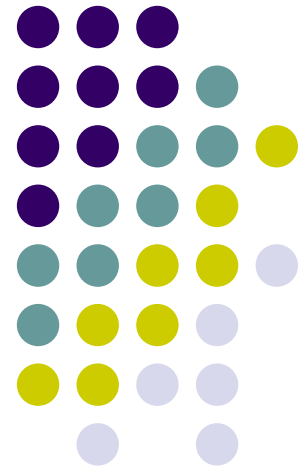
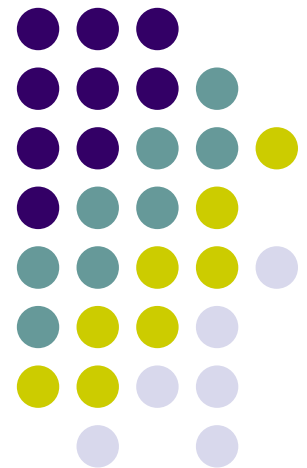


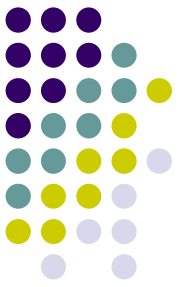
Κωδικοποίηση



Κωδικοποίηση πηγής

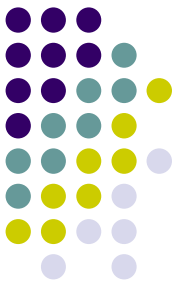


Θεώρημα κωδικοποίησης πηγής



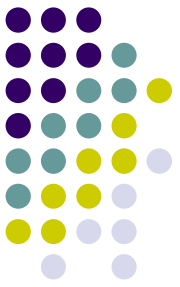
- Καθορίζει ένα θεμελιώδες όριο στον ρυθμό με τον οποίο η έξοδος μιας πηγής πληροφορίας μπορεί να συμπιεσθεί χωρίς να προκληθεί μεγάλη πιθανότητα σφάλματος
- Shannon 1948

Τυπικές και μη τυπικές ακολουθίες



- Έξοδος πηγής DMS μεγάλου μήκους $n \rightarrow \infty$
 - Το σύμβολο x_1 επαναλαμβάνεται περίπου np_1 φορές
 - Το σύμβολο x_2 επαναλαμβάνεται περίπου np_2 φορές
 - ...
 - Το σύμβολο x_N επαναλαμβάνεται περίπου np_N φορές

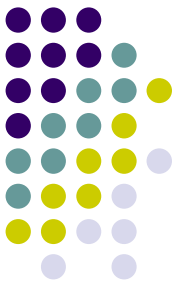
Τυπικές και μη τυπικές ακολουθίες



- Με πιθανότητα σχεδόν 1 όλες οι ακολουθίες έχουν την ίδια σύνθεση
- Σχεδόν όλες οι ακολουθίες είναι περίπου ισοπίθανες! (τυπικές ακολουθίες)

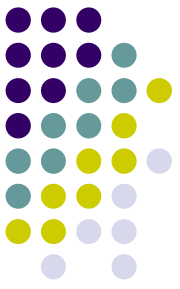
$$\begin{aligned} p(\mathbf{X} = \mathbf{x}) &\approx \prod_{i=1}^N p_i^{np_i} \\ &= \prod_{i=1}^N 2^{np_i \log p_i} = 2^{n \sum_{i=1}^N p_i \log p_i} = 2^{-nH(X)} \end{aligned}$$

