t,t+h) δε σημαίνει υποχρεωτικά ότι η κλήση γίνεται δεκτή. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Bayes έχουμε

$$\Pi_k(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P\{C(t, t+h) | X(t) = k\} P_k(t)}{\sum_j P\{C(t, t+h) | X(t) = j\} P_j(t)} \tag{7}$$

Για διαδικασίες γεννήσεων-θανάτων {X(t), T≥0} έχουμε $P\{C(t,t+h)|X(t)=k\}=y_k h + o(h)$, οπότε

$$\Pi_k = \frac{y_k P_k}{\sum_j y_j P_j} \tag{8}$$

Αφού υπολογίσει τις πιθανότητες μονίμου κατάστασης P_k για το εξεταζόμενο σύστημα είναι κανείς σε θέση στη συνέχεια να υπολογίσει μερικά χαρακτηριστικά μεγέθη για το σύστημα, από αυτά που περιγράφτηκαν στο πρώτο κεφάλαιο των σημειώσεων. Στη συνέχεια κατάσταση k σημαίνει k καταλήψεις οργάνων.

2.1.2 Συμφόρηση χρόνου ή πιθανότητα απώλειας E

Το E ορίζεται σαν η πιθανότητα όλα τα όργανα να είναι κατειλημμένα, ή ισοδύναμα, σαν το ποσοστό του χρόνου κατά τον οποίο στο σύστημα είναι αποκλεισμένο. Προφανώς

$$E = P_n \tag{9}$$

όπου k=n είναι η κατάσταση όπου επικρατεί συμφόρηση

2.1.3 Συμφόρηση κλήσεων ή πιθανότητα αποκλεισμού B

Το B ορίζεται σαν η πιθανότητα μια κλήση να είναι ανεπιτυχής, ή ισοδύναμα, σαν το ποσοστό των ανεπιτυχών κλήσεων. Σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$B = \Pi_n = \frac{y_n P_n}{\sum_j y_j P_j} \tag{10}$$

Σημειώστε ότι ο αριθμητής παριστάνει τον αναμενόμενο αριθμό ανεπιτυχών κλήσεων ανά μονάδα χρόνου και ο παρονομαστής το συνολικό αναμενόμενο αριθμό προσφερόμενων κλήσεων υπολογισμένο στη μονάδα χρόνου.

2.1.4 Μεταφερόμενο φορτίο A_c

Το A_c παριστάνει τον αναμενόμενο αριθμό ταυτοχρόνων καταλήψεων και είναι μια μετρήσιμη ποσότητα. Προφανώς

$$A_c = \sum_{k=0}^{n} k\, P_k \tag{11}$$

όπου n (ο αριθμός οργάνων) είναι και ο μέγιστος αριθμός ταυτοχρόνων καταλήψεων. Όμως αφού

$$k\mu P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} \tag{12}$$

Το A_c μπορεί να υπολογιστεί και από την

$$A_c = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1} P_{k-1}/\mu = s \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k \tag{13}$$

(μην ξεχνάτε s=1/μ). Η τελευταία σχέση θα έπρεπε να αναμένεται αφού απλώς εκφράζει το γεγονός ότι το μεταφερόμενο φορτίο ισούται με τον αναμενόμενο αριθμό αφίξεων που γίνονται δεκτές στο σύστημα κατά τη διάρκεια μέσου χρόνου κατάληψης.

2.1.5 Προσφερόμενο φορτίο A_o

Το A_o ορίζεται σαν ο αναμενόμενος αριθμός αφίξεων κλήσεων στο σύστημα κατά τη διάρκεια του μέσου χρόνου κατάληψης. Προφανώς

$$A_o = \sum_{k=0}^{n} y_k P_k / \mu = s \sum_{k=0}^{n} y_k P_k \tag{14}$$

Τονίζουμε ότι το προσφερόμενο φορτίο A_o δεν είναι μια μετρήσιμη ποσότητα, αλλά ένα θεωρητικό μέγεθος που εξαρτάται αποκλειστικά από το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιείται.

Έστω $\Delta A = A_o - A_c$ η διαφορά προσφερόμενου και μεταφερόμενου φορτίου. Τότε έχουμε

$$\Delta A = \sum_{k=0}^{n-1} s(1-w_k)y_k P_k + s y_n P_n = s\sum_{k=0}^{n} y_k(1-w_k)P_k \tag{15}$$

αφού προφανώς w_k=0 για k=n. Από την Εξ. (15) προκύπτει ότι εν γένει

$$\Delta A \geq 0 \tag{16}$$

Για συστήματα με απώλειες εν γένει $A_o>A_c$, αφού w_k=0 για κάποιο k. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, $A_o=A_c$ για αναμονητικά συστήματα, εάν οι κλήσεις που αναμένουν δεν εγκαταλείπουν το σύστημα προτού εξυπηρετηθούν. Όμως σε ειδικές περιπτώσεις, όπως θα δούμε, μπορεί να είναι $A_o=A_c$.

2.1.6 Το μεταφερόμενο φορτίο a_v από το ν-οστό όργανο

Το a_v υπολογίζεται εύκολα εάν έχουμε τυχαία αναζήτηση και εν γένει δύσκολα για ακολουθιακή αναζήτηση. Οι αντίστοιχες εκφράσεις, όπου υπάρχουν, θα αναφερθούν στην εξέταση των ειδικότερων περιπτώσεων.

2.1.7 Ο συντελεστής βελτίωσης F

Εάν το μέγεθος n ενός συστήματος επεκταθεί σε n+Δn όργανα χωρίς μεταβολή του προσφερόμενου φορτίου, ο συντελεστής βελτίωσης ορίζεται από την

$$F = A_c(n+\Delta n) - A_c(n) \tag{17}$$

δηλαδή, F είναι η αύξηση της κίνησης που μπορεί να μεταφέρει το σύστημα, εάν αυξήσουμε τον αριθμό οργάνων από n σε n+Δn. Συνήθως λαμβάνουμε Δn=1.

2.1.8 Διάρκεια $\bar{t}_k$ της κατάστασης k

Το σύστημα παραμένει στην κατάσταση k είτε μέχρι να τερματιστεί μια κατάληψη είτε μέχρι να φθάσει μια νέα κλήση. Οι αντίστοιχοι ρυθμοί είναι μ_k και λ_k. Αποδεικνύεται τότε ότι η κατανομή του $\bar{t}_k$ είναι εκθετική, δηλαδή

$$f_{t_k}(t) = (\lambda_k + \mu_k)e^{-(\lambda_k+\mu_k)t} \tag{18}$$

άρα η μέση διάρκεια $\bar{t}_k$ είναι:

$$\bar{t}_k = 1/(\lambda_k+\mu_k) \tag{19}$$

2.1.9 Η πιθανότητα H(x) κατάληψης x καθορισμένων οργάνων

Η πιθανότητα H(x) κατάληψης x συγκεκριμένων οργάνων υπολογίζεται εύκολα για τυχαία αναζήτηση, οπότε το ίδιο φορτίο μεταφέρεται από όλα τα όργανα και όλοι οι συνδυασμοί με το ίδιο πλήθος κατειλημμένων οργάνων είναι εξίσου πιθανοί. Για ακολουθιακή αναζήτηση ο υπολογισμός της H(x) είναι εξαιρετικά δύσκολος. Για τυχαία αναζήτηση εύκολα υπολογίζεται εύκολα ότι

$$H(x) = \sum_{k=x}^{n} \frac{\binom{n-x}{k-x}}{\binom{n}{k}} P_k \tag{20}$$

2.2 Σύστημα με απώλειες τύπου Erlang

Το εξεταζόμενο σύστημα φαίνεται παραστατικά πιο κάτω

Υποθέσεις

$N=\infty$ ή $N>>n$

$n=$ πεπερασμένο

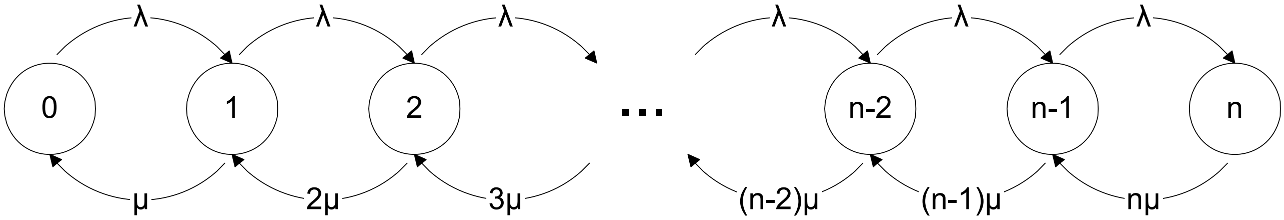
$\mu_k=k\mu=k/s$

$y_k=\lambda$

$$\lambda_k = y_k w_k = \begin{cases} \lambda, 0 \le k < n \\ 0, k = n \end{cases}$$

$A = \lambda/\mu=\lambda s$

Τότε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης καταστάσεων είναι



Με τους συμβολισμούς της θεωρίας αναμονής το εξεταζόμενο σύστημα είναι το M/M/m/m. (m σταθμοί εξυπηρέτησης, πεπερασμένος χώρος αναμονής m). Από τις Εξ. (17) και (18) της παραγράφου 5 του κεφαλαίου 2 έχουμε

$$P_k = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}} = \frac{A^k/k!}{\sum_{i=0}^{n} A^i/i!} \tag{1}$$

Η κατανομή των Εξ. (1) αποκαλείται *κατανομή Erlang ή κολοβή κατανομή Poisson.* Παρατηρείστε ότι οι ρυθμοί λ και μ εμφανίζονται στην Εξ. (1) μόνο σαν ο λόγος $A=\lambda/\mu$, δηλαδή, το προσφερόμενο φορτίο (δες πιο κάτω).

Με εφαρμογή των αντιστοίχων σχέσεων της παραγράφου 1 του παρόντος κεφαλαίου εύκολα υπολογίζονται τα επόμενα μεγέθη.

2.2.1 Συμφόρηση χρόνου E

$$E = P_n = \frac{A^n/n!}{\sum_{i=0}^{n} A^i/i!} = E_n(A) \qquad \text{τύπος Erlang} \tag{2}$$

2.2.2 Συμφόρηση κλήσεων B

$$B = \Pi_n = \frac{\lambda P_n}{\sum_{k=0}^{n} \lambda P_k} = P_n = E_n(A) \tag{3}$$

Τονίζουμε ότι, **B=E**, δηλαδή, η $E_n(A)$ δίνει τόσο το ποσοστό χρόνου που το σύστημα είναι πλήρως απασχολημένο όσο και το ποσοστό των κλήσεων που χάνονται.

2.2.3 Μεταφερόμενο φορτίο A_c

$$A_c = \sum_{k=0}^{n} k\, P_k = \sum_{k=1}^{n} A\, P_{k-1} = A(1 - P_n) = A(1 - E_n(A)) = A(1 - B) \tag{4}$$

2.2.4 Προσφερόμενο φορτίο A_o

$$A_o = \sum_{k=0}^{n} sy_k P_k = A \sum_{k=0}^{n} P_k = A \tag{5}$$

άρα

$$\Delta A = A_o - A_c = AE_n(A) = AB \tag{6}$$

2.2.5 Διάρκεια $\bar{t}_k$ της κατάστασης k

$$\bar{t}_k = \frac{s}{A + k} = \frac{1}{\lambda + k\mu}, \quad 0 \le k < n \tag{7}$$

$$\bar{t}_n = \frac{s}{n} = \frac{1}{n\mu}, \quad k = n \tag{8}$$

2.2.6 Πιθανότητα H(x) κατάληψης x συγκεκριμένων οργάνων

Υποτίθεται τυχαία αναζήτηση. Τότε

$$H(x) = \sum_{k=x}^{n} \frac{\binom{n-x}{k-x}}{\binom{n}{k}} P_k = \frac{E_n(A)}{E_{n-x}(A)} \qquad \text{τύπος Palm-Jacobaeus} \tag{9}$$

2.2.7 Φορτίο a_ν στο ν-οστό όργανο

Τυχαία αναζήτηση

$$a_\nu = \frac{A_c}{n} = \frac{A(1 - E_n(A))}{n}, \quad \text{δηλαδή, κάθε όργανο μεταφέρει το ίδιο φορτίο} \tag{10}$$

Ακολουθιακή αναζήτηση

$$a_\nu = A(E_{\nu-1}(A) - E_\nu(A)) \tag{11}$$

δηλαδή το ν-οστό όργανο μεταφέρει τη διαφορά κινήσεων μεταξύ της περίπτωσης να έχουμε ν όργανα και της περίπτωσης να έχουμε ν-1 όργανα. Αυτό συμβαίνει επειδή το ν-οστό όργανο είναι το τελευταίο που ερευνάται εάν είναι ελεύθερο. Έτσι ο αριθμός $N_{\nu-1}$ των κατειλημμένων οργάνων από τα πρώτα ν-1 όργανα είναι ανεξάρτητος από την τύχη των κλήσεων που δεν εξυπηρετούνται από αυτή την ομάδα ν-1 οργάνων. Επομένως, το $X_\nu = N_\nu - N_{\nu-1}$ είναι η τυχαία μεταβλητή που δείχνει εάν το όργανο ν είναι κατειλημμένο ή όχι. Επομένως, $a_\nu = E\{X_\nu\} = E\{N_\nu\} - E\{N_{\nu-1}\}$. Όμως, το φορτίο που μεταφέρεται από ν όργανα, που ισούται με $E\{N_\nu\} = A(1-E_\nu(A))$, ενώ το φορτίο που μεταφέρουν τα ν-1 όργανα είναι $E\{N_{\nu-1}\} = A(1-E_{\nu-1}(A))$ και λαμβάνουμε το ζητούμενο. Διαισθητικά, θα πρέπει $a_1 > a_2 > a_3 ...$.

