Χωρητικότητα διαύλου

Τηλεπικοινωνιακοί δίαυλοι

Τηλεπικοινωνιακοί δίαυλοι

- Οι τηλεπικοινωνιακοί δίαυλοι μπορεί να μεταφέρουν ή αποθηκεύουν πληροφορία
  - Ενσύρματοι (διπλαγωγοί, ομοαξωνικά καλώδια, κυματοδηγοί, …)
  - Ασύρματοι (ελεύθερος χώρος)
  - Οπτικοί (οπτικές ίνες)
  - Ακουστικοί (υποβρύχιοι)
  - Αποθήκευσης (μαγνητικοί δίσκοι, ταινίες DAT, CD)
- Χαρακτηρίζονται από μια σχέση εισόδου-εξόδου

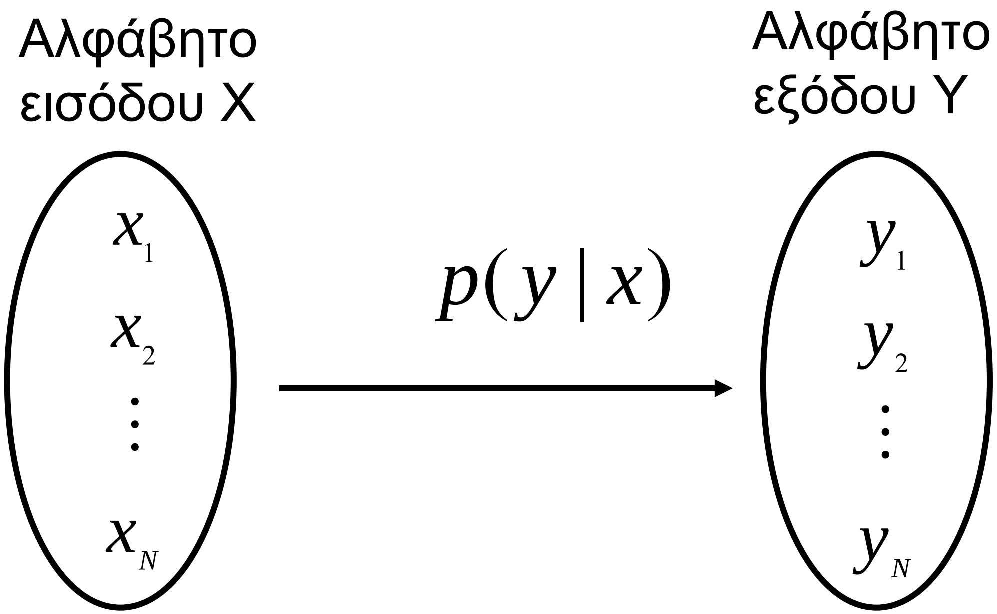
Παραμορφώσεις

- Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους η έξοδος ενός διαύλου είναι διαφορετική από την είσοδο
  - Εξασθένιση
  - Μη γραμμικότητα
  - Περιορισμένο εύρος ζώνης
  - Διαλείψεις (fading)
    - Διάδοση πολλαπλών διαδρομών
  - Θόρυβος

Μοντέλο διαύλου

- Συνήθως, η είσοδος και η έξοδος είναι κυματομορφές
- Λόγω διαλείψεων και θορύβου
  - Η σχέση εισόδου-εξόδου είναι στοχαστική
- Το εύρος ζώνης κάθε πραγματικού διαύλου είναι περιορισμένο
  - Η δειγματοληψία καθιστά ένα δίαυλο συνεχούς χρόνου ισοδύναμο με δίαυλο διακριτού χρόνου
- Διακριτός δίαυλος (discrete channel)
  - Οι τιμές εισόδου και εξόδου σε δίαυλο διακριτού χρόνου είναι πεπεραμένες ή αριθμήσιμες

Μοντέλο διακριτού διαύλου



- Η έξοδος y_i εν γένει εξαρτάται από την τρέχουσα είσοδο x_i και από την ακολουθία των προηγούμενων εισόδων (διασυμβολική παρεμβολή)
- Ο δίαυλος έχει μνήμη