Τυπικές και μη τυπικές ακολουθίες

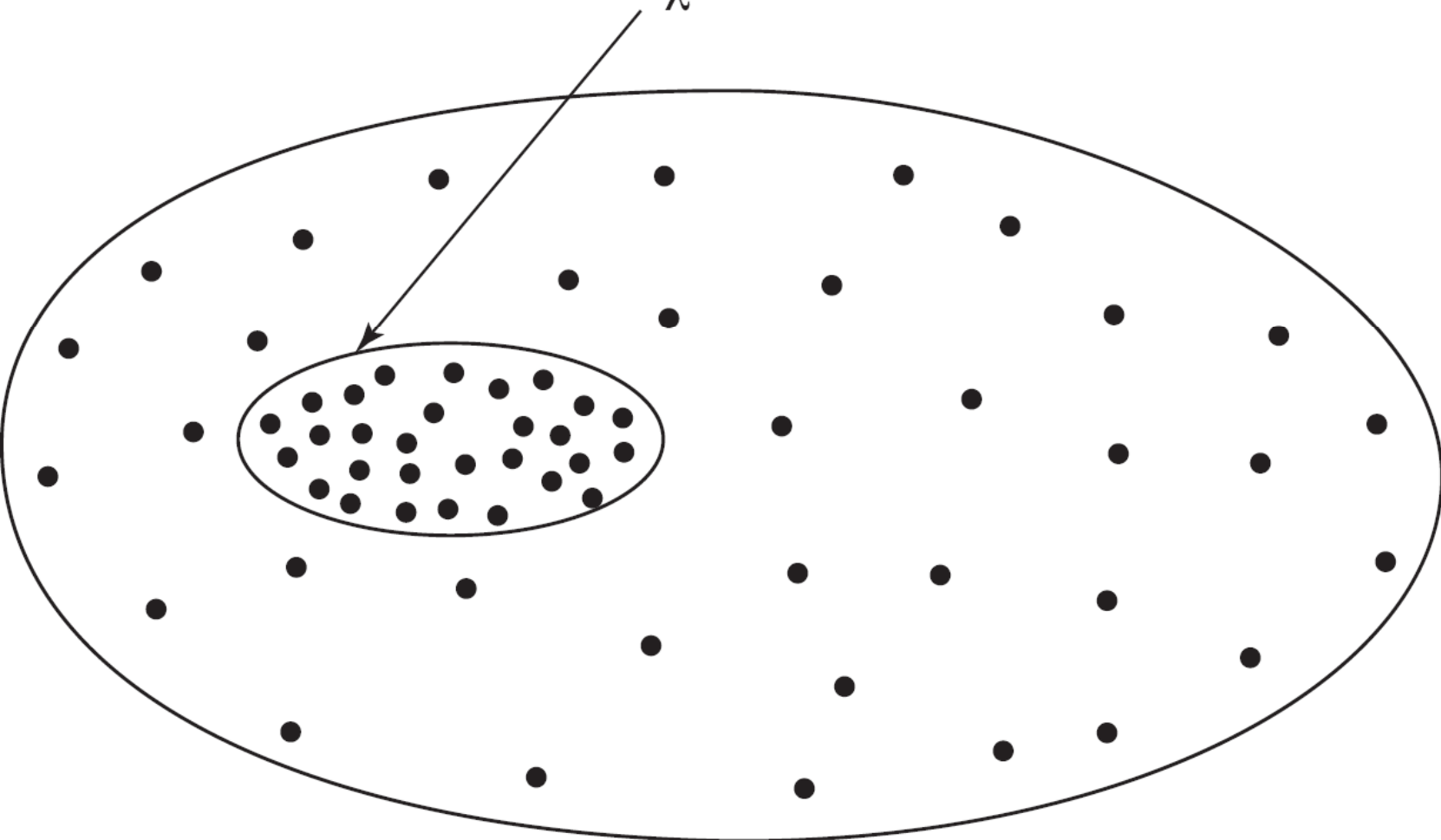


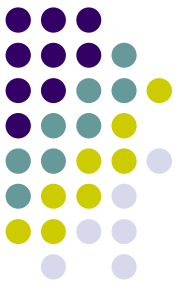
- Η πιθανότητα εμφάνισης μιας μη τυπικής ακολουθίας είναι αμελητέα
- Ο συνολικός αριθμός τυπικών ακολουθιών είναι περίπου $2^{nH(X)}$ παρόλο που η πηγή μπορεί να παράγει N^n ακολουθίες
- Για πρακτικούς λόγους αρκεί να λάβουμε υπόψη το σύνολο τυπικών ακολουθιών αντί του συνόλου όλων των δυνατών ακολουθιών εξόδων της πηγής

Τυπικές και μη τυπικές ακολουθίες



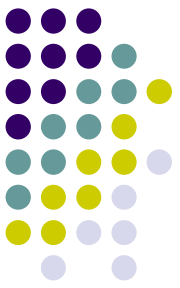
Σύνολο τυπικών ακολουθιών με $\approx 2^{nH(X)}$
στοιχεία





Συμπίεση δεδομένων

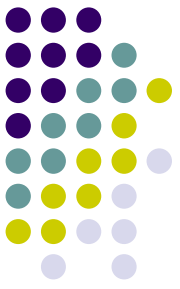
- Επιλέγοντας αρκετά μεγάλο n , το σφάλμα που προκύπτει εάν αγνοήσουμε τις μη τυπικές ακολουθίες μπορεί να γίνει μικρότερο από κάθε $\epsilon > 0$
- Συμπίεση δεδομένων
 - Αναπαράσταση της εξόδου μια πηγής με ένα μικρότερο αριθμό ακολουθιών από ότι παράγει η πηγή στην πραγματικότητα



Συμπίεση δεδομένων

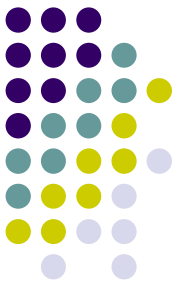
- Χρειαζόμαστε $nH(X)$ bit για την αναπαράσταση του συνόλου των τυπικών ακολουθιών
 - Πλήθος τυπικών ακολουθιών $2^{nH(X)}$
 - Πλήθος δυνατών ακολουθιών N^n
- **Απαιτούνται $H(X)$ bit ανά σύμβολο!**
- Η συμπίεση είναι δυνατή εάν τα σύμβολα δεν είναι ισοπίθανα
 - Για ισοπίθανα σύμβολα $H(X)=\log(N)$ και

$$2^{nH(X)} = 2^{n\log(N)} = N^n$$



Πηγές με μνήμη

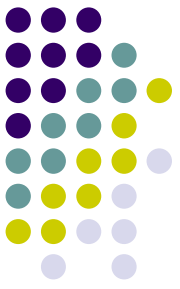
- Εάν η πηγή έχει μνήμη, τότε οι έξοδοι δεν είναι ανεξάρτητες και για αυτό φανερώνουν πληροφορία για τις επόμενες εξόδους
- Για παράδειγμα στην αγγλική γλώσσα
 - το “q” σχεδόν πάντα ακολουθείται από “u”
 - Ένα γράμμα μεταξύ δύο κενών είναι το “l” ή το “a”