2.2.8 Ο συντελεστής βελτίωσης F

$$F = A_c(n+1)-A_c(n) \tag{12}$$

άρα

$$F_n(A) = A(E_n(A)-E_{n+1}(A)) \tag{13}$$

Παρατηρείστε ότι $F_n(A) = a_{n+1}$ και ότι $0 \leq F_n(A) \leq 1$. Μερικές ενδιαφέρουσες οριακές τιμές είναι:

$$F_0(A) = A/(1+A),\ F_n(0) = 0,\ F_n(\infty) = 1,\ F_\infty(A) = A \tag{14}$$

2.2.9 Αριθμητικός υπολογισμός της πιθανότητας αποκλεισμού B

Τελειώνοντας δίδουμε έναν επαναληπτικό τύπο υπολογισμού της $E_n(A)$. Αποδεικνύεται ότι

$$E_k(A) = \frac{AE_{k-1}(A)}{k + AE_{k-1}(A)} \quad \text{ή} \quad E_k^{-1}(A) = 1 + kE_{k-1}^{-1}(A)/A \tag{15}$$

όπου $E_0(A) = 1, E_1(A) = \dfrac{A}{1+A}$

2.2.10 Σχόλια

Μια προσεκτική μελέτη του τύπου του Erlang οδηγεί στο επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα: Καθώς ο αριθμός των οργάνων και το προσφερόμενο φορτίο αυξάνουν με τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα αποκλεισμού να μένει σταθερή, ο βαθμός χρησιμοποίησης των οργάνων, δηλαδή, $\rho = A_c / A_o$, αυξάνει και αυτός. Με άλλα λόγια, μεγάλες ομάδες οργάνων είναι πιο αποδοτικές από μικρές ομάδες οργάνων. Δυστυχώς, στην πράξη, κατασκευαστικοί λόγοι δεν επιτρέπουν την εκμετάλλευση του γεγονότος αυτού. Παρόλα αυτά, ομάδες υψηλού βαθμού χρησιμοποίησης είναι πιο ευάλωτες σε περιπτώσεις υπερφόρτωσης απ' ότι μικρότερες ομάδες με την ίδια πιθανότητα αποκλεισμού.

Για μια ομάδα οργάνων σταθερού μεγέθους, η χρησιμοποίησή τους αυξάνει καθώς το προσφερόμενο φορτίο αυξάνει, όμως ταυτόχρονα αυξάνει και η πιθανότητα αποκλεισμού. Έτσι η ανάγκη για αποδοτική χρήση του εξοπλισμού αντισταθμίζεται από τη χειροτέρευση της ποιότητας εξυπηρέτησης.

Ένα σημαντικό άλλο θεώρημα είναι ότι τα αποτελέσματα για το σύστημα Erlang ισχύουν για οποιαδήποτε κατανομή του χρόνου κατάληψης, που έχει πεπερασμένη μέση τιμή, παρότι η απόδειξη έγινε για συστήματα όπου υποτίθεται εκθετική συνάρτηση κατανομής. Το αξιοσημείωτο αυτό γεγονός, ότι η κατανομή Erlang ή κολοβή κατανομή Poisson, ισχύουν για αυθαίρετες κατανομές του χρόνου κατάληψης, υποτέθηκε από τον ίδιο τον Erlang το 1917, αλλά αποδείχθηκε πολύ αργότερα (1957). Αξίζει να δώσουμε την απόδειξη για την περίπτωση n=1.

Η άφιξη μιας κλήσης, που ακολουθεί διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, σε άδειο σύστημα θα απασχολήσει το μοναδικό όργανο για χρονικό διάστημα κατά μέσο όρο s, όπου η κατανομή του θεωρείται αυθαίρετη. Οι κλήσεις που φθάνουν όταν το όργανο είναι απασχολημένο αποχωρούν αμέσως. Το όργανο είναι εναλλάξ απασχολημένο ή ελεύθερο, με περίοδο αργίας 1/λ και περίοδο απασχόλησης s. Θεωρώντας τέτοιους κύκλους σε σειρά, προφανώς, η μέση διάρκεια του κύκλου είναι s+1/λ και επομένως

$$P_1 = \frac{s}{1/\lambda + s} = \frac{A}{1+A} \tag{16}$$

δηλαδή, η προβλεπόμενη από τον τύπο του Erlang. Επειδή $P_0 + P_1 = 1$,

$$P_0 = \frac{1}{1+A} \tag{17}$$

και πάλι σε συμφωνία με τον τύπο του Erlang. Εάν εξετάσουμε το σύστημα από την πλευρά των αφίξεων κλήσεων, αφού μόνο μία κλήση εξυπηρετείται σε κάθε κύκλο

$$\Pi_1 = \frac{E\{N\}}{1+E\{N\}} \tag{18}$$

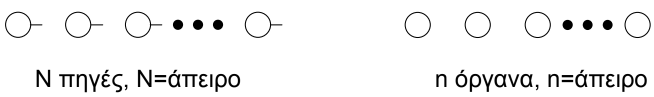
όπου $E\{N\}$ ο μέσος αριθμός κλήσεων που φθάνουν κατά τη διάρκεια της απασχόλησης του μοναδικού οργάνου. Όμως, αφού η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson $E\{N\}=A$, που οδηγεί στο αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Σαν μια απλή εφαρμογή των προηγουμένων θεωρείστε μια ζεύξη με n κυκλώματα μεταξύ δύο τηλεφωνικών κέντρων. Τα κυκλώματα μπορούν να καταληφτούν και από τα δύο κέντρα και έστω ότι οι αντίστοιχες κινήσεις είναι Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι οι χρόνοι κατάληψης από κάθε κέντρο έχουν την ίδια αυθαίρετη κατανομή με μέση τιμή $1/\mu$. Η υπέρθεση των δύο κινήσεων είναι Poisson με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, η πιθανότητα αποκλεισμού είναι η ίδια για κάθε μία από τις κινήσεις (αφού οι αφίξεις είναι Poisson) και υπολογίζεται από τον τύπο του Erlang για φορτίο $A=\lambda/\mu = (\lambda_1 + \lambda_2)/\mu = A_1 + A_2$.

Έστω τώρα ότι οι χρόνοι κατάληψης είναι διαφορετικοί για τα δύο κέντρα, $1/\mu_1$ και $1/\mu_2$, αντίστοιχα. Η υπέρθεση των κινήσεων θα είναι και πάλι Poisson με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, όμως ο μέσος χρόνος κατάληψης για όλες τις κλήσεις θα είναι $1/\mu = \lambda_1/\lambda\ (1/\mu_1) + \lambda_2/\lambda\ (1/\mu_2)$. Πολλαπλασιάζοντας με λ λαμβάνουμε $A = A_1 + A_2$. Δηλαδή, η συνολική κίνηση που προσφέρεται στα κυκλώματα της ζεύξης είναι το άθροισμα των επί μέρους κινήσεων από κάθε κέντρο. Η πιθανότητα αποκλεισμού είναι η ίδια για κάθε μία από τις κινήσεις (αφού οι αφίξεις είναι Poisson) και υπολογίζεται από τον τύπο του Erlang για φορτίο $A = A_1 + A_2$.

2.3 Σύστημα με απώλειες τύπου Poisson

Το εξεταζόμενο σύστημα φαίνεται παραστατικά κατωτέρω



Υποθέσεις

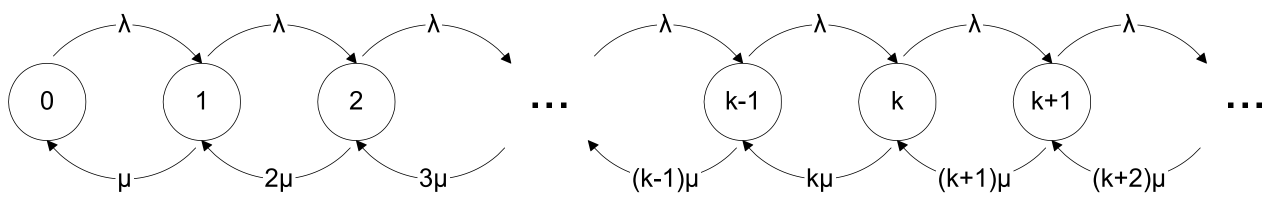
$N=n=\infty$

$\mu_k=k\mu=k/s$

$y_k=\lambda_k=\lambda$, $k=0,1,2,...$

$A=\lambda/\mu = \lambda s$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης καταστάσεων είναι



Το αντίστοιχο σύστημα αναμονής είναι το M/M/∞ (άπειροι σταθμοί εξυπηρέτησης). Εύκολα υπολογίζεται

$$P_k = \frac{A^k}{k!} e^{-A} \qquad \text{κατανομή Poisson} \qquad (1)$$

Επομένως

$E = B = 0$, αφού $n=\infty$ και $w_k=1$ για κάθε k

$$A_c = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P_k = \sum_{k=1}^{\infty} A \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} e^{-A} = A \qquad (2)$$

$$A_o = \sum_{k=0}^{\infty} sy_k P_k = A \sum_{k=0}^{\infty} P_k = A \qquad (3)$$

$\Delta A = A_o - A_c = 0$

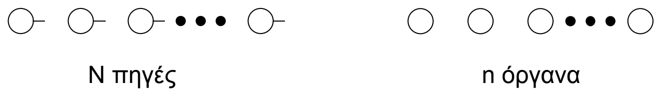
Η μέση διάρκεια $\bar{t}_k$ της κατάστασης k είναι

$$\bar{t}_k = \frac{s}{A+k} = \frac{1}{\lambda + k\mu} \qquad (4)$$

Τα H(x) και F δεν έχουν νόημα για $n=\infty$. Τέλος το φορτίο a_v του ν-οστού οργάνου υπολογίζεται από τους αντίστοιχους τύπους της περίπτωσης Erlang (παράγραφος 2.2).

2.4 Σύστημα με απώλειες τύπου Engset

Το εξεταζόμενο σύστημα είναι



Υποθέσεις

$N>n$, N, n= πεπερασμένα

$\mu_k=k\mu=k/s$

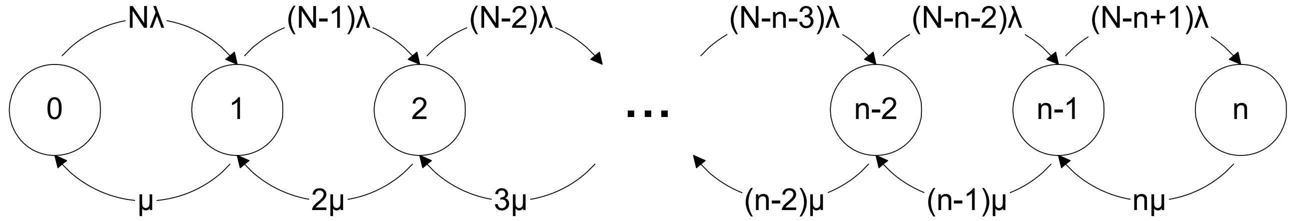
$y_k=(N-k)\lambda$

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k)\lambda, 0 \le k < n \\ 0, k = n \end{cases}$$

λ = ρυθμός κλήσεων ανά πηγή όταν αυτή είναι ελεύθερη

$\alpha=\lambda s$= κίνηση παραγόμενη από μια ελεύθερη πηγή.

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης καταστάσεων είναι



Το αντίστοιχο σύστημα αναμονής είναι το M/M/m/m/N (m σταθμοί εξυπηρέτησης, πεπερασμένος χώρος αναμονής m, πεπερασμένος πληθυσμός πελατών N).

2.4.1 Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης

Εφαρμόζοντας τις Εξ. (17) και (18) της παραγράφου 5 του κεφαλαίου 2 έχουμε

$$P_k = \frac{\binom{N}{k}\alpha^k}{\sum_{i=0}^{n}\binom{N}{i}\alpha^i}, 0 \le k \le n \tag{1}$$

εάν θέσουμε

$$\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{2}$$

τότε λαμβάνουμε

$$P_k = \frac{\binom{N}{k}\beta^k(1-\beta)^{N\text{-}k}}{\sum_{i=0}^{n}\binom{N}{i}\beta^i(1-\beta)^{N\text{-}i}}, 0 \le k \le n \tag{3}$$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα Π_k μια κλήση που έρχεται να βρει k κλήσεις σε εξέλιξη είναι

$$\Pi_k = \frac{(N-k)\alpha P_k}{\sum_{i=0}^{n}(N-i)\alpha P_i} = \frac{\binom{N-1}{k}\alpha^k}{\sum_{i=0}^{n}\binom{N-1}{i}\alpha^i} \tag{4}$$

Παρατηρείστε ότι οι πιθανότητες και P_k και Π_k εξαρτώνται από το πλήθος των πηγών N. Στη συνέχεια για να δείξουμε αυτή την εξάρτηση θα γράφουμε $P_k[N]$ και $\Pi_k[N]$, αντίστοιχα. Προφανώς,

$$\Pi_k[N]=P_k[N\text{-}1],\ 0\le k\le N\text{-}1 \tag{5}$$

2.4.2 Συμφόρηση χρόνου E

$$E=P_n[N]=\frac{\binom{N}{n}\alpha^n}{\sum_{i=0}^{n}\binom{N}{i}\alpha^i}=E(n,N,\alpha) \tag{6}$$

2.4.3 Συμφόρηση κλήσεων Β

$$B = \Pi_n[N] = \frac{\binom{N\text{-}1}{n}\alpha^n}{\sum_{i=0}^{n}\binom{N\text{-}1}{i}\alpha^i} = B(n,N,\alpha) \qquad \text{τύπος Engset} \qquad (7)$$

Παρατηρείστε ότι B(n,N,α) = E(n,N-1,α), δηλαδή, η συμφόρηση κλήσεων είναι ίση με τη συμφόρηση χρόνου σε ένα σύστημα με N-1 πηγές, αλλά με την ίδια κίνηση ανά ελεύθερη πηγή α και το ίδιο n. Από τις εκφράσεις των B και E μπορούν να προκύψουν οι επόμενες σχέσεις που συνδέουν τα δύο αυτά χαρακτηριστικά μεγέθη

$$E = \frac{N}{N-n}\frac{B}{1+\alpha(1-B)} \quad \text{ή} \quad B = \frac{(N\text{-}n)(1+\alpha)E}{N+(N-n)\alpha E} \qquad (8)$$

2.4.4 Μεταφερόμενο φορτίο A_c

$$A_c = \sum_{k=0}^{n} k\,P_k = \sum_{k=1}^{n}(N-k+1)\alpha P_{k\text{-}1} = N\alpha\sum_{k=0}^{n-1}P_k - \alpha\sum_{k=1}^{n-1}kP_k = N\alpha(1-P_n) - \alpha(A_c - nP_n) \qquad (9)$$

άρα

$$A_c = \frac{N\alpha}{1+\alpha}\left(1 - \frac{N-n}{N}P_n\right) \qquad (10)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση που συνδέει τα $E=P_n$ και B έχουμε

$$A_c = \frac{N\alpha(1-B)}{1+\alpha(1-B)} \qquad (11)$$

2.4.5 Προσφερόμενο φορτίο A_o

$$A_o = \sum_{k=0}^{n} s y_k P_k = \sum_{k=0}^{n} s(N\text{-}k)\lambda P_k = N\alpha\sum_{k=0}^{n}P_k - \alpha\sum_{k=1}^{n}kP_k = N\alpha - \alpha A_c \qquad (12)$$

οπότε αφού $P_n = E$

$$A_o = \frac{N\alpha}{1+\alpha} + \frac{(N-n)\alpha^2}{1+\alpha}E \qquad (13)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση που συνδέει τα E και B έχουμε

$$A_o = \frac{N\alpha}{1+\alpha(1-B)} \qquad (14)$$

Παρατηρείστε ότι $A_c = A_o(1\text{-}B)$ και ότι το α μπορεί να ληφθεί από την

$$\alpha = \frac{A_o}{N - A_o(1-B)} \qquad (15)$$

Επίσης

$$\Delta A = A_o - A_c = \frac{N\alpha B}{N - \alpha(1-B)} \qquad (16)$$

Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι B<E για την περίπτωση που εξετάζουμε. Πράγματι

$$B < E \Rightarrow \frac{N}{N-n}\frac{B}{1+\alpha(1-B)} > B \Rightarrow \alpha(1-B) < \frac{n}{N-n} \Rightarrow \alpha(1-B)(N-n) < n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(1-B)N - n(1-B)\alpha < n \Rightarrow n > \frac{N\alpha(1-B)}{1+\alpha(1-B)} = A_c$$

όμως αφού πάντα $n>A_c$ προκύπτει το ζητούμενο.