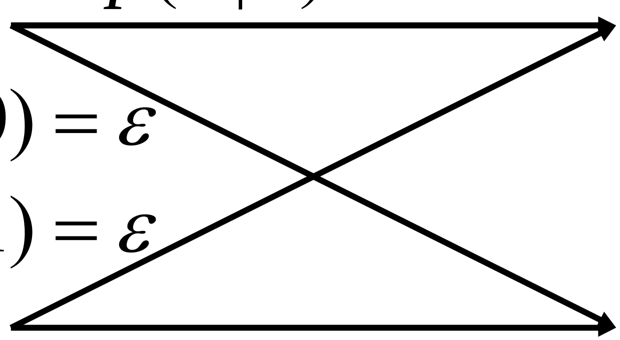
Μοντέλο διαύλου χωρίς μνήμη

- Διακριτός δίαυλος χωρίς μνήμη (memoryless)

$$p(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i \mid x_i)$$

- Δυαδικός συμμετρικός δίαυλος

$$p(0 \mid 0) = 1 - \varepsilon$$



$$p(1 \mid 0) = \varepsilon$$

$$p(0 \mid 1) = \varepsilon$$

$$p(1 \mid 1) = 1 - \varepsilon$$

ε = πιθανότητα διασταύρωσης (λάθους)

Δίαυλος AWGN

- Η πιθανότητα λάθους σε δίαυλο AWGN με πολική σηματοδοσία είναι

$$\varepsilon = p(1\,|\,0) = p(0\,|\,1) = Q\left(\sqrt{SNR_c}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

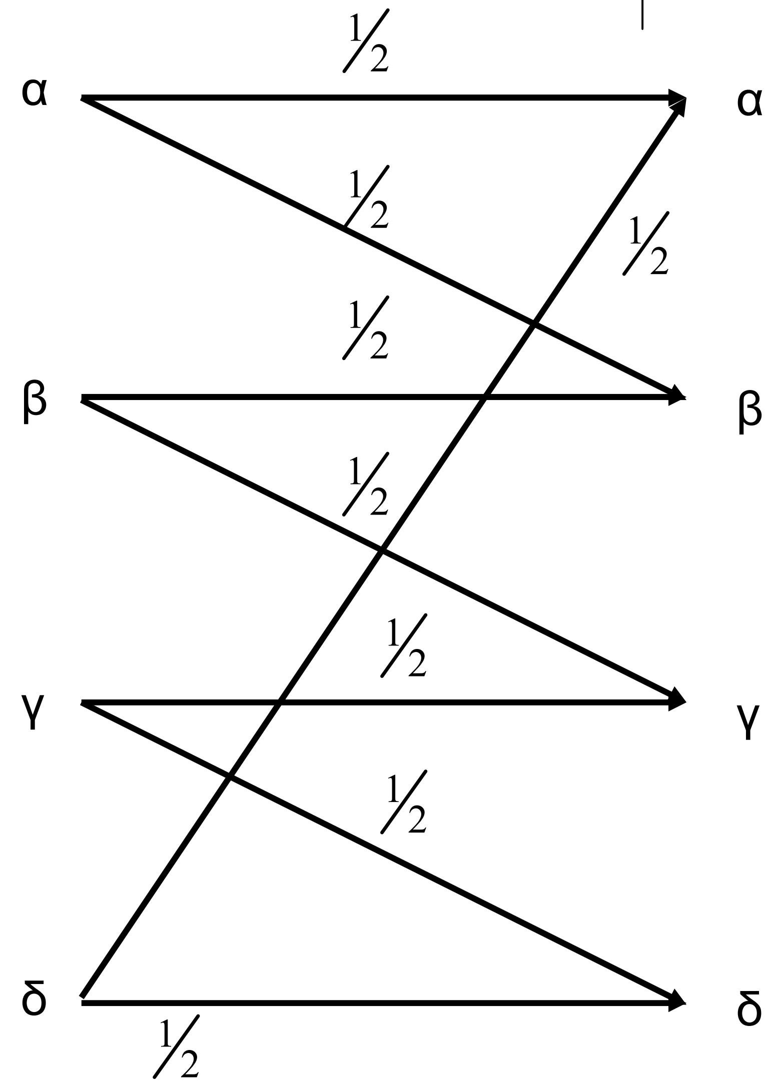
- E_b η ενέργεια bit

Χωρητικότητα διαύλου

- Είναι δυνατή η αξιόπιστη μετάδοση (δηλαδή, με πιθανότητα σφάλματος μικρότερη από δεδομένη τιμή) πληροφορίας σε δίαυλο με θόρυβο αρκεί ο ρυθμός μετάδοσης να είναι μικρότερος από μια τιμή αποκαλούμενη χωρητικότητα διαύλου (Shannon 1948)
  - Ο βασικός περιορισμός που εισάγει ο θόρυβος στον δίαυλο επικοινωνίας δεν τίθεται στην *αξιοπιστία* μετάδοσης αλλά στον *ρυθμό* μετάδοσης