Πηγές με μνήμη

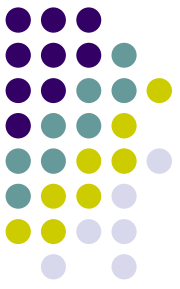
- Για πηγές με μνήμη μας ενδιαφέρει ο ρυθμός εντροπίας $H(X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$
- Στην αγγλική γλώσσα (26 γράμματα και το κενό διάστημα)
 - για $n=1$ η εντροπία είναι 4,03 bit/γράμμα
 - και ο ρυθμός εντροπίας ($n \rightarrow \infty$) είναι 1,3 bit/γράμμα

Θεώρημα κωδικοποίησης πηγής



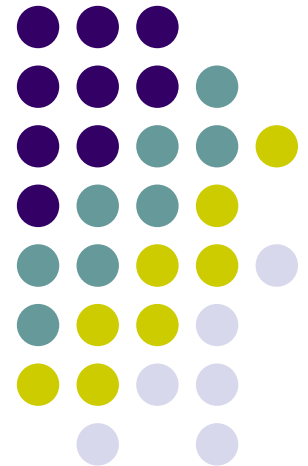
- Μια πηγή (ρυθμού) εντροπίας H μπορεί να κωδικοποιηθεί με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος σε οποιοδήποτε ρυθμό R , εφόσον $R > H$. Αντίστροφα, εάν $R < H$ η πιθανότητα σφάλματος θα παραμένει μακριά από το μηδέν, ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητα του κωδικοποιητή

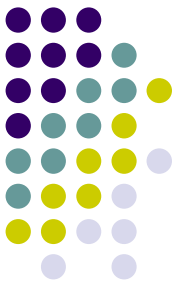
Αλγόριθμοι κωδικοποίησης πηγής



- Το θεώρημα κωδικοποίησης πηγής δίνει μόνο αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη κωδίκων πηγής
 - Δεν περιγράφει κανένα αλγόριθμο για τη σχεδίαση
 - Δίνει ένα φράγμα στο ρυθμό με τον οποίο μπορεί να κωδικοποιηθεί μια πηγής
- Δύο γνωστοί αλγόριθμοι σχεδίασης κωδίκων που δίνουν αποτελέσματα κοντά στο φράγμα εντροπίας
 - Huffman (1952)
 - Lempel-Ziv (1977, 1978) → ZIP, ZOO, ARJ

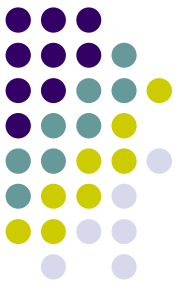
Συνάρτηση ρυθμού - παραμόρφωσης





Κωδικοποίηση με απώλειες

- Έστω ότι μετάδοση με ρυθμούς κοντά σε αυτόν της εντροπίας δεν είναι δυνατή
- Μπορούμε να συμπίεσουμε την έξοδο μιας πηγής αποδεχόμενοι **απώλειες** και κάποια **παραμόρφωση**
- Παράδειγμα: η κωδικοποίηση της εξόδου αναλογικής πηγής
 - Τα δείγματα είναι πραγματικοί αριθμοί
 - Άπειρος αριθμός bit
 - **Κβάντιση και κωδικοποίηση των κβαντισμένων τιμών**



Το βασικό πρόβλημα

- Υποθέστε ότι ζητείται να μεταδοθεί πληροφορία μετά από συμπίεση της εξόδου της πηγής σε ορισμένο ρυθμό bit/σύμβολο
 - Πόσο κοντά είναι η συμπιεσμένη εκδοχή στην αρχική;
 - Για δεδομένο ρυθμό, ποιος είναι ο ελάχιστος ρυθμός σφαλμάτων και πώς μπορεί να επιτευχθεί;
 - Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός bit ανά έξοδο για καθορισμένο επίπεδο παραμόρφωσης;



Παραμόρφωση

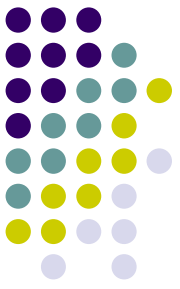
- Υπάρχουν διάφορα μέτρα της παραμόρφωσης, δηλαδή, του πόσο απέχει το σήμα από την αναπαραγωγή του

- Hamming

$$d_H(x, \hat{x}) = \begin{cases} 1, & x \neq \hat{x} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Τετραγωνικού σφάλματος

$$d_H(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^2$$



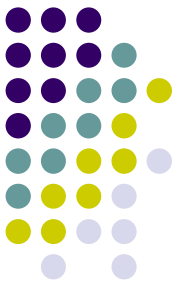
Παραμόρφωση

- Για ακολουθία συμβόλων, ως παραμόρφωση ορίζουμε τη **μέση παραμόρφωση ανά σύμβολο**
 - Η θέση του σφάλματος δεν είναι σημαντική
 - Η παραμόρφωση δεν εξαρτάται από τα συμφραζόμενα

$$d(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(X_i, \hat{X}_i)$$

- Η παραμόρφωση της πηγής είναι η αναμενόμενη τιμή της ως άνω τυχαίας μεταβλητής

$$D = E\{d(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{d(X_i, \hat{X}_i)\} = E\{d(X, \hat{X})\}$$