2.4.6 Μέση διάρκεια $\bar{t}_k$ της κατάστασης k

Εύκολα βρίσκουμε

$$\bar{t}_k = \frac{s}{(N-k)\alpha + k} = \frac{1}{(N-k)\lambda + k\mu}, \quad 0 \le k < n \tag{17}$$

$$\bar{t}_n = \frac{s}{n} = \frac{1}{n\mu}, \quad k = n \tag{18}$$

2.4.7 Πιθανότητα κατάληψης x συγκεκριμένων οργάνων H(x)

Για τυχαία αναζήτηση

$$H(x) = \sum_{k=x}^{n} \frac{\binom{n-x}{k-x}}{\binom{n}{k}} P_k = \frac{E(n,N,\alpha)}{E(n-x,N-x,\alpha)} \tag{19}$$

2.4.8 Συντελεστής βελτίωσης F

$$F(n,N) = A_c(n+1) - A_c(n) = \frac{N\alpha(1-B')}{1+\alpha(1-B')} - \frac{N\alpha(1-B)}{1+\alpha(1-B)} \tag{20}$$

όπου

B = B(n,N,α), B΄= B(n+1,N,α)

αλλά από την αναδρομική σχέση για τα B(n,N,α)

$$B' = \frac{(N-n-1)\alpha B}{n+(N-n-1)\alpha B} \quad \text{ή} \quad B = \frac{n+1}{N-n-1}\frac{1}{\alpha}\frac{B'}{1-B'} \tag{21}$$

οπότε

$$F(n,N) = A_c \frac{B}{1-B} = \frac{1-\gamma\alpha(1-B)}{1+\alpha(1-‹B)} \tag{22}$$

όπου

$$\gamma = \frac{N-n-1}{n+1}, \quad A_c = \frac{N\alpha(1-B)}{1+\alpha(1-B)} \tag{23}$$

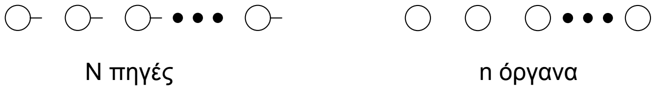
2.4.9 Αριθμητικός υπολογισμός των πιθανοτήτων απώλειας E και αποκλεισμού B

Αποδεικνύεται και η επόμενη αναδρομική σχέση

$$B(n,N,\alpha) = \frac{(N-n)\alpha B(n-1,N,\alpha)}{n+(N-n)\alpha B(n-1,N,\alpha)} \tag{24}$$

2.5 Σύστημα με απώλειες τύπου Bernoulli

Το σύστημα που εξετάζουμε είναι



Υποθέσεις

$N \le n$

$\mu_k = k\mu = k/s$

$y_k = \lambda_k = (N-k)\lambda,\ 0 \le k \le N$

Εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη υποπαράγραφο 2.4 έχουμε όπου

$$P_k = \binom{N}{k} \alpha^{N-k} (1-\alpha)^k \qquad \text{Διωνυμική κατανομή} \tag{1}$$

όπου

$$\alpha = \lambda s/(1+\lambda s) = \lambda/(\lambda+\mu) \tag{2}$$

2.5.1 Συμφόρηση χρόνου E

$$E = \begin{cases} 0, \text{εάν } N < n \\ P_n = \alpha^n = \alpha^N, \text{εάν } N = n \end{cases} \tag{3}$$

2.5.2 Συμφόρηση κλήσεων B

Πάντοτε B=0 για $N \le n$ αφού υπάρχουν πάντα αρκετά όργανα

2.5.3 Μεταφερόμενο φορτίο A_c

$$A_c = \sum_{k=0}^{n} k\, P_k = N\alpha \tag{4}$$

2.5.4 Προσφερόμενο φορτίο A_o

$$A_o = \sum_{k=0}^{n} s y_k P_k = \sum_{k=0}^{n} s(N\text{-}k)\lambda P_k = Ns\lambda - s\lambda A_c = (N - N\alpha)\frac{\alpha}{1-\alpha} = N\alpha \tag{5}$$

άρα όπως αναμένεται

$$\Delta A = A_o - A_c = 0 \tag{6}$$

2.5.5 Φορτίο ν-οστού οργάνου

Για τυχαία αναζήτηση

$$a_\nu = A_c/n = N\alpha/n,\ \nu=1,2,...,n \tag{7}$$

2.5.6 Συντελεστής βελτίωσης F

Αφού $N \le n$ κάθε αύξηση στο n δε συνεπάγεται αύξηση του μεταφερόμενου φορτίου, δηλαδή,

$$F(n) = A_c(n+1) - A_c(n) = N\alpha\text{-}N\alpha = 0 \tag{8}$$

2.5.7 Πιθανότητα H(x) κατάληψης x συγκεκριμένων οργάνων

Για τυχαία αναζήτηση

$$H(x)=\sum_{k=x}^{n}\frac{\binom{n-x}{k-x}}{\binom{n}{k}}P_k=\sum_{k=x}^{n}\frac{\binom{n-x}{k-x}}{\binom{n}{k}}\binom{n}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{N-k}=\frac{\binom{n-x}{k-x}}{\binom{n}{k}}\alpha^x,n\geq N \tag{9}$$

2.6 Μέση τιμή και μεταβλητότητα της υπερροϊκής και μεταφερόμενης κίνησης

Θεωρούμε το επόμενο τηλεφωνικό σύστημα πλήρους προσιτότητας

○- ○- ○- ••• ○- ○ ○ ○•••○ ○ ○ ○•••○

N πηγές n όργανα m =άπειρο

όπου το σύνολο των οργάνων συνίσταται από 2 τμήματα n και m όπου το n είναι πεπερασμένο και το m άπειρο. Ο σκοπός αυτής της διαιρέσεως είναι το να δειχτεί ο χαρακτήρας της υπερροϊκής κίνησης (απορριπτόμενη κίνηση από το τμήμα n) που στη συνέχεια μεταφέρεται από το τμήμα m. Η κατάσταση του συστήματος τώρα περιγράφεται από το διάνυσμα (p,q) όπου

$$0\leq p\leq n \tag{1}$$

$$0\leq p\leq m,\ m=\infty$$

$$0\leq p+q\leq N$$

Το πρόβλημα είναι να περιγραφεί ο χαρακτήρας της απορριπτόμενης κίνησης από το τμήμα n. Μια πλήρης περιγραφή είναι δύσκολη γι' αυτό συνήθως περιοριζόμαστε στην εύρεση των δύο πρώτων ροπών, της μέσης τιμής M και της μεταβλητότητας V. Προφανώς

$$M=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=1}^{\infty}qP_{(p,q)} \tag{2}$$

$$V=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=1}^{\infty}(q-M)^2P_{(p,q)} \tag{3}$$

όπου $P_{(p,q)}$ παριστάνει την πιθανότητα μονίμου κατάστασης.

Με παραδοχές όπως και στην 2.2 (Erlang) αποδεικνύεται ότι:

$$M = A\,E_n(A) \tag{4}$$

$$V=M\left(1-M+\frac{A}{n+1+M-A}\right) \tag{5}$$

Είναι χαρακτηριστικό της υπερροϊκής κίνησης για την περίπτωση αυτή ότι

$$V>M \tag{6}$$

Αυτό φυσικά σημαίνει ότι οι κλήσεις της υπερροϊκής κίνησης είναι πιο *συγκεντρωμένες (peaked)* απ' ότι στην τυχαία κίνηση. Αυτό συμβαίνει γιατί οι κλήσεις που καταλαμβάνουν ένα όργανο της δεύτερης ομάδας m φθάνουν όταν η πρώτη ομάδα είναι αποκλεισμένη, δηλαδή, p=n.

Πρέπει όμως να γίνει διάκριση μεταξύ των M και V της υπερροϊκής κίνησης και των αντιστοίχων m και v της μεταφερόμενης, που ορίζονται από τις

$$m = \sum_{k=1}^{n} kP_k = A_c \tag{7}$$

$$v = \sum_{k=0}^{n} (k-m)^2 P_k \tag{8}$$

Η σχέση για τη μεταβλητότητα v μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=0}^{n} (k-m)^2 P_k = \sum_{k=0}^{n} \left[k(k-1) + k - 2mk + m^2\right] P_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P_k + \sum_{k=1}^{n} kP_k - 2m\sum_{k=1}^{n} kP_k + m^2 = \\ &= m - m^2 + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P_k = m - m^2 + s^2 \sum_{k=0}^{n-2} y_{k+1} y_k P_k \end{aligned} \tag{9}$$

Εφαρμογές των (8) και (9) για τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στις παραγράφους 2.2 έως 2.5 δίνουν

α) Erlang

$$m = A[1\text{-}E_n(A)] \tag{10}$$

$$v = m\text{-}M\ (n\text{-}m),\ M = AE_n(A) \tag{11}$$

$$v/m = 1\text{-}[M(n\text{-}m)]/m<1 \tag{12}$$

β) Poisson

$$m = A \tag{13}$$

$$v = A \tag{14}$$

$$v/m = 1 \tag{15}$$

γ) Engset

$$m = A_c = \frac{N\alpha}{1+\alpha}\left(1 - \frac{N-n}{N}E\right) \tag{16}$$

$$v = \frac{(N-1)\alpha}{1+\alpha}(m - nE) + \frac{n(n-1)\alpha E}{n+\alpha} + m - m^2 \tag{17}$$

δ) Bernoulli

$$m = N\alpha \tag{18}$$

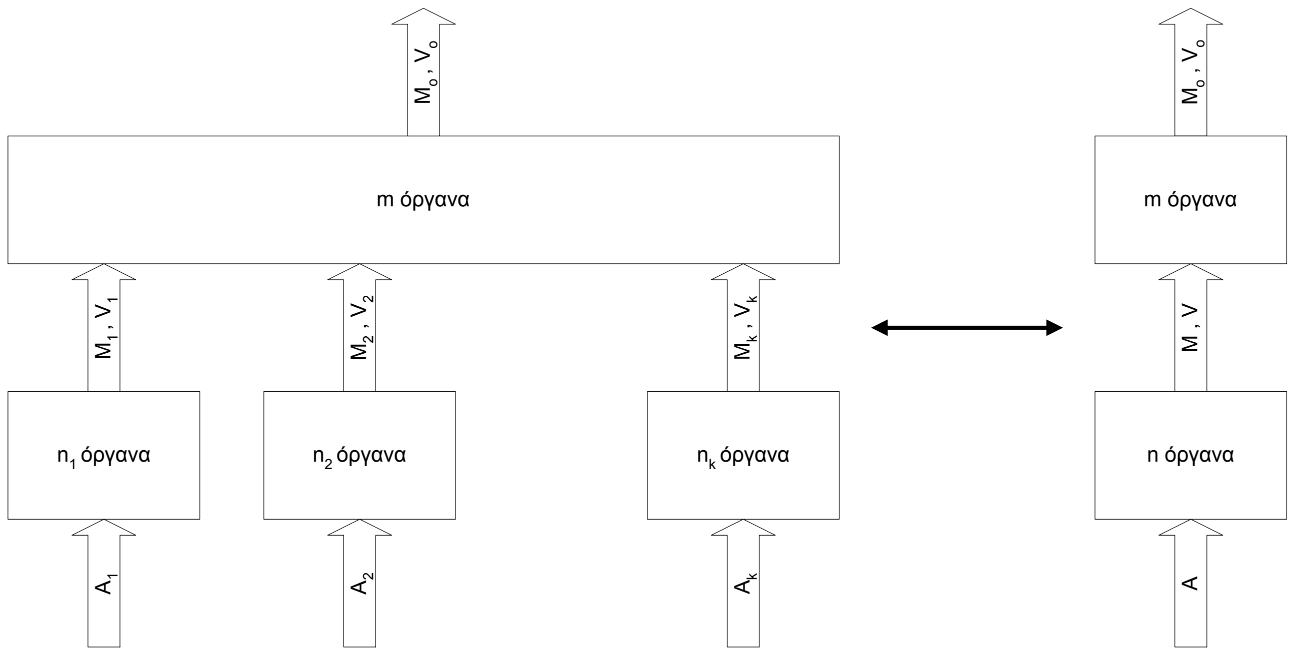
$$v = N\alpha(1\text{-}\alpha) \tag{19}$$

$$v/m = 1\text{-}\alpha<1 \tag{20}$$

Πρέπει να παρατηρηθεί ότι για την περίπτωση κατανομής Erlang, V>M, ενώ m>v. Αυτό σημαίνει ότι η μεταφερόμενη κίνηση είναι *εξομαλυμένη (smoothed)*, αφού οι κλήσεις που έφθασαν όταν το σύστημα ήταν αποκλεισμένο απορρίφτηκαν.

2.8 Η ισοδύναμη τυχαία μέθοδος

Θεωρείστε το επόμενο τηλεφωνικό σύστημα. Υπάρχουν k διαφορετικές ομάδες οργάνων και k ανεξάρτητες διαδικασίες Poison άφιξης κλήσεων που η κάθε μια προσφέρεται σε μία ομάδα οργάνων. Οι κλήσεις που βρίσκουν την αντίστοιχη ομάδα οργάνων κατειλημμένη προσφέρονται σε μία ομάδα οργάνων υπερροής. Η ομάδα υπερροής είναι κοινή για όλες τις k κύριες ομάδες οργάνων. Οι χρόνοι κατάληψης θεωρούνται εκθετικοί και οι κλήσεις που βρίσκουν την ομάδα υπερροής κατειλημμένη απορρίπτονται. Το πρόβλημα είναι να προσδιορισθεί ο αριθμός οργάνων της ομάδας υπερροής ώστε να ικανοποιηθεί μια προκαθορισμένη πιθανότητα αποκλεισμού.