Παράδειγμα

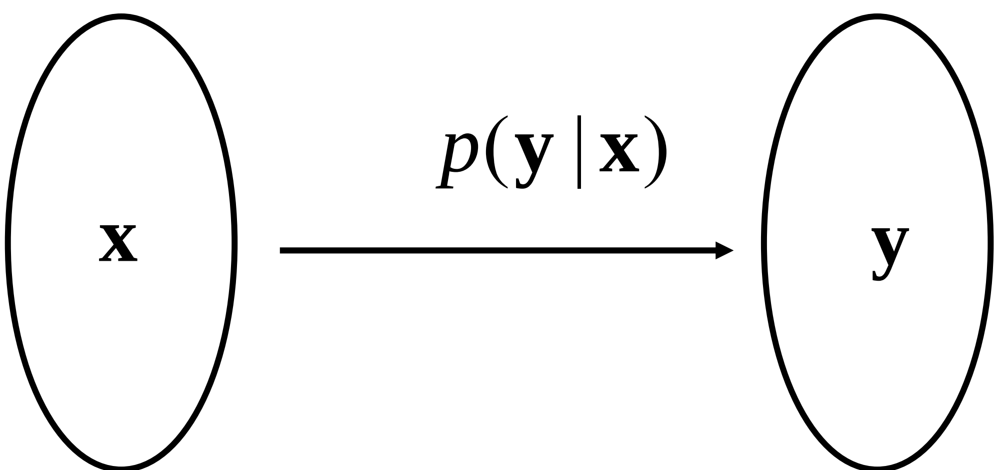
- Εάν ο δέκτης λάβει α, δεν ξέρει κατά πόσο στάλθηκε α ή δ
- Εάν συμφωνηθεί να στέλνονται μόνο τα α ή γ, τότε ο δέκτης εάν λάβει α ή β ξέρει ότι στάλθηκε το α
  - Αντίστοιχα, εάν λάβει γ ή δ, ξέρει ότι στάλθηκε το γ



Επέκταση διαύλου

- Εάν ο δίαυλος είναι δυαδικός συμμετρικός, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια ιδέα, στον εκτεταμένο δίαυλο
  - Η n-στη επέκταση δέχεται έχει ως εισόδους-εξόδους δυαδικά μπλοκ μήκους n

$X^n = \{0,1\}^n \qquad Y^n = \{0,1\}^n$



Ακολουθίες που διαφέρουν

- Για μεγάλο *n* η έξοδος θα διαφέρει από την είσοδο με πολύ μεγάλη πιθανότητα σε *nε* θέσεις
- Ο αριθμός δυνατών ακολουθιών που διαφέρουν με μια ακολουθία μήκους *n* σε θέσεις *nε* είναι

$$\binom{n}{n\varepsilon} \approx 2^{nH_b(\varepsilon)}$$

$$n! \approx n^n \exp(-n)\sqrt{2\pi n}$$

$$H_b(\varepsilon) = -\varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)$$

Μη επικαλυπτόμενες ακολουθίες

- Για κάθε μπλοκ εισόδου υπάρχουν $2^{nH_b(\varepsilon)}$ πιθανές ακολουθίες εξόδου
- Ο ολικός αριθμός πιθανών ακολουθιών εξόδου (τυπικές ακολουθίες) είναι $2^{nH(Y)}$
- Ο μέγιστος αριθμός ακολουθιών εισόδου που δεν παράγουν επικαλυπτόμενες ακολουθίες εξόδου είναι

$$M = \frac{2^{nH(Y)}}{2^{nH_b(\varepsilon)}} = 2^{n(H(Y)-H_b(\varepsilon))}$$

- και αντιστοιχούν σε ρυθμό μετάδοσης

$$R = \frac{\log M}{n} = H(Y) - H_b(\varepsilon)$$

Μέγιστος ρυθμός

- Αρκεί να μεγιστοποιήσουμε την *H(Y)*
- Για δυαδικό συμμετρικό δίαυλο

$$R = 1 - H_b(\varepsilon)$$

- Η χειρότερη επίδοση αντιστοιχεί σε ε=1/2, οπότε ο ρυθμός R=0.