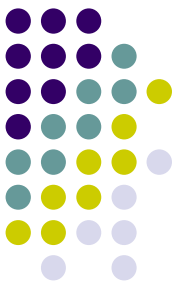


Παραμόρφωση Hamming

- Στην περίπτωση που ως μέτρο χρησιμοποιείται η παραμόρφωση Hamming, η παραμόρφωση D της πηγής είναι η **πιθανότητα σφάλματος**

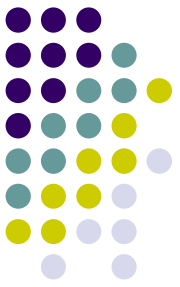
$$\begin{aligned} D &= E\{d_H(X, \hat{X})\} = 1 \times p\{X \neq \hat{X}\} + 0 \times p\{X = \hat{X}\} \\ &= p\{X \neq \hat{X}\} \\ &= p\{\text{λάθος}\} \end{aligned}$$

Συνάρτηση ρυθμού - παραμόρφωσης



- Δοθείσης μιας πηγής πληροφορίας χωρίς μνήμη, του αλφάβητου που παράγει, του αλφάβητου αναπαραγωγής της και του μέτρου παραμόρφωσης, ποιος είναι ο ρυθμός R bit/σύμβολο για παραμόρφωση D ;
 - Ο ρυθμός R είναι ο ελάχιστος αριθμός bit ανά έξοδο της πηγής που εξασφαλίζει την απαιτούμενη μέση παραμόρφωση
- Η σχέση μεταξύ R και D είναι η **συνάρτηση ρυθμού – παραμόρφωσης $R(D)$**

Θεώρημα ρυθμού - παραμόρφωσης

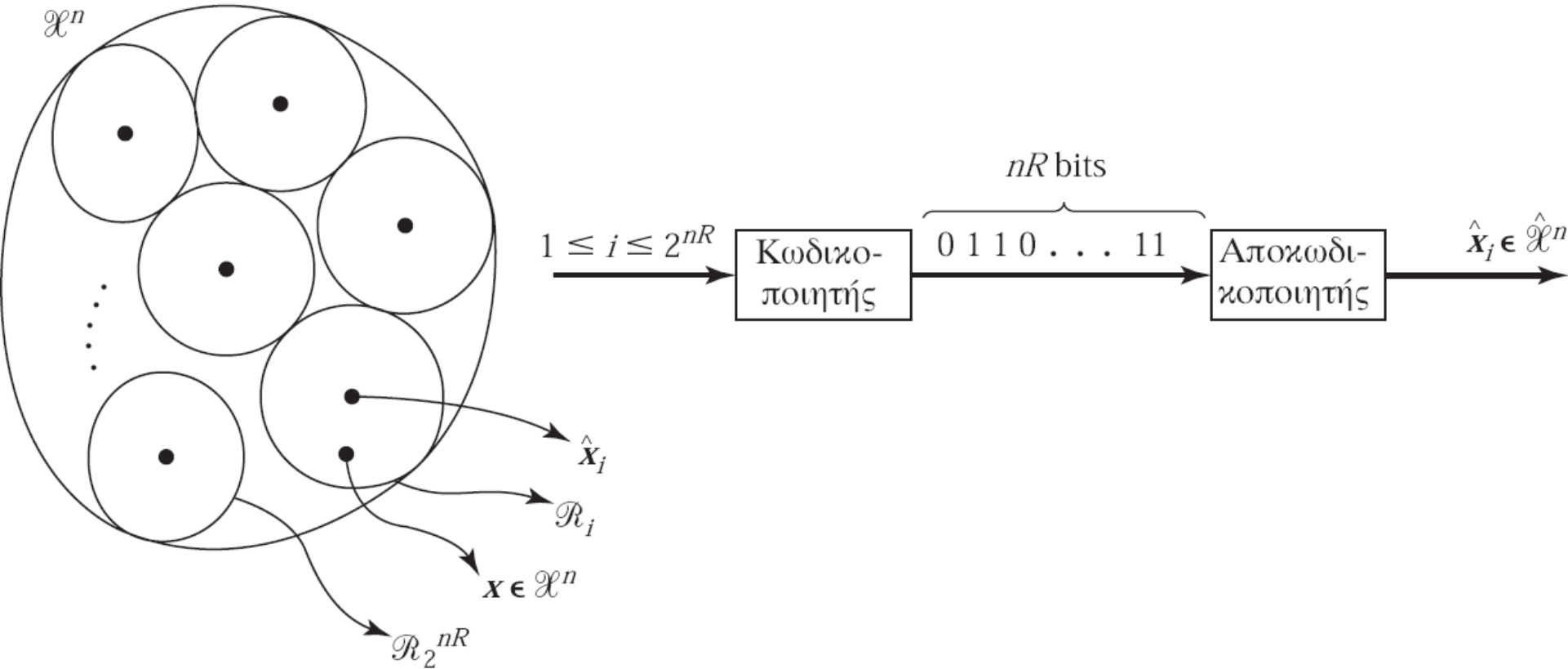


- Ο ελάχιστος αριθμός bit ανά έξοδο πηγής που απαιτείται για αναπαραγωγή μιας πηγής χωρίς μνήμη με παραμόρφωση μικρότερη από D είναι

$$R(D) = \min_{p(\hat{x}|x): E\{d(X, \hat{X})\} \leq D} I(X; \hat{X})$$

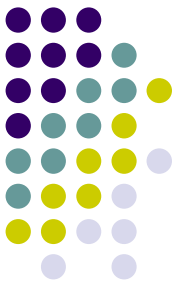
- $R(D)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση της D
 - Υψηλή πιστότητα (μικρή D) απαιτεί μεγάλο R