Μια προσεγγιστική μέθοδος για τη λύση του προβλήματος αυτού είναι η *ισοδύναμη τυχαία μέθοδος (equivalent random method),* που βασίζεται στα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου. Για αρχή θεωρείστε το απλό μοντέλο μιας ομάδας με ένα όργανο και μιας ομάδας υπερροής και πάλι με ένα όργανο. Έστω P_1 η πιθανότητα να είναι κατειλημμένη η ομάδα υπερροής. Το φορτίο που μεταφέρεται από την ομάδα υπερροής είναι η διαφορά μεταξύ του φορτίου, $AE_1(A)$, που υπερχειλίζει από την κύρια ομάδα και του φορτίου που υπερχειλίζει από την κύρια ομάδα και την ομάδα υπερροής μαζί, $AE_2(A)$. Επειδή το φορτίο που μεταφέρει το μοναδικό όργανο της ομάδας υπερροής ισούται με την πιθανότητα να είναι απασχολημένο, προφανώς

$$P_1 = A[E_1(A)- E_2(A)] \tag{1}$$

Έστω Π_1 η πιθανότητα μια κλήση που υπερχειλίζει από την κύρια ομάδα να βρει την ομάδα υπερροής κατειλημμένη. Η Π_1 είναι υπό συνθήκη πιθανότητα να είναι κατειλημμένη η ομάδα υπερροής δοθέντος ότι η κύρια ομάδα είναι κατειλημμένη, δηλαδή,

$$\Pi_1 = E_2(A) / E_1(A) \tag{2}$$

που μπορεί να γραφτεί και σαν

$$\Pi_1 = AE_2(A) / AE_1(A) \tag{3}$$

Συγκρίνοντας τις Εξ. (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\Pi_1 \neq P_1 \tag{4}$$

όπως αναμένεται, αφού η κίνηση που προσφέρεται στην ομάδα υπερροής δεν είναι Poisson. Πράγματι, ο ρυθμός αφίξεων είναι λ όταν η κύρια ομάδα είναι κατειλημμένη και μηδέν όταν είναι ελεύθερη.

Θεωρείστε τώρα τη γενική περίπτωση όπου η κύρια ομάδα έχει n όργανα ενώ η ομάδα υπερροής έχει m όργανα. Κατ' αναλογία ισχύει

1. Η υπερροϊκή κίνηση δεν είναι Poisson
2. Η πιθανότητα μια κλήση, που υπερχειλίζει από την κύρια ομάδα, να αποκλειστεί στην ομάδα υπερροής είναι

$$\Pi_m = AE_{m+n}(A) / AE_n(A) \tag{5}$$

Η ιδιότητα 1 σημαίνει ότι η ανάλυση της ομάδας υπερροής δε μπορεί να γίνει με τις γνωστές μεθόδους. Όμως η ιδιότητα 2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα προσεγγιστικό υπολογισμό γνωστό σαν η *ισοδύναμη τυχαία μέθοδος*. Το φορτίο που υπερχειλίζει από την i-στή κύρια ομάδα μπορεί να περιγραφεί από δύο παραμέτρους, τη μέση τιμή M_i και τη μεταβλητότητα V_i της υπερροϊκής κίνησης προς άπειρη ομάδα υπερροής, ως εξής:

$$M_i = A_i E_{n_i}(A_i) \tag{6}$$

$$V_i = M_i \left(1 - M_i + \frac{A_i}{n_i + 1 + M_i - A_i} \right) \tag{7}$$

Επομένως, μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση που προσφέρεται στην κοινή ομάδα υπερροής με τα στατιστικά χαρακτηριστικά της αντίστοιχης κίνησης προς άπειρη ομάδα υπερροής, δηλαδή,

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_k \tag{8}$$

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_k \tag{9}$$

Έστω M_o και V_o οι αντίστοιχες τιμές για την κίνηση που υπερχειλίζει από την ομάδα υπερροής των m οργάνων. Για τον υπολογισμό των M_o και V_o καταφεύγουμε στο ισοδύναμο τυχαίο μοντέλο (βλέπε σχήμα) όπου το ισοδύναμο φορτίο A προσφέρεται σε μια ισοδύναμη ομάδα οργάνων μεγέθους n, τέτοια ώστε

$$M = AE_n(A) \tag{10}$$

$$V = M \left(1 - M + \frac{A}{n + 1 + M - A} \right) \tag{11}$$

και στη συνέχεια η υπερροϊκή κίνηση από την ομάδα αυτή των n οργάνων προσφέρεται στην ομάδα υπερροής των m οργάνων. Άρα, αφού η ισοδύναμη κίνηση A προσφέρεται σε μια ομάδα n+m οργάνων,

$$M_o = AE_{n+m}(A) \tag{12}$$

$$V_o = M_o \left(1 - M_o + \frac{A}{n + m + 1 + M_o - A} \right) \tag{13}$$

Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα αποκλεισμού μιας κλήσης που βρίσκει την κύρια ομάδα οργάνων αποκλεισμένη και υπερχειλίζει στην ομάδα υπερροής είναι,

$$B = \Pi_m = AE_{m+n}(A) / AE_n(A) = M_o / M \tag{14}$$

Απομένει να δούμε πως λύνονται αριθμητικά οι Εξ. (11) και (12). Για V≥M υπάρχει λύση που αντιστοιχεί εν γένει σε μη ακέραια τιμή για τον αριθμό των οργάνων n. Μια καλή προσέγγιση δίδεται της λύσης δίδεται από την σχέση

$$A \approx V + 3Z(Z-1) \qquad (15)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην Εξ. (11) λαμβάνουμε για το n

$$n \approx \frac{A(M+Z)}{M+Z-1} - M - 1 \qquad (16)$$

όπου Z=V/M ο *συντελεστής συγκέντρωσης (peakedness factor)* της υπερροϊκής κίνησης. Επειδή η ως άνω προσέγγιση εν γένει υπερεκτιμά τις τιμές των A και n, μπορούμε να λάβουμε το ακέραιο μέρος [n] από την Εξ. (16), οπότε το A επανυπολογίζεται από την Εξ. (16) σαν

$$A= ([n]+M+1)(M+Z-1)/(M+Z) \qquad (17)$$

2.9 Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες κίνησης-πιθανότητας αποκλεισμού καθορίστε τον ελάχιστο αριθμό γραμμών που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση φορτίου α) 0,3E β) 11E και γ) 70E με τις επόμενες απαιτήσεις:
   1) Οι απώλειες να μην υπερβαίνουν το 0,005
   2) Σε περίπτωση υπερφορτίσεως 10% ή απώλειας μιας γραμμής (που να μη συμβαίνουν ταυτόχρονα) οι απώλειες να μην υπερβαίνουν το 0,01.
2. Τηλεφωνική κίνηση 3 Erlang προσφέρεται σε πλήρως προσιτή ομάδα 8 γραμμών. Ο μέσος χρόνος κατάληψης είναι 90 sec.
   α) Ποιος ο μέσος αριθμός κλήσεων ανά ώρα.
   β) Ποια η πιθανότητα να μη φθάσει καμία κλήση σε διάστημα 1 min
   γ) Ποιο το ποσοστό της τηλεφωνικής κίνησης που χάνεται.
   δ) Εάν οι γραμμές δοκιμάζονται με την ίδια σειρά για την εύρεση μιας ελεύθερης, πόση η κίνηση που διαβιβάζεται από κάθε μία απ' αυτές.
   ε) Ποια είναι η πιθανότητα μια μόνο γραμμή να είναι ελεύθερη
   στ) Πόσο συχνά συμβαίνει μια αφικνούμενη κλήση να βρίσκει σύστημα πλήρως κατειλημμένο. Πόσο συχνά συμβαίνει η κατάσταση της πλήρους κατάληψης.
   ζ) Πόσο κατά μέσο όρο διαρκεί η κατάσταση αυτή.
   η) Ποια είναι η πιθανότητα δύο μόνο γραμμές να είναι ελεύθερες
   θ) Ποια είναι η πιθανότητα όλες οι γραμμές να είναι ελεύθερες
3. Σε ένα μικρό ιδιωτικό κέντρο εκτιμάται ότι το προσφερόμενο φορτίο θα είναι 2 Erlang και απαιτείται όπως η πιθανότητα αποκλεισμού είναι μικρότερη από 2%. Απερχόμενες γραμμές μπορούν να νοικιαστούν με κόστος 1 δρχ ανά πρώτο λεπτό χρησιμοποίησης της γραμμής. Ζητούνται:
   α) Ο αναγκαίος αριθμός απερχόμενων γραμμών για την ικανοποίηση του περιορισμού για την πιθανότητα αποκλεισμού.
   β) Το αναμενόμενο κόστος λειτουργίας ανά ώρα.

γ) Εάν η ανεύρεση ελεύθερη απερχόμενης γραμμής γίνεται με ακολουθιακό τρόπο (ίδια σειρά αναζήτησης πάντοτε) υπολογίστε τη συνεισφορά κάθε γραμμής στο συνολικό κόστος.

4. Σε ένα σύστημα με απώλειες Erlang έχουμε 10 όργανα. Μετρήσεις δείχνουν ότι το 1% των κλήσεων χάνονται. Υπολογίζεται ότι το φορτίο θα διπλασιασθεί την επόμενη χρονιά. Πόσα όργανα πρέπει να προστεθούν για να διατηρηθεί ο ίδιος βαθμός εξυπηρέτησης;

5. Θεωρείστε ένα σύστημα Erlang με n όργανα και προσφερόμενο φορτίο A. Ένας παρατηρητής βλέπει το σύστημα σε τυχαίες χρονικές στιγμές και περιμένει μέχρι να φθάσει η επόμενη κλήση. Υπολογίστε την πιθανότητα η κλήση αυτή να χαθεί.

6. Μια εταιρεία που διαθέτει ιδιωτικό τηλεφωνικό κέντρο μπορεί να διαλέξει μεταξύ δύο τιμολογίων για τη χρέωση των απερχόμενων γραμμών προς το δημόσιο τηλεφωνικό δίκτυο. Το πρώτο τιμολόγιο αντιστοιχεί σε σταθερό μηνιαίο μίσθωμα, που ισοδυναμεί με 280 δρχ. την ώρα, ενώ με το δεύτερο τιμολογείται η χρήση με 10 δρχ. ανά min. Ο συνολικός αριθμός απερχόμενων γραμμών πρέπει να επαρκεί για την εξυπηρέτηση προσφερόμενης κίνησης 2 Erlang με πιθανότητα αποκλεισμού το πολύ 2%. Ποιος είναι ο πλέον οικονομικός τρόπος διαχωρισμού των απερχόμενων γραμμών σε αυτές με σταθερό μηνιαίο μίσθωμα και αυτές που χρεώνονται με βάση τη χρήση; Ποιο είναι το αντίστοιχο ωριαίο κόστος λειτουργίας;

7. Κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών ένας παντοπώλης αποφασίζει να προσφέρει τηλεφωνικές υπηρεσίες στους παραθεριστές. Υποθέστε ότι διαθέτει n τηλεφωνικούς θαλάμους που λειτουργούν σαν σύστημα Erlang με απώλειες και ότι αναμένει 50 πελάτες την ώρα που κατά μέσο όρο μιλούν 4,8 min. Το λειτουργικό κόστος του παντοπώλη είναι 100 δρχ. ανά θάλαμο ανά ώρα (άσχετα με το εάν ο θάλαμος χρησιμοποιείται) και το έσοδο από κάθε παραθεριστή που εξυπηρετείται είναι 20 δρχ. Ποιος είναι ο βέλτιστος αριθμός θαλάμων και ποιο είναι το μέσο ωριαίο κέρδος του παντοπώλη στη βέλτιστη περίπτωση. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του λειτουργικού κόστους πέρα από την οποία είναι ασύμφορη για τον παντοπώλη η προσφορά τηλεφωνικών υπηρεσιών;

8. Σε ένα μικρό ιδιωτικό τηλεφωνικό κέντρο υπάρχουν 4 απερχόμενες γραμμές. Στο κέντρο είναι συνδεδεμένοι 10 συνδρομητές που παράγουν απερχόμενη κίνηση 0,1 Erlang όταν είναι ελεύθεροι. Για την καλή εξυπηρέτηση των συνδρομητών πρέπει η πιθανότητα αποκλεισμού μιας κλήσης να είναι μικρότερη από 1%. Αναμένεται ότι κατά το επόμενο έτος ο αριθμός των συνδρομητών θα διπλασιαστεί και ότι η παραγόμενη κίνηση ανά συνδρομητή θα αυξηθεί κατά 20%. Ελέγξατε εάν το πλήθος των απερχόμενων γραμμών για τις τωρινές και τις μελλοντικές ανάγκες. Εάν όχι, βρείτε την ελάχιστη δυνατή αύξηση των απερχόμενων γραμμών, ώστε να ικανοποιηθεί ο περιορισμός για την πιθανότητα αποκλεισμού. Πόσο είναι το προσφερόμενο φορτίο τότε και ποια η πιθανότητα αποκλεισμού.

9. Δύο κινήσεις Poisson αποκαλούμενες χαμηλής και υψηλής προτεραιότητας προσφέρονται σε 10 όργανα. Οι κλήσεις χαμηλής προτεραιότητας που βρίσκουν την ομάδα οργάνων κατειλημμένη χάνονται. Οι κλήσεις υψηλής προτεραιότητας υπερχειλίζουν προς μια βοηθητική ομάδα υπερροής. Οι μετρήσεις δείχνουν ότι οι κλήσεις υψηλής προτεραιότητας έχουν χρόνο κατάληψης 12 min, ρυθμό αφίξεων 20 κλήσεις την ώρα και κατά μέσο όρο 2 την ώρα υπερχειλίζουν.