Θεώρημα κωδικοποίησης διαύλου με θόρυβο

- Η χωρητικότητα ενός διακριτού διαύλου χωρίς μνήμη είναι
$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$
όπου $I(X;Y)$ είναι η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου
- Εάν ο ρυθμός μετάδοσης R<C τότε για κάθε $\delta>0$ υπάρχει κώδικας με μήκος n αρκετά μεγάλο ώστε η πιθανότητα σφάλματος να είναι μικρότερη από δ.
- Εάν R>C η πιθανότητα σφάλματος για οποιονδήποτε κώδικα οποιουδήποτε μήκους απομακρύνεται από το μηδέν

Χωρητικότητα Γκαουσιανού διαύλου διακριτού χρόνου

Περιορισμός ισχύος

- Ένας γκαουσιανός δίαυλος με περιορισμένη ισχύ εισόδου μπορεί να περιγραφεί από την σχέση
  $$Y = X + Z$$
- Z είναι κανονική τυχαία μεταβλητή μηδενικής μέσης τιμής και μεταβλητότητας P_N
- Ο περιορισμός ισχύος σημαίνει ότι για οποιαδήποτε ακολουθία μήκους n

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le P$$

Επίδραση του θορύβου

- Για μεγάλο *n*, από τον νόμο μεγάλων αριθμών,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2 \le P_N$$

που σημαίνει ότι με πιθανότητα ένα το ***y*** θα βρίσκεται μέσα σε n-διάστατη υπερ-σφαίρα ακτίνας $\sqrt{nP_N}$ με κέντρο το ***x***

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 \le nP_N$$

Περιορισμός ισχύος στην έξοδο

- Λόγω της ανεξαρτησίας μεταξύ της εισόδου και του θορύβου και του περιορισμού ισχύος

  $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le P + P_N$$

  που σημαίνει ότι με πιθανότητα 1 οι ακολουθίες εξόδου ***y*** θα βρίσκονται μέσα σε n-διάστατη υπερ-σφαίρα ακτίνας $\sqrt{n(P+P_N)}$ με κέντρο την αρχή των αξόνων

  $$\left\|\mathbf{y}\right\|^2 \le n(P+P_N)$$

Χωρητικότητα Γκαουσιανού διαύλου διακριτού χρόνου

- Επειδή το πλήθος των σφαιρών ακτίνας $\sqrt{nP_N}$ που μπορούμε να στοιβάξουμε σε σφαίρα ακτίνας $\sqrt{n(P+P_N)}$ είναι προσεγγιστικά ο λόγος των όγκων τους
- Το πλήθος των μηνυμάτων που μπορούν να μεταδοθούν αξιόπιστα είναι

$$M = \frac{K_n\left(\sqrt{n(P+P_N)}\right)^n}{K_n\left(\sqrt{nP_N}\right)^n} = \left(\frac{P+P_N}{P_N}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{P}{P_N}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Χωρητικότητα Γκαουσιανού διαύλου διακριτού χρόνου

- Άρα η χωρητικότητα, bit/σύμβολο, είναι

$$C = \frac{1}{n}\log M = \frac{1}{n}\frac{n}{2}\log\left(1+\frac{P}{P_N}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{P_N}\right)$$

Χωρητικότητα Γκαουσιανού διαύλου συνεχούς χρόνου

- Δειγματοληπτούμε στο ρυθμό Nyquist οπότε

$$C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right) \quad \text{bit/δείγμα}$$

και για ρυθμό μετάδοσης 2W

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right) \quad \text{bit/sec}$$

όπου

$$P_N = \int_{-W}^{W}\frac{N_0}{2}df = WN_0$$

Όρια στις επικοινωνίες

Ανταλλαγή ισχύος μετάδοσης και εύρους ζώνης

- Υπάρχει δυνατότητα ανταλλαγής μεταξύ ισχύος μετάδοσης και εύρους ζώνης
- Η μείωση της μιας παραμέτρου (*P)* μπορεί να αντισταθμιστεί από αύξηση της άλλης (*W)*
  - Η αύξηση της χωρητικότητας συναρτήσει της ισχύος είναι “αργή” (λογαριθμική συνάρτηση)
    - Για να αυξηθεί η ανοσία στον θόρυβο οι στάθμες κβάντισης πρέπει να απέχουν $\Rightarrow$ μεγάλη ισχύς
  - Η χωρητικότητα μπορεί να αυξηθεί σε οποιαδήποτε τιμή με την αύξηση της ισχύος