Θεώρημα ρυθμού - παραμόρφωσης



Για δεδομένο ρυθμό \rightarrow ελάχιστη επιτεύξιμη παραμόρφωση

Για δεδομένη παραμόρφωση \rightarrow ελάχιστος ρυθμός



Δυαδική πηγή χωρίς μνήμη

- Η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης της δυαδικής πηγής χωρίς μνήμη είναι

$$R(D) = \begin{cases} H_b(p) - H_b(D), & 0 \leq D \leq \min\{p, 1-p\} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

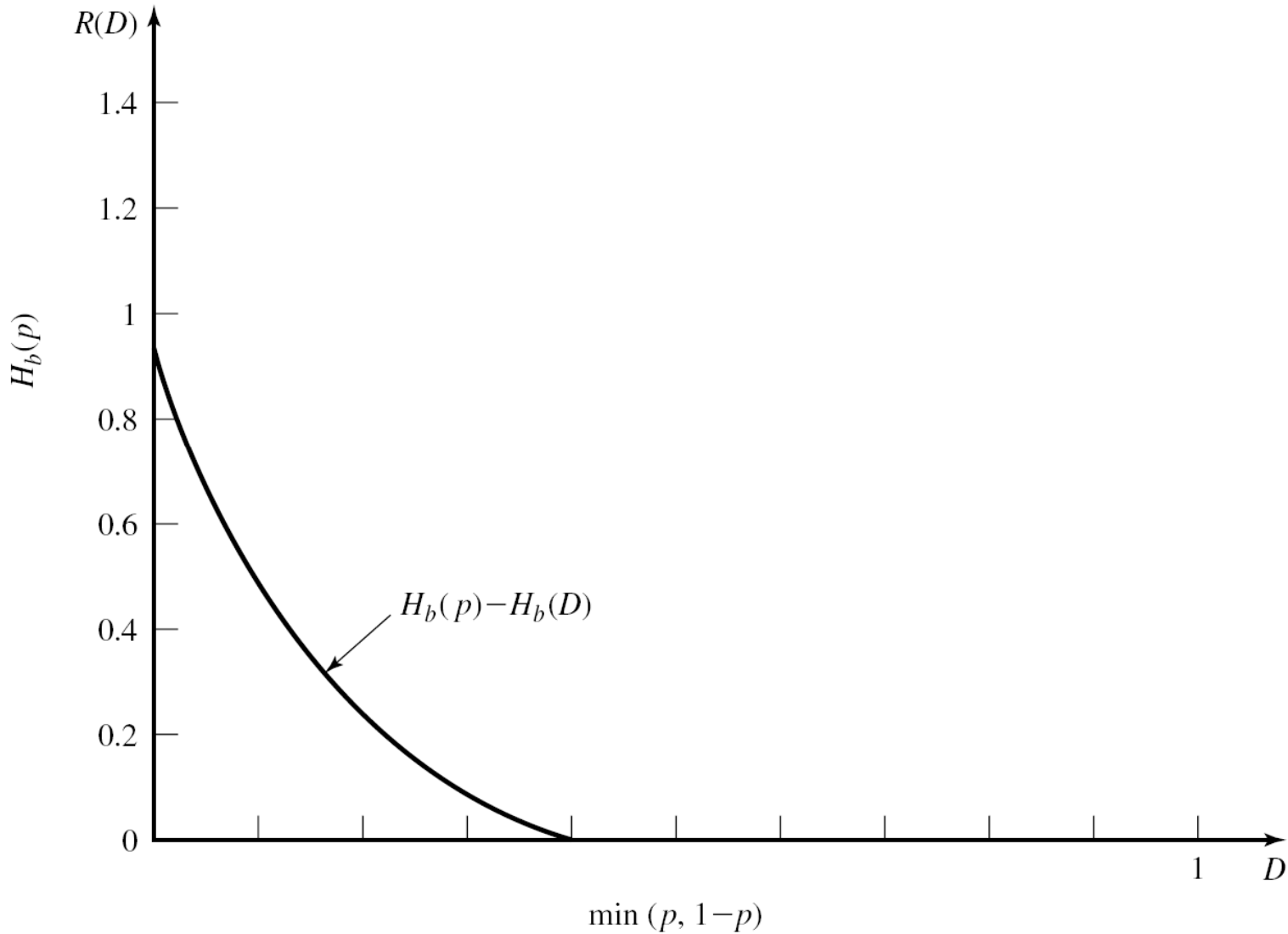
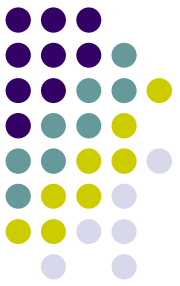
- Για μηδενική παραμόρφωση ως αναμένεται

$$R(0) = H_b(p)$$

- Για $p < 0,5$ και $D=p$ έχουμε $R(D)=0$

- Δεν χρειάζεται μετάδοση (όλα μηδέν)