α) Εάν ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων χαμηλής προτεραιότητας διπλασιαστεί, κατά πόσο θα αυξηθεί η πιθανότητα υπερχείλισης των κλήσεων υψηλής προτεραιότητας;

β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Erlang για τον υπολογισμό των οργάνων της βοηθητικής ομάδος υπερροής;

10. Στο κτίριο μιας μεγάλης επιχειρήσεως υπάρχει ένα μικρό τηλεφωνικό κέντρο με 40 συνδρομητές και 10 απερχόμενες γραμμές. Στην ώρα μέγιστης κίνησης κάθε συνδρομητής παράγει 7,2 τηλεφωνήματα κατά μέσο όρο, η μέση διάρκεια των οποίων είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή 100s. (Αγνοείστε την εσωτερική τηλεφωνική κίνηση).
    - α) Να βρεθεί η πιθανότητα αποκλεισμού B
    - β) Να βρεθεί το προσφερόμενο και το μεταφερόμενο φορτίο σε Erlang
    - γ) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός των κατειλημμένων απερχόμενων γραμμών
    - δ) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλες οι γραμμές κατειλημμένες
    - ε) Πόσο φορτίο χάνεται επειδή βρίσκει το σύστημα πλήρως κατειλημμένο
    - στ) Πόσες κλήσεις χάνονται κατά μέσο όρο από την ίδια αιτία
    - ζ) Πόσο κατά μέσο όρο διαρκεί η κατάσταση της πλήρους κατάληψης
    - η) Ποια βελτίωση θα επέλθει στο σύστημα εάν αυξηθούν οι απερχόμενες γραμμές από 10 σε 11, 12 αντίστοιχα
    - θ) Ποια είναι η πιθανότητα μια απερχόμενη γραμμή να είναι ελεύθερη
    - ι) Πόσο συχνά συμβαίνει η κατάσταση πλήρους κατάληψης
    - ια) Ποια είναι η πιθανότητα δύο απερχόμενες γραμμές να είναι ελεύθερες
    - ιβ) Ποια είναι η πιθανότητα όλες οι απερχόμενες γραμμές να είναι ελεύθερες.
11. Κίνηση 10 Erlang προσφέρεται σε ομάδα 10 οργάνων και κίνηση 5 Erlang προσφέρεται σε ομάδα 5 οργάνων. Μια ομάδα υπερροής από m όργανα εξυπηρετεί την υπερροϊκή κίνηση και των δύο ομάδων.
    - α) Να βρεθεί το μέγεθος m της ομάδας υπερροής που δίνει πιθανότητα αποκλεισμού 10%.
    - β) Να βρεθεί η πιθανότητα αποκλεισμού του συνολικού συστήματος.
    - γ) Επαναλάβετε εάν οι κινήσεις αυξηθούν κατά 50%.
12. Η κίνηση A = 15 Erlang μεταξύ δύο κέντρων εξυπηρετείται από 13 αποκλειστικές γραμμές ανά κατεύθυνση κίνησης καθώς και από μία ομάδα κοινών γραμμών που εξυπηρετεί την υπερροϊκή κίνηση από τις αποκλειστικές γραμμές.
    - α) Να βρεθεί το μέγεθος m της ομάδας υπερροής που δίνει συνολική πιθανότητα αποκλεισμού 1%.
    - β) Πόσες γραμμές θα χρειάζονταν για την ίδια πιθανότητα αποκλεισμού εάν δεν χρησιμοποιηθεί καθόλου ομάδα υπερροής.

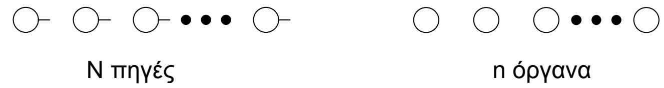
3. ΑΝΑΜΟΝΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

3.1 Υπολογισμός βασικών μεγεθών σε αναμονητικά συστήματα

Ένα αναμονητικό σύστημα χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι ανεπιτυχείς κλήσεις μπορούν να περιμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν αργότερα από ένα όργανο που θα ελευθερωθεί. Αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές w_k της σχέσης $\lambda_k=w_k y_k$ είναι $w_k=1$ για κάθε k. Επομένως ένα αναμονητικό σύστημα είναι ικανό να δέχεται τόσες αναμένουσες κλήσεις όσες είναι δυνατόν να παραχθούν. Ένα σύστημα που μπορεί να δεχτεί μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό αναμενουσών κλήσεων πρέπει να θεωρείται σαν ένας συνδυασμός αναμονητικού συστήματος και συστήματος με απώλειες. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με αναμονητικά συστήματα με άπειρο χώρο αναμονής.

Για τις αναμένουσες κλήσεις μπορεί κανείς να υποθέσει είτε ότι αυτές περιμένουν μέχρις εξυπηρέτησης είτε ότι εγκαταλείπουν ενδιαμέσως. Η πρώτη υπόθεση οδηγεί σε απλούστερα μοντέλα, ενώ η δεύτερη σε πιο ρεαλιστικά. Για την πλήρη περιγραφή του αναμονητικού συστήματος είναι αναγκαία η γνώση της πολιτικής εξυπηρέτησης, FCFS, LCFS, τυχαία, προτεραιότητες, κλπ. Η χρησιμοποιούμενη πολιτική εξυπηρέτησης επηρεάζει την κατανομή του χρόνου αναμονής, αλλά εν γένει δεν επηρεάζει τη μέση τιμή του.

Θα θεωρήσουμε ένα σύστημα πλήρους προσιτότητας με N πηγές και n όργανα όπως στο σχήμα



Η κατάσταση k του συστήματος, $0 \le k \le N$, περιγράφει τον αριθμό των κλήσεων στο σύστημα. Δηλαδή, εάν $k \le n$ έχουμε k απασχολημένα όργανα, ενώ εάν $k>n$ έχουμε n απασχολημένα όργανα και k-n κλήσεις σε αναμονή. Προφανώς πρέπει $N>n$, διότι αλλιώς δεν δημιουργείται ανάγκη αναμονής. Επίσης η περίπτωση $N=\infty$, $n=\infty$ δεν θεωρείται ότι δημιουργεί ανάγκη αναμονής. Έτσι θα εξετάσουμε συστήματα όπου $N>n$ και N μπορεί να είναι άπειρο ή όχι, αλλά το n πρέπει να είναι πάντα πεπερασμένο.

Οι ρυθμοί θανάτων μ_k για αναμονητικά συστήματα θα θεωρηθούν ότι είναι

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu = k/s, & 0 \le k \le n \\ n\mu+\theta(k-n)\mu = n/s+\theta(k-n)/s, & k > n \end{cases} \tag{1}$$

όπου $\theta>0$ σημαίνει ότι μια αναμένουσα κλήση εγκαταλείπει με ρυθμό $\theta\mu=\theta/s$. Το $\theta=0$ σημαίνει ότι όλες οι κλήσεις αναμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν ή οι *χαμένες κλήσεις καθυστερούν (lost calls delayed)*. Η ειδική περίπτωση $\theta=1$ σημαίνει ότι οι ανεπιτυχείς κλήσεις απασχολούν το σύστημα επί τόσο χρόνο όσο και η διάρκειά τους, δηλαδή τότε έχουμε το σύστημα που χαρακτηρίστηκε στην αρχή των σημειώσεων σαν αυτό που οι *χαμένες κλήσεις παραμένουν (lost calls held)*. Τυπικό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι ο εξοπλισμός που δίνει τόνους. Π.χ. η γεννήτρια του σήματος “κατειλημμένο” ενεργοποιείται όταν μια κλήση αποτύχει. Όλες οι κλήσεις που έχουν αποτύχει, είναι χαμένες για το σύστημα, αλλά συνεχίζουν να το απασχολούν (ο συνδρομητής ακούει το σήμα κατειλημμένο μέχρι να αφήσει το ακουστικό). Στο σύστημα αυτό η διάρκεια της κλήσης είναι το διάστημα όπου ο συνδρομητής ακούει το σήμα “κατειλημμένο”.

Για τους ρυθμούς γεννήσεων λ_k ισχύει ότι και για τα συστήματα με απώλειες, μόνο που τώρα $w_k=1$ για κάθε k. Στη συνέχεια θα επαναλάβουμε τους ορισμούς των διαφόρων χαρακτηριστικών μεγεθών προσαρμοσμένους για αναμονητικά συστήματα.

3.1.1 Συμφόρηση χρόνου E

Ορίζεται σαν η πιθανότητα να είναι όλα τα όργανα απασχολημένα, οπότε

$$E = \sum_{k=n}^{N} P_k \tag{2}$$

Η πιθανότητα P_W να υπάρχουν κλήσεις σε αναμονή είναι

$$P_W = \sum_{k=n+1}^{N} P_k \tag{3}$$

3.1.2 Συμφόρηση κλήσεων B

Ορίζεται σαν η πιθανότητα μια κλήση να αναγκασθεί να αναμείνει επειδή όλα τα όργανα είναι απασχολημένα, οπότε

$$B = P(>0) = \sum_{k=n}^{N} y_k P_k \Big/ \sum_{k=0}^{N} y_k P_k \tag{4}$$

3.1.3 Προσφερόμενο φορτίο A_o και μεταφερόμενο φορτίο A_c

Το μεταφερόμενο φορτίο είναι ο μέσος αριθμός κατειλημμένων οργάνων, δηλαδή,

$$A_c = \sum_{k=0}^{n-1} k\,P_k + \sum_{k=n}^{N} nP_k \tag{5}$$

ενώ το προσφερόμενο είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων κατά τη διάρκεια μίας κλήσης, δηλαδή,

$$A_o = s\sum_{k=0}^{N} y_k P_k \tag{6}$$

Επειδή όμως

$$sy_kP_k = (k+1)P_{k+1},\ 0 \le k < n \tag{7}$$

$$sy_kP_k = [n+\theta(k-n+1)]P_{k+1},\ n \le k < N \tag{8}$$

$$y_N = 0 \tag{9}$$

έχουμε

$$A_o = \sum_{k=0}^{n} kP_k + \sum_{k=n+1}^{N} (n+\theta(k-n))P_k = A_c + \theta Q \tag{10}$$

όπου προφανώς

$$Q = \sum_{k=n+1}^{N} (k-n)P_k \tag{11}$$

είναι ο μέσος αριθμός αναμενουσών κλήσεων στο σύστημα ή το *μέσο μήκος της ουράς (mean queue length)*. Τελικά έχουμε ότι $A_o > A_c$ εάν $\theta > 0$. Εάν $\theta = 0$, προφανώς, $A_o = A_c$, αφού όλες οι κλήσεις εξυπηρετούνται τελικά. Για $\theta = 0$ το μεταφερόμενο φορτίο A_c μπορεί να υπολογισθεί και ως εξής

$$A_c = \sum_{k=0}^{n-1} k\,P_k + \sum_{k=n}^{N} nP_k = \sum_{k=0}^{n-2} sy_kP_k + \sum_{k=n-1}^{N-1} sy_kP_k = s\sum_{k=0}^{N-1} y_kP_k \tag{12}$$

Η Εξ. (12) απλά εκφράζει το γεγονός ότι το προσφερόμενο φορτίο ισούται με τον αναμενόμενο αριθμό αφίξεων κατά τη μέση διάρκεια μιας κλήσης.

3.1.4 Συντελεστής βελτίωσης F

Είναι η αύξηση στο μεταφερόμενο φορτίο όταν ο αριθμός των οργάνων αυξηθεί από το n σε n+1

$$F = A_c(n+1) - A_c(n) \tag{13}$$

3.1.5 Η πιθανότητα Η(x) κατάληψης x καθορισμένων οργάνων

Όπως και για τα συστήματα με απώλειες, η Η(x) υπολογίζεται εύκολα για τυχαία αναζήτηση οπότε το φορτίο κατανέμεται εξ ίσου στα όργανα και όλοι οι συνδυασμοί x οργάνων είναι εξ ίσου πιθανοί. Επομένως

$$H(x) = \sum_{k=x}^{n} \frac{\binom{n-x}{k-x}}{\binom{n}{k}} P_k + \sum_{k>n} P_k \tag{14}$$

3.1.6 Μέσος χρόνος αναμονής

Ο υπολογισμός της κατανομής του χρόνου αναμονής W είναι εν γένει δύσκολος, όμως είναι εύκολος ο υπολογισμός της μέσης τιμής W_q=E{W}, βάσει του θεωρήματος του Little. Το θεώρημα Little είναι ένα πολύ γενικής φύσεως θεώρημα της θεωρίας αναμονής και διατυπώνεται ως εξής:

Ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα αναμονής ισούται με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων στο σύστημα επί το μέσο χρόνο αναμονής στο σύστημα.

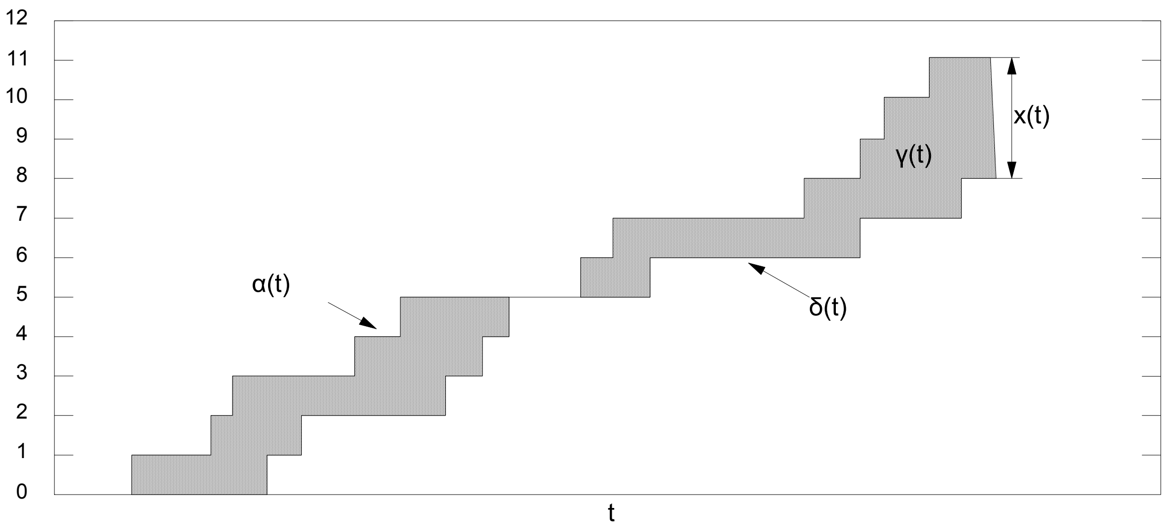
Μια απλή παραστατική σκιαγράφηση της αποδείξεως δίδεται στη συνέχεια. Έστω {α(t), t≥0} η στοχαστική διαδικασία που παριστάνει τον αριθμό αφίξεων στο σύστημα μέχρι τη χρονική στιγμή t. Έστω επίσης {δ(t), t≥0} η στοχαστική διαδικασία άθροισης που δίδει τον αριθμό αναχωρήσεων από το σύστημα στο διάστημα (0,t). Προφανώς τότε ο αριθμός x(t) πελατών στο σύστημα κατά τη χρονική στιγμή t είναι

$$x(t) = \alpha(t) - \delta(t) \tag{15}$$

όπως παραστατικά φαίνεται και στο επόμενο σχήμα, όπου έχουν σχεδιαστεί δύο δείγματα των α(t) και δ(t).