Μέγιστη χωρητικότητα

- Η επίδραση του εύρους ζώνης είναι διαφορετική: αυξάνοντας το *W*
  - Μεταδίδουμε περισσότερα δείγματα
  - Μεγαλώνουμε τον θόρυβο στην είσοδο του δέκτη
- Όταν το εύρος ζώνης *W* τείνει στο άπειρο

$$\lim_{W \to \infty} C = \frac{P}{N_0} \log e = 1.44 \frac{P}{N_0}$$

- Οριακή χωρητικότητα

Όρια λειτουργίας

- Επειδή R<C σε οποιοδήποτε πραγματικό σύστημα

$$R < W \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)$$

ή ισοδύναμα

$$r < \log\left(1 + r\frac{E_b}{N_0}\right)$$

όπου

$$r = \frac{R}{W} = \text{φασματικός ρυθμός bit}$$

$$E_b = \frac{P}{R} = \text{ενέργεια bit}$$

Όρια λειτουργίας

οπότε

$$\frac{E_b}{N_0} > \frac{2^r - 1}{r}$$

που οδηγεί στο απόλυτο ελάχιστο για αξιόπιστη επικοινωνία

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\min} = \ln 2 = 0.693 \sim -1.6\,\mathrm{dB}$$

Σχέση με την κωδικοποίηση πηγής

- Αφού ο ρυθμός μετάδοσης πρέπει να είναι μικρότερος της χωρητικότητας διαύλου, για ικανοποιητική μετάδοση με παραμόρφωση *D* πρέπει $R(D) < C$
- Η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης για γκαουσιανή πηγή με φασματική πυκνότητα ισχύος *A* είναι

$$S_X(f) = \begin{cases} A, & |f| < W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad R(D) = \begin{cases} W \log\left(\dfrac{2AW}{D}\right), & D < 2AW \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Μετάδοση με παραμόρφωση *D*

- Εξισώνοντας τον ρυθμό μετάδοσης για παραμόρφωση *D* (σε σήμα εύρους ζώνης *W*) με την χωρητικότητα διαύλου (για εύρος ζώνης μετάδοσης *B*) λαμβάνουμε

$$B\log\left(1+\frac{P}{N_0 B}\right)=W\log\left(\frac{2AW}{D}\right)$$

Λόγος σήματος προς θόρυβο

- Ο λόγος *B*/*W* καλείται παράγων διεύρυνσης του εύρους ζώνης

$$\mathrm{SQNR} = \frac{2AW}{D} = \left(1 + \frac{P}{N_0 B}\right)^{\frac{B}{W}}$$

- Στο βέλτιστο σύστημα, λόγος σήματος προς θόρυβο στην έξοδο αυξάνει εκθετικά ως προς τη διεύρυνση του εύρους ζώνης

Μετάδοση με PCM

- Στο σύστημα PCM

$$R = 2\nu W, \qquad B = \frac{R}{2} = \nu W$$

- Η παραμόρφωση είναι το άθροισμα των παραμορφώσεων λόγω κβαντισμού και σφαλμάτων

$$D_{total} = \sigma_q^2 + P_b \sigma_d^2$$

όπου $\sigma_q^2 = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 2^{2\nu}} = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 4^{\nu}} = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 4^{B/W}}, \ \sigma_d^2 \approx \frac{4}{3} x_{\max}^2 P_e$

$$q = \frac{2x_{\max}}{2^{\nu}} = \frac{x_{\max}}{2^{\nu-1}}$$

Σηματοθορυβική σχέση στο PCM

- Η σηματοθορυβική σχέση είναι

$$SNR = \frac{3\overline{x^2}}{x_{\max}^2\left(4P_e + 4^{-\frac{B}{W}}\right)} = \frac{3}{\left(4P_e + 4^{-\frac{B}{W}}\right)} S_x$$

- όπου

$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{SNR_c}\right) & \text{πολική} \\ Q\left(\sqrt{SNR_c/2}\right) & \text{μονοπολική} \end{cases}$$

Επίδοση PCM

- Το SNR για μικρές πιθανότητες σφάλματος αυξάνει εκθετικά ως προς τον παράγοντα διεύρυνσης του εύρους ζώνης
- Η PCM χρησιμοποιεί αποδοτικά το διαθέσιμο εύρος ζώνης!
- Η FM εμφανίζει μια παρόμοια ιδιότητα ανταλλαγής εύρους ζώνης προς ισχύ εκπομπής, αλλά η αντίστοιχη εξάρτηση είναι τετραγωνική ως προς παράγοντα διεύρυνσης του εύρους ζώνης
  - Η FM δεν είναι τόσο αποδοτικό όσο η PCM