Δυαδική πηγή χωρίς μνήμη





Γκαουσιανή πηγή

- Η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης της γκαουσιανής πηγής είναι

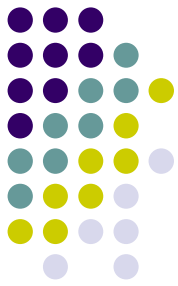
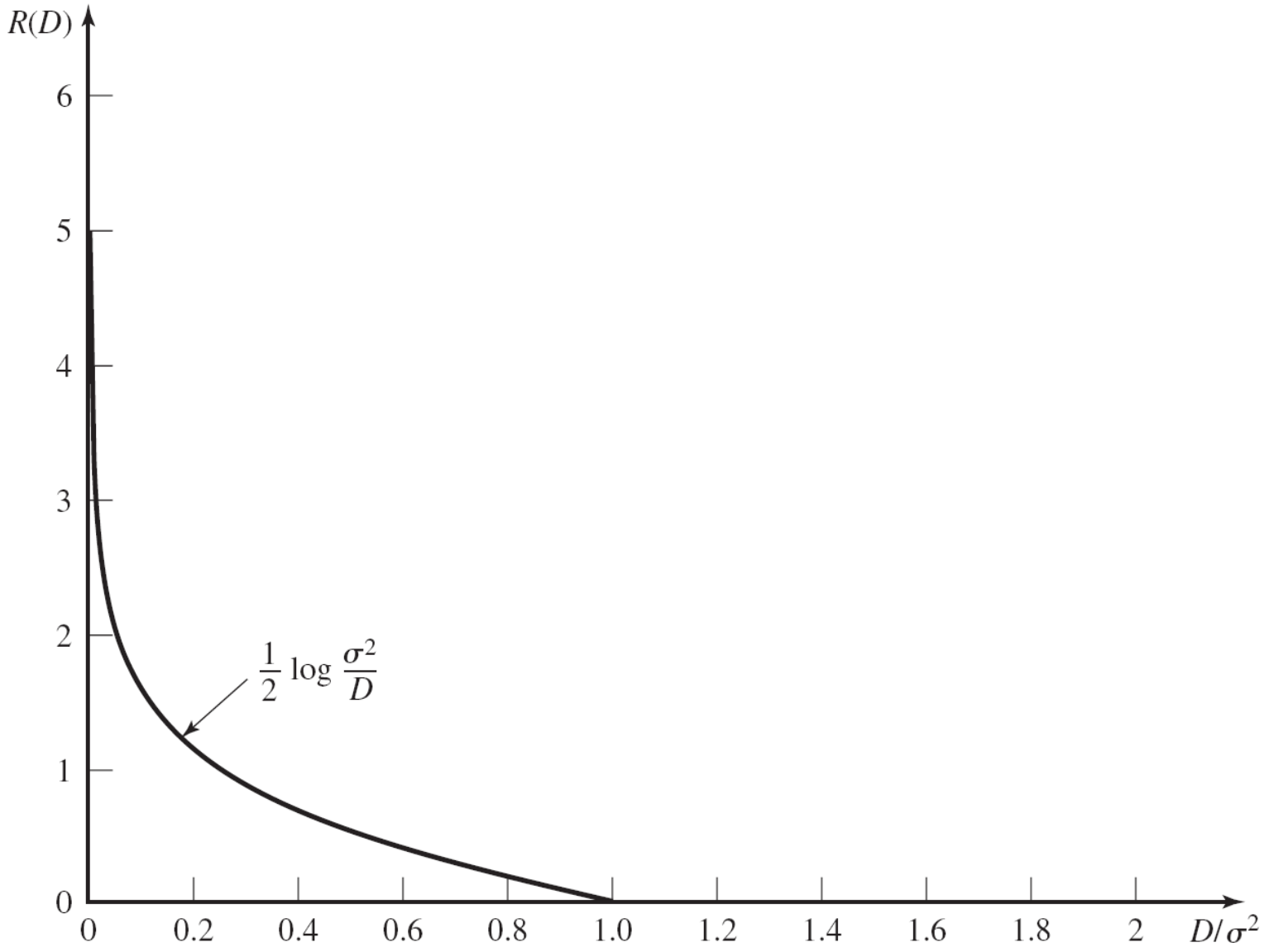
$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{D}, & 0 \leq D \leq \sigma^2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Για $0 \leq D \leq \sigma^2$ η αντίστροφη συνάρτηση παραμόρφωσης-ρυθμού είναι