Έστω ότι γ(t) παριστάνει το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής του σχήματος μέχρι το t. Τότε ο μέσος ρυθμός αφίξεων λ_t στο διάστημα (0,t) είναι

$$\lambda_t = \alpha(t)/t \tag{16}$$



Ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη W_t για το διάστημα (0,t) είναι προφανώς

$$W_t = \gamma(t)/\alpha(t) \tag{17}$$

Όμοια ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα για το διάστημα (0,t) είναι

$$Q_t = \gamma(t)/t \tag{18}$$

Άρα

$$Q_t = \lambda_t W_t \tag{19}$$

Για $t \to \infty$ όμως, εάν

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t\to\infty} \lambda_t \\ W_q &= \lim_{t\to\infty} W_t \end{aligned} \tag{20}$$

Θα υπάρχει και το όριο για το Q_t, δηλαδή

$$Q = \lambda\, W_q \tag{21}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει ανεξαρτήτως των ειδικών υποθέσεων για τις διαδικασίες εισόδου και εξόδου ή του αριθμού των σταθμών εξυπηρέτησης ή της πολιτικής εξυπηρέτησης. Μπορεί δε να εφαρμοστεί είτε σε όλο το σύστημα είτε στην ουρά αναμονής μόνο, αρκεί να οριστούν καταλλήλως τα Q, λ, W_q. Έτσι για την περίπτωση αναμονητικών συστημάτων ο προηγούμενος υπολογισμός είναι εύκολος μόνο εάν ο μέσος ρυθμός εισόδου λ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα.

3.2 Αναμονητικό σύστημα τύπου Erlang

Υποθέσεις

$N = \infty$

n πεπερασμένο

$\mu_k = k\mu = k/s,\ 0 \le k \le n,$

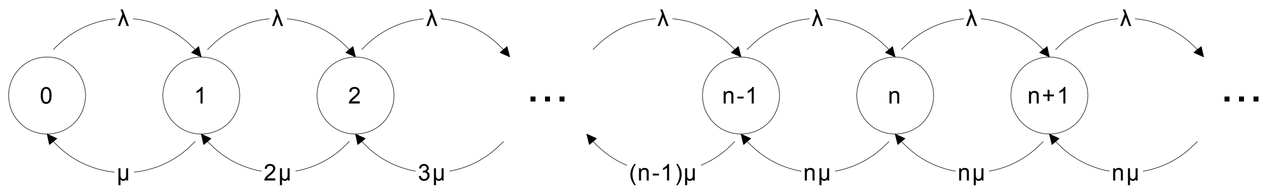
$\mu_k = n\mu = n/s,\ k > n$

$\lambda_k = y_k = \lambda$, για κάθε k, δηλαδή $w_k = 1$

$A = \lambda s = \lambda/\mu$

Οι κλήσεις περιμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν, δηλαδή, θ=0.

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης καταστάσεων είναι



Οι πιθανότητες P_k μονίμου κατάστασης είναι

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{A^k}{k!} P_0, & 0 \le k \le n \\[2ex] \left(\dfrac{A}{n}\right)^{k-n} \dfrac{A^n}{n!} P_0, & k > n \end{cases} \tag{1}$$

και το P_0 προσδιορίζεται από την

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \tag{2}$$

οπότε

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^n}{n!}\frac{n}{n-A}} \tag{3}$$

Υπολογίζουμε τώρα διάφορα χαρακτηριστικά μεγέθη

3.2.1 Συμφόρηση χρόνου E

Γνωρίζουμε ότι

$$E = \sum_{k=n}^{\infty} P_k \tag{4}$$

οπότε από τις Εξ. (2) και (3) της προηγούμενης παραγράφου έχουμε

$$E = \frac{A^n}{n!}\frac{n}{n-A} P_0 = \frac{\frac{A^n}{n!}\frac{n}{n-A}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^n}{n!}\frac{n}{n-A}} = D_n(A) \qquad \text{"Τύπος του Erlang"} \tag{5}$$

Για την πιθανότητα P_w να υπάρχουν κλήσεις σε αναμονή έχουμε

$$P_w = E - P_n \tag{6}$$

και επειδή

$$P_n = (n-A)E/n \tag{7}$$

τελικά λαμβάνουμε

$$P_w = AE/n = AD_n(A)/n \tag{8}$$

3.2.2 Συμφόρηση κλήσεων B

Επειδή y_k=λ, όπως αναμένεται,

$$B=E \tag{9}$$

3.2.3 Προσφερόμενο φορτίο A_o και μεταφερόμενο φορτίο A_c

Το μεταφερόμενο φορτίο A_c είναι

$$A_c = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + \sum_{k=n}^{\infty} nP_k = A\sum_{k=0}^{n-1} P_k + n\sum_{k=n+1}^{\infty} P_k = A(1-E) + n(E-P_n) = A + (n-A)E - nP_n \tag{10}$$

όμως

$$E = nP_n/(n-A) \tag{11}$$

και επομένως

$$A_c = A \tag{12}$$

Το προσφερόμενο φορτίο A_o υπολογίζεται από την

$$A_o = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda s P_k = \lambda s = \lambda/\mu = A \tag{13}$$

άρα, όπως αναμένεται, $A_c = A_o = A$.

3.2.4 Μέση ουρά αναμονής Q

$$Q = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)P_k = \frac{A^n}{n!}P_0 \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)(A/n)^{k-n} = \frac{A}{n-A}D_n(A), A < n \tag{21}$$

3.2.5 Κατανομή του χρόνου αναμονής

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής W_q=E{W} μπορεί να γίνει εύκολα βάσει του θεωρήματος του Little, δηλαδή

$$W_q = E\{W\} = Q/\lambda = s/(n-A)\ D_n(A) \tag{22}$$

Παρατηρήστε ότι η μέση τιμή W_q αφορά όλες τις κλήσεις, τόσο αυτές που εξυπηρετούνται αμέσως όσο και αυτές που αναγκάζονται να περιμένουν. Δοθέντος ότι $D_n(A)$ είναι η πιθανότητα μια κλήση να αναγκαστεί να περιμένει, ο μέσος χρόνος αναμονής $W_0 = E\{W|W>0\}$ υπολογισμένος μόνο για τις κλήσεις που αναγκάζονται να περιμένουν είναι

$$W_0 = E\{W|W>0\} = s/(n-A) \tag{23}$$

Για τον προσδιορισμό της κατανομής του χρόνου αναμονής υπολογίζουμε την πιθανότητα P{W>t} μια τυχαία κλήση να αναμείνει περισσότερο από t, πριν αρχίσει η εξυπηρέτησή της. Τότε

$$P\{W>t\} = P\{W>0\}\ P\{W>t|\ W>0\} \tag{24}$$

Είναι ενδιαφέρον ότι οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης δεν εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη πολιτική εξυπηρέτησης κλήσεων που αναμένουν, όσο αυτή δεν κάνει *διακρίσεις (non-biased)*, δηλαδή, με την προϋπόθεση ότι ο χρόνος κατάληψης της κλήσης που επιλέγεται έχει την ίδια συνάρτηση κατανομής όπως και για μια τυχαία κατάληψη. Στην κατηγορία πολιτικών που δεν κάνουν διακρίσεις ανήκουν οι πολιτικές εξυπηρέτησης με τη σειρά άφιξης, *FCFS (first come, first served),* ή με την αντίστροφη σειρά άφιξης, *LCFS (last come, first served,* ή της τυχαίας εξυπηρέτησης, *RO (random order)*. Για παράδειγμα, δεν ανήκει στην κατηγορία αυτή η πολιτική της επιλογής για εξυπηρέτηση της κλήσης με τον μικρότερο αναμενόμενο χρόνο κατάληψης. Επομένως, η πιθανότητα P{W>0}, που έχει ήδη υπολογιστεί,

$$P\{W>0\}=P(>0)=D_n(A) = (A^n/n!)\ (n/(n-A))P_0 \tag{25}$$

είναι η ίδια για όλες τις πολιτικές που δεν κάνουν διακρίσεις.

Για το υπολογισμό της P{W>t}, για την πολιτική εξυπηρέτησης σύμφωνα με τη σειρά άφιξης (FCFS), αρκεί επομένως να υπολογιστεί η P{W>t|W>0}. Όμως

$$P\{W > t|W > 0\} = \sum_{j=0}^{\infty} P\{W > t|W > 0, X = j\}P\{X = j|W > 0\} \tag{26}$$

όπου X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το πλήθος των κλήσεων σε αναμονή. Για εκθετικούς χρόνους κατάληψης

$$P\{W > t|W > 0, X = j\} = \sum_{i=0}^{j} \frac{(n\mu t)^i}{i!} e^{-n\mu t} \tag{27}$$

Από τον ορισμό της υπό-συνθήκη πιθανότητας

$$P\{X = j|W > 0\} = \frac{P\{X = j, W > 0\}}{P\{W > 0\}} \tag{28}$$

Παρότι οι τυχαίες μεταβλητές X και W ορίζονται από τη σκοπιά των αφίξεων κλήσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε τις εμπλεκόμενες πιθανότητες για τυχαίες χρονικές στιγμές (αφού οι αφίξεις ακολουθούν διαδικασία Poisson). Έτσι

$$P\{X=j, W>0\} = P_{n+j} = (A/n)^j (A^n/n!) P_0 \tag{29}$$

και επομένως

$$P\{X=j|W>0\} = (1-A/n) (A/n)^j =(1-\rho)\rho^j \tag{30}$$

όπου ρ = A/n ο βαθμός εξυπηρέτησης του συστήματος, δηλαδή, στο αναμονητικό σύστημα Erlang σε ισορροπία, ο αριθμός των κλήσεων σε αναμονή ακολουθεί γεωμετρική κατανομή. Άρα τελικά έχουμε

$$P\{W>t|W>0\} = e^{-(1-\rho)n\mu t} = e^{-(1-\rho)nt/s} = e^{-(n-A)t/s} \tag{31}$$

δηλαδή, στο αναμονητικό σύστημα Erlang σε ισορροπία, η υπό-συνθήκη κατανομή του χρόνου αναμονής των κλήσεων που αναγκάζονται να περιμένουν ακολουθεί αρνητική εκθετική κατανομή με μέση τιμή s/(n-A). Επομένως,

$$P\{W>t\} = D_n(A)\, e^{-(1-\rho)nt/s} \tag{32}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$P\{W=0\} = 1-D_n(A) \tag{33}$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο μέσος χρόνος αναμονής W_q υπολογισμένος για όλες τις κλήσεις είναι

$$W_q = E\{W\} = D_n(A) /((1-\rho)n\mu) = s/(n-A)\, D_n(A) \tag{34}$$

ενώ ο μέσος χρόνος αναμονής W_0 υπολογισμένος μόνο για τις κλήσεις που αναγκάζονται να περιμένουν είναι

$$W_0 = E\{W|W>0\} = 1/((1-\rho)n\mu) = s/(n-A) \tag{35}$$

Τα τελευταία αποτελέσματα, δηλαδή, οι υπολογισμοί των μέσων χρόνων αναμονής, έχουν ήδη ληφθεί ευκολότερα με εφαρμογή του νόμου του Little.

3.2.6 Πιθανότητα H(x) κατάληψης x συγκεκριμένων οργάνων

Για τυχαία αναζήτηση και σύμφωνα με την Εξ. (13) της προηγούμενης παραγράφου μετά από πράξεις έχουμε:

$$H(x) = \frac{n-A}{n} D_n(A)\left[\frac{1}{E_{n-x}(A)} + \frac{A}{n-A}\right], A < n \tag{36}$$

3.2.7 Φορτίο a_v στο ν-οστό όργανο

Για τον υπολογισμό θεωρούμε ότι ο χρόνος που το ν-οστό όργανο είναι κατειλημμένο χωρίζεται σε δύο αμοιβαία αποκλειστικές περιόδους, δηλαδή, την περίοδο όπου υπάρχει τουλάχιστον μία κλήση σε αναμονή και την περίοδο που δεν υπάρχει κλήση σε αναμονή. Έστω ότι X είναι το πλήθος των κλήσεων σε αναμονή, X_v=0 όταν το ν-οστό όργανο είναι ελεύθερο και X_v=1 όταν είναι κατειλημμένο. Τότε το φορτίο b_v που μεταφέρει το ν-οστό όργανο θα είναι

$$b_v = P\{X_v=1 \mid X=0\}P\{X=0\} + P\{X_v=1 \mid X>0\}P\{X>0\} \tag{37}$$

Αφού δεν μπορεί να υπάρχει ελεύθερο όργανο όταν υπάρχουν κλήσεις σε αναμονή, προφανώς,

$$P\{X_v=1 \mid X>0\} = 1 \tag{38}$$

Μπορούμε τώρα να ισχυρισθούμε ότι

$$P\{X_\nu=1 \mid X=0\} = b_\nu = A(E_{\nu-1}(A) - E_\nu(A)) \tag{39}$$

όπου b_ν το φορτίο που εξυπηρετεί το ν-στό όργανο σε σύστημα με απώλειες. Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από τη Μαρκοβιανή ιδιότητα του συστήματος Erlang, δηλαδή, η συμπεριφορά του αναμονητικού συστήματος κατά τη διάρκεια περιόδων όπου X=0, δεν επηρεάζεται από τη συμπεριφορά του όταν X>0. Όμως η συμπεριφορά του αναμονητικού Erlang όταν X=0 δεν διαφέρει από αυτή του Erlang με απώλειες. Με άλλα λόγια το φορτίο που μεταφέρει το ν-στό όργανο είναι 1 Erlang όταν υπάρχει ουρά αναμονής και b_ν Erlang όταν δεν υπάρχει ουρά αναμονής.

Από τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης εύκολα προκύπτει ότι

$$P\{X>0\} = P_w = \sum_{j=n+1}^{\infty} P_j = \frac{A}{n} D_n(A) = \rho D_n(A) \tag{40}$$

Τελικά, μετά από αντικατάσταση των προηγουμένων στην Εξ. (37) λαμβάνουμε

$$a_\nu = b_\nu(1-\rho D_n(A)) + \rho D_n(A) = b_\nu+(1-b_\nu)\, \rho D_n(A) \tag{41}$$

όπου ρ=A/n ο βαθμός εξυπηρέτησης του συστήματος και b_ν το φορτίο που μεταφέρει το ν-οστό όργανο στο σύστημα Erlang με απώλειες. Η Εξ.(41) διαισθητικά μπορεί να εξηγηθεί και ως εξής. Η διαφορά μεταξύ του αναμονητικού συστήματος Erlang και του συστήματος με απώλειες μπορεί να περιγραφεί με το να θεωρήσουμε ότι το ν-οστό όργανο του συστήματος με απώλειες, όταν δεν είναι απασχολημένο (με πιθανότητα $1-b_\nu$), εξυπηρετεί το 1/n της κίνησης που αναγκάζεται να αναμείνει, δηλαδή, $(A/n)D_n(A)$.

Για τυχαία αναζήτηση έχουμε απλά

$$a_\nu = A/n \tag{43}$$

<u>3.2.8 Αριθμητικός υπολογισμός της πιθανότητας αποκλεισμού Β</u>

Τελειώνοντας αναφέρουμε δύο χρήσιμες σχέσεις που συνδέουν τα $D_n(A)$ και $E_n(A)$.

$$D_n(A) = \frac{nE_n(A)}{n - A(1 - E_n(A))} \tag{44}$$

$$E_n(A) = \frac{(n - A)D_n(A)}{n - D_n(A)} \tag{45}$$

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι το $E_n(A)$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά (δες παράγραφο 2.2.9).

3.2 Αναμονητικό σύστημα με αποχωρήσεις

Υποθέσεις

$N = \infty$

n πεπερασμένο

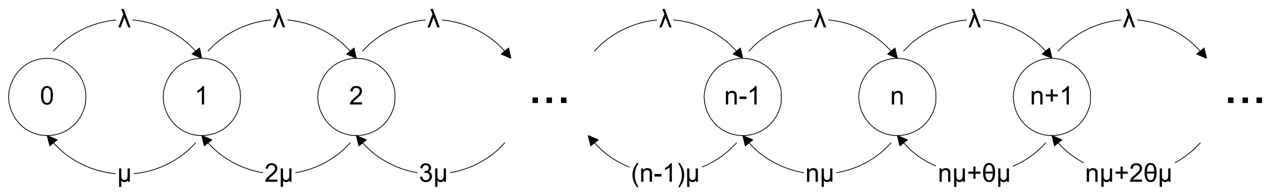
$\mu_k = k\mu = k/s,\ 0\le k\le n,$

$\mu_k = n\mu+\theta(k-n)\mu = n/s+\theta(k-n)/s,\ k>n$

$\lambda_k = y_k = \lambda$, για κάθε k, δηλαδή $w_k=1$

$A = \lambda s = \lambda/\mu$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης καταστάσεων είναι



Οι πιθανότητες P_k μονίμου κατάστασης είναι

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{A^k}{k!} P_0, \quad 0 \le k \le n \\[2ex] \dfrac{A^{k-n}}{\prod\limits_{i=1}^{k-n} (n+i\theta)} \dfrac{A^n}{n!} P_0, \quad k > n \end{cases} \tag{1}$$

και το P_0 προσδιορίζεται από την

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \tag{2}$$

Για αυθαίρετες τιμές του θ τα αποτελέσματα είναι κάπως πολύπλοκα, αλλά πλήρως υπολογίσιμα. Στην ειδική περίπτωση όπου οι χαμένες κλήσεις παραμένουν (θ=1),

$$P_k = A^k/k!\ e^{-A} \qquad \text{"Κατανομή Poisson"} \tag{3}$$

Παρατηρείστε ότι το αποτέλεσμα αυτό ταυτίζεται με το αντίστοιχο για σύστημα με απώλειες τύπου Poisson, παράγραφος 2.3, μόνο που εδώ η κατάσταση k σημαίνει n καταλήψεις και k-n αναμένουσες κλήσεις όταν k>n. Υπολογίζουμε τώρα διάφορα χαρακτηριστικά μεγέθη

3.2.1 Συμφόρηση χρόνου Ε

Για αυθαίρετες τιμές του θ υπολογίζεται από τον ορισμό της σαν

$$E = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = 1 - P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!} \tag{4}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου οι χαμένες κλήσεις παραμένουν (θ=1)

$$E = e^{-A} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = e^{-A} \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!} \right) \qquad \text{"Τύπος του Molina"} \tag{5}$$

3.2.2 Συμφόρηση κλήσεων Β

Όπως και για το αναμονητικό σύστημα Erlang

$$B=E \tag{6}$$

όμως η πιθανότητα B_{gu} μια κλήση να εγκαταλείψει προτού εξυπηρετηθεί, για θ>0, υπολογίζεται ως εξής:

$$B_{gu} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\theta\mu P_k}{\sum_{k=0}^{\infty}\lambda P_k} = \frac{\theta}{A}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)P_k \tag{7}$$

Επειδή όμως

$$[n+\theta(k-n)]P_k = AP_{k-1} \tag{8}$$

αντικαθιστώντας στην Εξ. (7) έχουμε

$$B_{gu} = \frac{\theta}{A}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{A}{\theta}P_{k-1} - \frac{n}{\theta}P_k\right] = [nP_n+(A-n)E]/A \tag{9}$$

όπου τα P_n και E εξαρτώνται από το θ. Ειδικότερα για θ=1

$$B_{gu} = \left[\frac{A^n}{n!} - \frac{n-A}{A}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right]e^{-A} \tag{10}$$

εδώ επιτρέπεται $A \geq n$

<u>3.2.3 Προσφερόμενο φορτίο A_o και μεταφερόμενο φορτίο A_c</u>

Το μεταφερόμενο φορτίο A_c είναι

$$\begin{aligned} A_c &= \sum_{k=0}^{n-1}kP_k + \sum_{k=n}^{\infty}nP_k = A\sum_{k=0}^{n-1}P_k + n\sum_{k=n+1}^{\infty}P_k = A(1-E) + n(E-P_n) = A + (n-A)E - nP_n \\ &= A(1-B_{gu}) \end{aligned} \tag{11}$$

Το προσφερόμενο φορτίο είναι και πάλι $A_o = A$, άρα

$$\Delta A = A_o - A_c = nP_n - (n-A)E \tag{12}$$

Εν γένει, για θ>0, έχουμε $A_o > A_c$

<u>3.2.4 Μέση ουρά αναμονής Q</u>

Ο μέσος αριθμός αναμενουσών κλήσεων είναι

$$Q = \sum_{n+1}^{\infty}(k-n)P_k = [nP_n - (n-A)E]/\theta = AB_{gu}/\theta \tag{13}$$

3.3 Αναμονητικό σύστημα τύπου Engset

Υποθέσεις

N > n, N, n πεπερασμένα

$\mu_k = k\mu = k/s$, $0 \leq k \leq n$

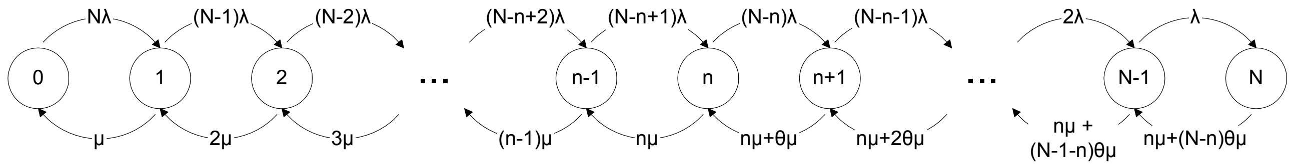
$\mu_k = n\mu + \theta(k-n)\mu = n/s + \theta(k-n)/s$, $n < k \leq N$

$\lambda_k = y_k = (N-k)\lambda$, για κάθε k, δηλαδή $w_k = 1$

λ = ρυθμός κλήσεων ανά πηγή όταν αυτή είναι ελεύθερη

α = λs = λ/μ κίνηση παραγόμενη από μια ελεύθερη πηγή.

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης καταστάσεων είναι



Οι πιθανότητες P_k μονίμου κατάστασης είναι

$$P_k = \binom{N}{k} \alpha^k P_0 , \ 0 \le k \le n \tag{1}$$

$$P_k = \frac{\binom{N}{k} \alpha^{k-n} \binom{k}{n} (k-n)! \alpha^n}{\prod_{i=1}^{k-n} (n+i\theta)} P_0 , \ n<k \le N \tag{2}$$

και το P_0 προσδιορίζεται από την

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \tag{3}$$

Για γενικές τιμές του θ τα αποτελέσματα είναι κάπως πολύπλοκα αλλά πλήρως υπολογίσιμα. Θα εξετάσουμε όμως ιδιαίτερα δύο ειδικές περιπτώσεις

α) Οι χαμένες κλήσεις καθυστερούν (θ=0)

Τότε

$$P_k = \binom{N}{k} \alpha^k P_0 , \ 0 \le k \le n \tag{4}$$

$$P_k = \frac{\binom{N}{k} \binom{k}{n} (k-n)! \alpha^k}{n^{k-n}} P_0 , \ n<k \le N \tag{5}$$

όπου

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{N}{k} \alpha^k + \sum_{k=n}^{N} \frac{N! \alpha^k}{(N-k)! n! (k-n)! n^{k-n}} \alpha^k \right]^{-1} \tag{6}$$

β) Οι χαμένες κλήσεις παραμένουν (θ=1)

Από τις εξισώσεις ισορροπίας εύκολα προκύπτει ότι

$$kP_k = (N-k+1)\alpha P_{k-1}, \ 0<k \le N \tag{7}$$

και επομένως

$$P_k = \binom{N}{k} \alpha^k P_0 = \binom{N}{k} \beta^k (1-\beta)^{N-k} , \ 0 \le k \le N, \ \theta=1 \tag{8}$$

όπου β=α/(1+α). Παρατηρείστε ότι λαμβάνουμε τη διωνυμική κατανομή.

Για τις πιθανότητες Π_k μια κλήση να βρει k κλήσεις στο σύστημα όταν φθάνει ισχύει

$$\Pi_k = \frac{(N-k)\alpha P_k}{\sum_{i=0}^{N}(N-i)\alpha P_i} \tag{9}$$

και, όπως και στο σύστημα με απώλειες Engset, έχουμε

$$\Pi_k[N] = P_k[N\text{-}1],\ 0 \le k \le N\text{-}1 \tag{10}$$

Υπολογίζουμε τώρα διάφορα χαρακτηριστικά μεγέθη

3.3.1 Συμφόρηση χρόνου E

$$E = \sum_{k=n}^{N} P_k \tag{11}$$

3.3.2 Συμφόρηση κλήσεων B

$$B = P(>0) = \sum_{k=n}^{N}\Pi_k = \sum_{k=n}^{N}(N-k)P_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{N}(N-k)P_k \tag{12}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$B = \frac{(N-n)\theta E + n(E-P_n)}{\frac{\theta+\alpha}{1+\alpha}N(1-E) + (N-n)\theta E + n(E-P_n)} \tag{13}$$

όπου τα P_n και E εξαρτώνται από το θ. Για θ=0 η ανωτέρω σχέση απλοποιείται

$$B = \frac{n(E-P_n)}{N\beta(1-E)+n(E-P_n)},\ \beta = \frac{\alpha}{1+\alpha},\ \theta=0 \tag{14}$$

ενώ για θ=1 λαμβάνουμε

$$B = \frac{E - \frac{n}{N}P_n}{1 - \frac{n}{N}P_n},\ \theta=1 \tag{15}$$

Η πιθανότητα B_{gu} μια κλήση να εγκαταλείψει προτού εξυπηρετηθεί, για θ>0, υπολογίζεται ως εξής:

$$B_{gu} = \frac{\sum_{k=n+1}^{N}(k-n)\theta\mu P_k}{\sum_{k=0}^{N}(N-k)\lambda P_k} = \frac{\theta}{\alpha}\frac{\sum_{k=n+1}^{N}(k-n)P_k}{\sum_{k=0}^{N}(N-k)P_k} \tag{16}$$

και μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$B_{gu} = \frac{\theta}{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\frac{\left[N\alpha - n(1+\alpha)\right]E + nP_n}{N(\theta+\alpha) + \left[N\alpha - n(1+\alpha)\right](\theta-1)E + (\theta-1)nP_n} \tag{17}$$

όπου τα P_n και E εξαρτώνται από το θ. Ειδικότερα για θ=0, B_{gu} =0 όπως αναμένεται, ενώ για θ=1

$$B_{gu} = E\left(1 - \frac{n}{N}\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) + \frac{nP_n}{N\alpha}, \; \theta=1 \tag{18}$$

3.3.3 Προσφερόμενο φορτίο A_o και μεταφερόμενο φορτίο A_c

Για θ=0 το μεταφερόμενο φορτίο A_c είναι

$$A_c = \sum_{k=0}^{n-1} k\,P_k + \sum_{k=n}^{N} nP_k = \sum_{k=0}^{n-2} sy_k P_k + \sum_{k=n-1}^{N-1} sy_k P_k = s\sum_{k=0}^{N-1} y_k P_k \tag{19}$$

$$A_c = \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{N}(N-j)\lambda P_j = \alpha\left(N - \sum_{j=0}^{N} jP_j\right) \tag{19}$$

δηλαδή, το προσφερόμενο φορτίο ισούται με την κίνηση α που παράγει μια ελεύθερη πηγή πολλαπλασιασμένη με το μέσο αριθμό ελεύθερων πηγών $\alpha\left(N - \sum_{j=0}^{N} jP_j\right)$. Επειδή το προσφερόμενο φορτίο $A_o = A_c$ θα έχουμε

$$\alpha = \frac{A_o}{N - \sum_{j=0}^{N} jP_j} \tag{20}$$

3.3.4 Κατανομή του χρόνου αναμονής W

Η πιθανότητα P{W>0} μια κλήση να αναγκαστεί να περιμένει είναι

$$P\{W > 0\} = \sum_{i=n}^{N-1} \Pi_j[N] = \sum_{i=n}^{N-1} P_j[N-1] \tag{21}$$

Η πιθανότητα P{W>t} μια τυχαία κλήση να αναμείνει περισσότερο από t, πριν αρχίσει η εξυπηρέτησή της, είναι

$$P\{W > t\} = \sum_{j=0}^{N-n-1} P\{W > t | X = j\} P\{X = j\} \tag{22}$$

όπου Q η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το πλήθος των κλήσεων σε αναμονή. Όμως, για εκθετικούς χρόνους κατάληψης η πιθανότητα P{W>t|X=j} μια κλήση να περιμένει περισσότερο από t είναι ακριβώς η ίδια με αυτή του συστήματος Erlang με απώλειες. Δηλαδή,

$$P\{W > t | X = j\} = \sum_{i=0}^{j} \frac{(n\mu t)^i}{i!} e^{-n\mu t} \tag{23}$$

Επομένως

$$E(W|X=j) = (j+1)/n\mu \tag{24}$$

Επίσης

$$P\{Q=j\} = \Pi_{n+j}[N] = P_{n+j}[N-1] \tag{25}$$

Αντικαθιστώντας τελικά λαμβάνουμε

$$P\{W > t\} = c\sum_{i=0}^{N-n-1} \frac{\varphi(t))^i}{i!} e^{-\varphi(t)} \tag{26}$$