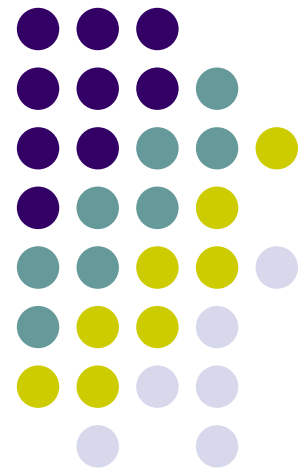
$$D(R) = \sigma^2 2^{-2R}$$

άρα αύξηση του R κατά **ένα bit** μειώνει την παραμόρφωση D κατά 4 ή **6 db**

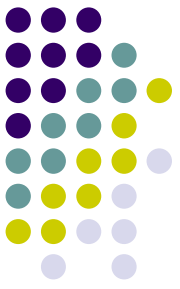
Γκαουσιανή πηγή



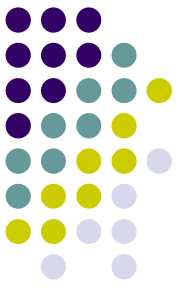
Κβάντιση



Κβαντιστές

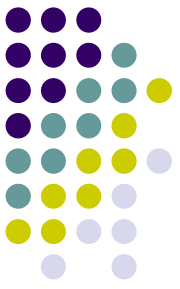


- Η ακριβής αναπαράσταση μιας αναλογικής πηγής απαιτεί άπειρο αριθμό bit ανά έξοδο
 - Με την κβάντιση θα εμφανισθεί κάποια παραμόρφωση
 - Η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης δίνει ένα θεμελιώδες όριο
 - Ανταλλαγή ρυθμού κωδικοποίησης και παραμόρφωσης
 - Προσεγγίζεται μόνο ασυμπτωτικά με περίπλοκους κωδικοποιητές/αποκωδικοποιητές



Κβαντιστές

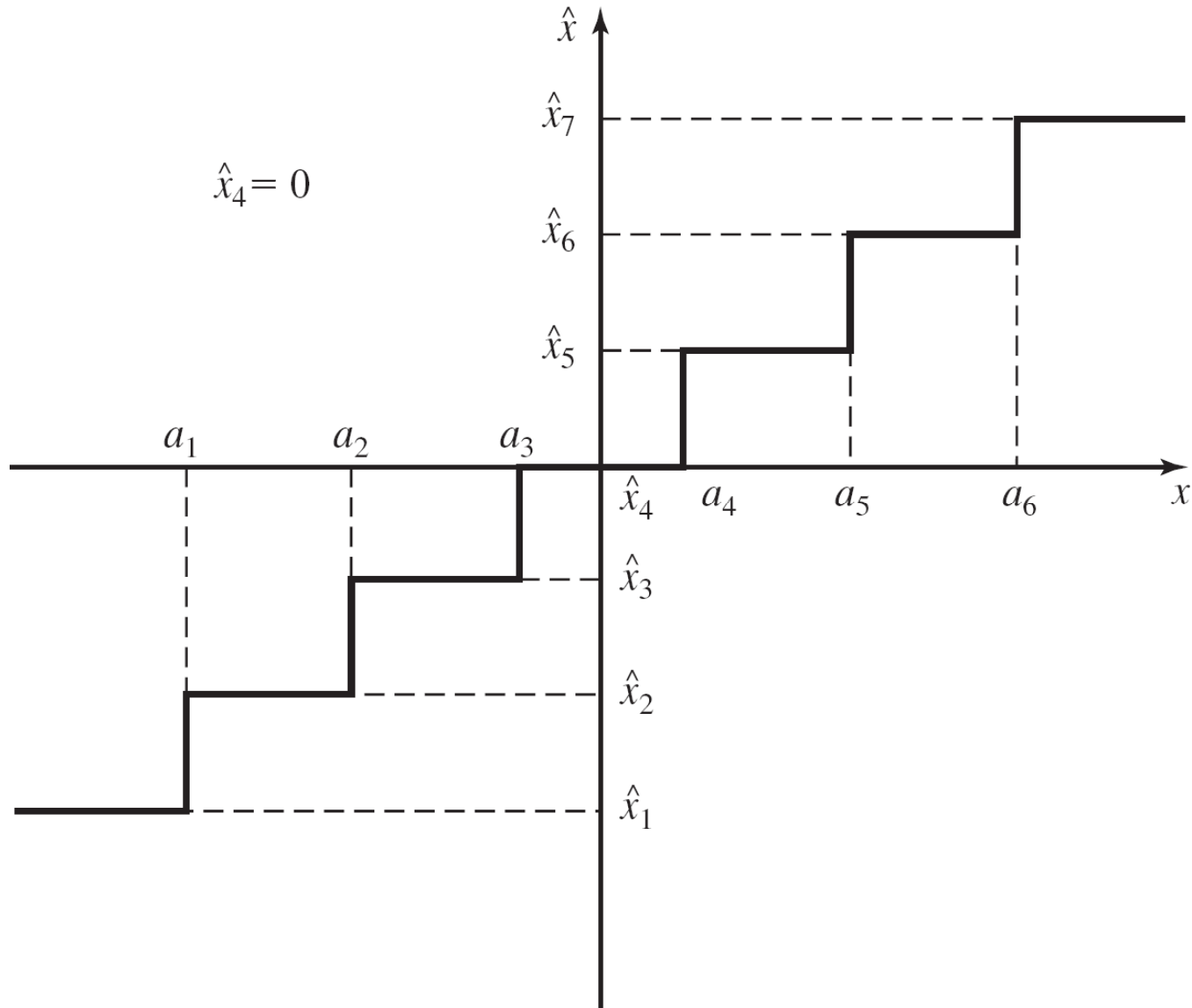
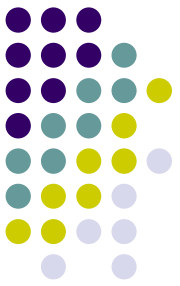
- Όσο μεγαλύτερη η τιμή του n τόσο πιο κοντά στο όριο της συνάρτησης ρυθμού-παραμόρφωσης
- Οι κβαντιστές πρέπει να κβαντίζουν τις εξόδους κατά μπλοκ και όχι χωριστά
 - Διανυσματικοί κβαντιστές
 - Κβάντιση των εξόδων σε μπλοκ
 - Βαθμωτοί κβαντιστές
 - Κβάντιση κάθε εξόδου χωριστά