όπου

$$\varphi(t) = n/\alpha + n\mu t \text{ και } c = \Pi_0[N]\frac{(N-1)!\alpha^n}{n!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{N-n-1} e^{n/\alpha} \quad (27)$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής $W_q = E\{W\}$ εφαρμόζουμε τον τύπο του Little. Εδώ η μέση ουρά είναι $\sum_{j=0}^{N} jP_j$, ο ρυθμός αφίξεων είναι $A_o\mu$ και ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι $1/\mu+E\{W\}$, επομένως,

$$\sum_{j=0}^{N} jP_j = A_o(1+\mu E\{W\}) \quad (28)$$

Χρησιμοποιώντας Εξ. (20) μετά από αντικατάσταση λαμβάνουμε

$$E\{W\} = (\frac{N}{A_o} - 1)\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \quad (29)$$

3.4 Ασκήσεις

1. Μια συσκευή που εκτελεί μια κάποια μεταγωγική λειτουργία σε ένα τηλεφωνικό κέντρο πρέπει να αρχίσει να λειτουργεί μέσα σε 10 msec (κατά μέσο όρο) μετά τη λήψη ενός καλούντος σήματος. Υποτίθεται ότι ανταποκρίνεται αμέσως στην κλήση εκτός και εάν είναι κατειλημμένη από άλλη κλήση οπότε οι αφικνούμενες κλήσεις αναγκάζονται να αναμείνουν. Εάν υποτεθούν αφίξεις Poisson και εκθετικές κατανομές των χρόνων κατάληψης υπολογίστε:
   α) Πόσες κλήσεις ανά ώρα μπορεί να χειριστεί η συσκευή εάν μια κλήση την απασχολεί για 50 msec κατά μέσο όρο.
   β) Εάν πρέπει να χειρίζεται 18000 κλ/h ποια είναι η μέγιστη τιμή του μέσου χρόνου κατάληψης.
2. Σε ένα αναμονητικό τηλεφωνικό κέντρο υπάρχουν 6 απερχόμενες γραμμές και άπειρος χώρος αναμονής. Η προσφερόμενη κίνηση είναι A=4 Erlang. Υπολογίστε
   α) Τη συμφόρηση κλήσεων
   β) Τη μέση ουρά αναμονής
   γ) Το μέσο χρόνο αναμονής για $1/\mu$=90 sec
   δ) Το μέσο χρόνο αναμονής των κλήσεων που δεν βρίσκουν ελεύθερη γραμμή.
   ε) Το φορτίο που μεταφέρεται από κάθε απερχόμενη γραμμή για ακολουθιακή αναζήτηση.
   στ) Την πιθανότητα να μην υπάρχουν κλήσεις σε αναμονή.
   ζ) Την πιθανότητα καμία γραμμή να μην είναι απασχολημένη.
3. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $E_n(A)$ και $D_n(A)$ αποδείξατε ότι
   α) $E_n(A) < e^{-A}\sum_{k=n}^{\infty} A^k/k! < D_n(A)$
   β) $D_n(A)= E_n(A)/[1-A(1-E_n(A))/n]$
   γ) $1/D_n(A)=1+(n-A)/[AE_{n-1}(A)(A)]$
4. Στο γραφείο πληροφοριών ενός σιδηροδρομικού σταθμού ένας υπάλληλος απασχολείται με το να δίνει πληροφορίες από τηλεφώνου. Το τηλεφωνικό κέντρο του γραφείου πληροφοριών έχει

σχεδιαστεί έτσι ώστε οι κλήσεις που φθάνουν σ' αυτό να αναμένουν σε μια ουρά μέχρις ότου εξυπηρετηθούν κατά τη σειρά αφίξεώς τους. Η ουρά μπορεί να συγκρατήσει το πολύ 5 αναμένουσες κλήσεις. Κλήσεις που βρίσκουν την ουρά γεμάτη χάνονται. Οι κλήσεις φθάνουν ακολουθώντας διαδικασία Poisson με ρυθμό λ=60 κλ/h και ο χρόνος εξυπηρέτησης τους από τον υπάλληλο κατανέμεται εκθετικά με μέση τιμή 30 sec.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι η ουρά γεμάτη

β) Υπολογίστε το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά

γ) Ποιο είναι το ποσοστό των κλήσεων που δεν είναι αναγκασμένες να αναμείνουν

δ) Μια κλήση φθάνει στο σύστημα και αναγκάζεται να αναμείνει. Ποιος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής τους.

5. Ένα αναμονητικό σύστημα όπου οι κλήσεις "αποθαρρύνονται" είναι αυτό που ο ρυθμός εισόδου μειώνεται όταν αυξάνει το μήκος της ουράς. Πιο ειδικά, έστω $\lambda_n = \lambda_n/(n+1)$ και $\mu_n = \mu$. Αποδείξτε ότι οι πιθανότητες καταστάσεων της ουράς δίνονται από τον τύπο:

   $P_n=\rho^n e^{-\rho}/n!$, όπου $\rho=\lambda/\mu$

6. Μια εταιρεία που διαθέτει ιδιωτικό τηλεφωνικό κέντρο μπορεί να διαλέξει μεταξύ δύο τιμολογίων για τη χρέωση των απερχόμενων γραμμών προς το δημόσιο τηλεφωνικό δίκτυο. Το πρώτο τιμολόγιο αντιστοιχεί σε σταθερό μηνιαίο μίσθωμα, που ισοδυναμεί με 280 δρχ. την ώρα, ενώ με το δεύτερο τιμολογείται η χρήση με 10 δρχ. ανά min. Ο συνολικός αριθμός απερχόμενων γραμμών είναι 4, οι κλήσεις περιμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν και το προσφερόμενο φορτίο είναι 2 Erl. Ποιος είναι ο πλέον οικονομικός τρόπος διαχωρισμού των απερχόμενων γραμμών σε αυτές με σταθερό μηνιαίο μίσθωμα και σε αυτές που χρεώνονται με βάση τη χρήση; Ποιο είναι το αντίστοιχο ωριαίο κόστος λειτουργίας;

7. Θεωρείστε ένα αναμονητικό σύστημα Erlang με 10 γραμμές που εξυπηρετεί προσφερόμενο φορτίο 6 Erl. Εάν ο ρυθμός αφίξεων αυξηθεί κατά 1/3, ποια είναι η αντίστοιχη αύξηση

   α) στο ποσοστό των κλήσεων που πρέπει να περιμένουν για εξυπηρέτηση.

   β) στη μέση τιμή του χρόνου αναμονής των κλήσεων που πρέπει να περιμένουν.

   Επαναλάβετε εάν αντί του ρυθμού αυξηθεί η μέση διάρκεια κατάληψης κατά 1/3.

8. Σε ένα αναμονητικό σύστημα Erlang με εξυπηρέτηση κατά σειρά άφιξης, ποιο είναι το ποσοστό των κλήσεων που δεν εξυπηρετούνται αμέσως και πρέπει να περιμένουν περισσότερο από το μέσο χρόνο αναμονής;

9. Σε ένα ψηφιακό τηλεφωνικό κέντρο, ο εξοπλισμός που παρέχει τον τόνο επιλογής μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα αναμονητικό σύστημα Erlang με εξυπηρέτηση σύμφωνα με τη σειρά άφιξης των κλήσεων. Εάν ένας συνδρομητής που σηκώνει το ακουστικό δεν ακούσει τόνο επιλογής για 30 sec, τι πρέπει να κάνει;

10. Η Pizza σκοπεύει να αρχίσει να πουλά πίτσες με τηλεφωνική παραγγελία. Στην ώρα αιχμής αναμένει 120 παραγγελίες ανά ώρα. Για κάθε παραγγελία απαιτείται μέσος χρόνος 30 sec.

    α. Υπολογίστε την πιθανότητα ένας πελάτης να βρει κατειλημμένο το τηλέφωνο της Pizza.

    β. Εάν οι πελάτες που βρίσκουν κατειλημμένο το τηλέφωνο δεν προσπαθούν ξανά, αλλά τηλεφωνούν σε ανταγωνιστή της Pizza, πόσες παραγγελίες κατά μέσο όρο χάνει η Pizza στην ώρα αιχμής;

    Η Pizza δεν είναι ευχαριστημένη από τις παραγγελίες που πραγματικά λαμβάνει και αποφασίζει να ζητήσει από τον ΟΤΕ τη συμπληρωματική υπηρεσία "αναμονή κλήσης". Τώρα ο πελάτης που καλεί και βρίσκει το τηλέφωνο της Pizza κατειλημμένο ακούει ένα ηχογραφημένο μήνυμα μέχρι να εξυπηρετηθεί. Οι πελάτες όμως δεν διατίθενται να περιμένουν ακούγοντας για πολύ. Έτσι, εάν δεν εξυπηρετηθούν έγκαιρα, εγκαταλείπουν κατά μέσο όρο μετά 30 sec.

γ. Πόσο θα αυξηθεί ο κύκλος εργασιών της Pizza;

Η Pizza πάλι δεν είναι ευχαριστημένη και για να εξυπηρετήσει καλύτερα την πελατεία της αποφασίζει να ζητήσει περισσότερες γραμμές από τον ΟΤΕ σε συνοπτική σύνδεση.

δ. Πόσες επιπλέον γραμμές πρέπει να ζητηθούν ώστε να εξυπηρετείται αμέσως το 95% των πελατών;

ε. Πόσες επιπλέον γραμμές πρέπει να ζητηθούν ώστε η πιθανότητα να μην εξυπηρετηθεί αμέσως ένας πελάτης να είναι πρακτικά μηδέν;

Στο νέο διαφημιστικό φυλλάδιο που μοιράζει η Pizza, λόγω τυπογραφικού λάθους, αντί του σωστού συνοπτικού αριθμού αναγράφεται ο αριθμός ενός σπιτιού. Ευτυχώς, η οικογένεια λείπει και κανείς δεν απαντά. Οι πελάτες αναμένουν για απάντηση κατά μέσο όρο 20 sec. Εάν βρουν τη γραμμή κατειλημμένη κλείνουν κατά μέσο όρο μετά 5 sec.

στ. Υπολογίστε την πιθανότητα ένας πελάτης που τηλεφωνεί για παραγγελία να βρει κατειλημμένο το τηλέφωνο της οικίας.

ζ. Πόσες κλήσεις κατά μέσο όρο ακούν σήμα κατάληψης;

Υποθέστε παντού εκθετικές κατανομές για τους χρόνους κατάληψης και διαδικασίες Poisson για τις αφίξεις.

11. Ένα ψηφιακό αστικό κέντρο έχει 30.000 συνδρομητές και 3.750 γραμμές (κυκλώματα) για τη σύνδεσή του με το υπερκείμενο διαβιβαστικό κέντρο. Υποθέστε ότι οι μισές γραμμές χρησιμοποιούνται σαν απερχόμενες. Κάθε συνδρομητής στην ΩΜΚ παράγει απερχόμενη κίνηση 0,04 Erl, ενώ το φορτίο των γραμμών είναι 0,8 Erl. Η μέση διάρκεια των κλήσεων είναι 90 sec. Για την εξυπηρέτηση της κάθε κλήσης απασχολείται ένας από τους υπολογιστές του κέντρου για 50 ms κατά μέσο όρο. Οι κλήσεις αναμένουν σε ουρά άπειρου μεγέθους μέχρι να βρεθεί υπολογιστής για να τις εξυπηρετήσει. Υποθέστε εκθετική κατανομή για την διάρκεια των κλήσεων και το χρόνο εξυπηρέτησής τους από τον υπολογιστή. Υπολογίστε:

α) Το πλήθος των κλήσεων που εξυπηρετεί το κέντρο στη διάρκεια της ΩΜΚ.

β) Τον αριθμό των υπολογιστών ώστε η πιθανότητα μια κλήση να αναγκαστεί να περιμένει να είναι μικρότερη από 1%.

γ) Τη μέση ουρά αναμονής στους υπολογιστές.

δ) Το μέσο χρόνο αναμονής των κλήσεων που δεν βρίσκουν ελεύθερο υπολογιστή.

ε) Την πιθανότητα να μην υπάρχουν κλήσεις σε αναμονή.

στ) Το φορτίο κάθε υπολογιστή εάν η αναζήτηση ελεύθερου γίνεται με τον ακολουθιακό τρόπο.

12. Σε ένα μικρό τηλεφωνικό κέντρο τέσσερα τηλέφωνα έχουν πρόσβαση προς δύο απερχόμενες γραμμές. Κάθε τηλέφωνο όταν είναι ελεύθερο παράγει κλήσεις με μέσης διάρκειας 3 min και με μέσο ρυθμό μία ανά 27 min. Οι κλήσεις περιμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν. Εάν προστεθεί μια ακόμη τηλεφωνική συσκευή, κατά πόσο θα αυξηθεί η πιθανότητα μια κλήση να μην εξυπηρετηθεί αμέσως. Ένας εξωτερικός παρατηρητής καταγράφει το μέσο αριθμό κλήσεων ανά ώρα. Ποιες τιμές θα λάβει για τις δύο περιπτώσεις ($N=4$, $N=5$). Υπολογίστε επίσης το μέσο

χρόνο αναμονής, το ποσοστό των κλήσεων που περιμένουν περισσότερο από 45 sec και το ποσοστό του χρόνου που μια τηλεφωνική συσκευή είναι ελεύθερη (δεν περιμένει ή δεν εξυπηρετείται) και για τις δύο περιπτώσεις.

13. Σε αναμονητικό τηλεφωνικό κέντρο η προσφερόμενη κίνηση είναι 3,5 Erl, υπάρχουν τέσσερις απερχόμενες γραμμές και η μέση διάρκεια των κλήσεων είναι 120 sec. Να βρεθούν
    - α) Η πιθανότητα μια κλήση να αναγκασθεί να περιμένει.
    - β) Η πιθανότητα μια κλήση να αναγκασθεί να περιμένει περισσότερο από 60 sec.
    - γ) Ο μέσος χρόνος αναμονής.
    - δ) Ο μέσος χρόνος αναμονής των κλήσεων που δεν βρίσκουν ελεύθερη γραμμή.
14. Στο τηλεφωνικό κέντρο μιας εταιρείας οι εισερχόμενες κλήσεις εξυπηρετούνται από τηλεφωνήτριες που τις συνδέουν στα ζητούμενα εσωτερικά τηλέφωνα. Υποθέτοντας ότι η προσφερόμενη κίνηση είναι 6 Erl, υπάρχει άπειρος χώρος αναμονής για τις εισερχόμενες κλήσεις, και η μέση διάρκεια για την εξυπηρέτηση μιας κλήσης είναι 30 sec, να βρεθεί ο αναγκαίος αριθμός τηλεφωνητριών ώστε η πιθανότητα μια κλήση να αναγκασθεί να περιμένει περισσότερο από 1 min να είναι μικρότερη από 1%.