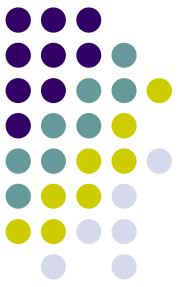
Βαθμωτή κβάντιση

- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} διαμερίζεται σε N ξένα μεταξύ τους σύνολα \mathcal{R}_k , $k=1,2, \dots, N$
- Για κάθε υποσύνολο \mathcal{R}_k επιλέγεται ένα αντιπροσωπευτικό του στοιχείο \hat{x}_i
- Εάν η έξοδος x_i της πηγής τη χρονική στιγμή i ανήκει στο τότε αναπαρίσταται με \hat{x}_i , που αποτελεί την κβαντισμένη εκδοχή του
 - Το \hat{x}_i στη συνέχεια αναπαρίσταται με μια δυαδική ακολουθία, η οποία και μεταδίδεται
 - Ο ρυθμός μετάδοσης είναι $R = \log N$ bit
 - συνήθως το N επιλέγεται να είναι δύναμη του δύο

Ομοιόμορφη κβάντιση



Λόγος σήματος προς θόρυβο κβάντισης



- Είναι η ισχύς του σήματος προς την ισχύ του σήματος θορύβου

$$Q(x) = \hat{x}_i, \forall x \in \mathcal{R}_i$$

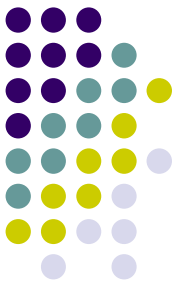
$$d(x, \hat{x}) = (x - Q(x))^2$$

$$D = E\{d(X, \hat{X})\} = E\{(X - Q(X))^2\}$$

$$SNQR = \frac{E\{X^2\}}{E\{(X - Q(X))^2\}} = \frac{P_x}{P_{\hat{x}}}$$

- Μέτρο της επίδοσης του κβαντιστή

Παραμόρφωση στην ομοιόμορφη κβάντιση



- Η παραμόρφωση του ομοιόμορφου κβαντιστή

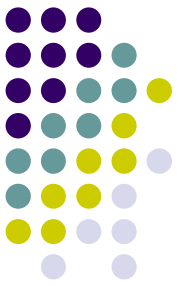
$$\begin{aligned} D = & \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_x(x) dx + \\ & + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_1+(i-1)q}^{a_1+iq} (x - \hat{x}_{i+1})^2 f_x(x) dx + \\ & + \int_{a_1+(N-2)q}^{\infty} (x - \hat{x}_N)^2 f_x(x) dx \end{aligned}$$

Παραμόρφωση στην μη ομοιόμορφη κβάντιση



- Η παραμόρφωση του μη ομοιόμορφου κβαντιστή

$$\begin{aligned} D = & \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_x(x) dx + \\ & + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{x}_{i+1})^2 f_x(x) dx + \\ & + \int_{a_{N-1}}^{\infty} (x - \hat{x}_N)^2 f_x(x) dx \end{aligned}$$

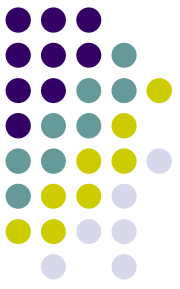


Βέλτιστος κβαντιστής

- Για την ελαχιστοποίηση της D παραγωγίζοντας ως προς a_i βρίσκουμε

$$a_i = \frac{\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1}}{2}$$

- Τα άκρα των περιοχών κβάντισης είναι η μέση τιμή των γειτονικών σταθμών κβάντισης

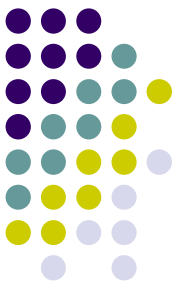


Βέλτιστος κβάντιστης

- Για τα προηγούμενα όρια περιοχών παραγωγίζοντας την D ως προς \hat{x}_i βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= \frac{\int_{a_{i-1}}^{a_i} x f_x(x) dx}{\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_x(x) dx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x | a_{i-1} < x \leq a_i) dx \\ &= E\{x | a_{i-1} < x \leq a_i\}\end{aligned}$$

- Οι στάθμες κβάντισης είναι τα κέντρα μάζης των περιοχών κβάντισης



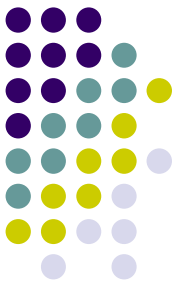
Διανυσματική κβάντιση

- Λαμβάνουμε τα δείγματα σε ομάδες των n δειγμάτων κάθε φορά
- Ο χώρος των δειγμάτων είναι \mathbb{R}^n και χωρίζεται σε K περιοχές \mathcal{R}_i
- Απαιτούνται $\log K$ bit ανά ομάδα, οπότε ο ρυθμός είναι

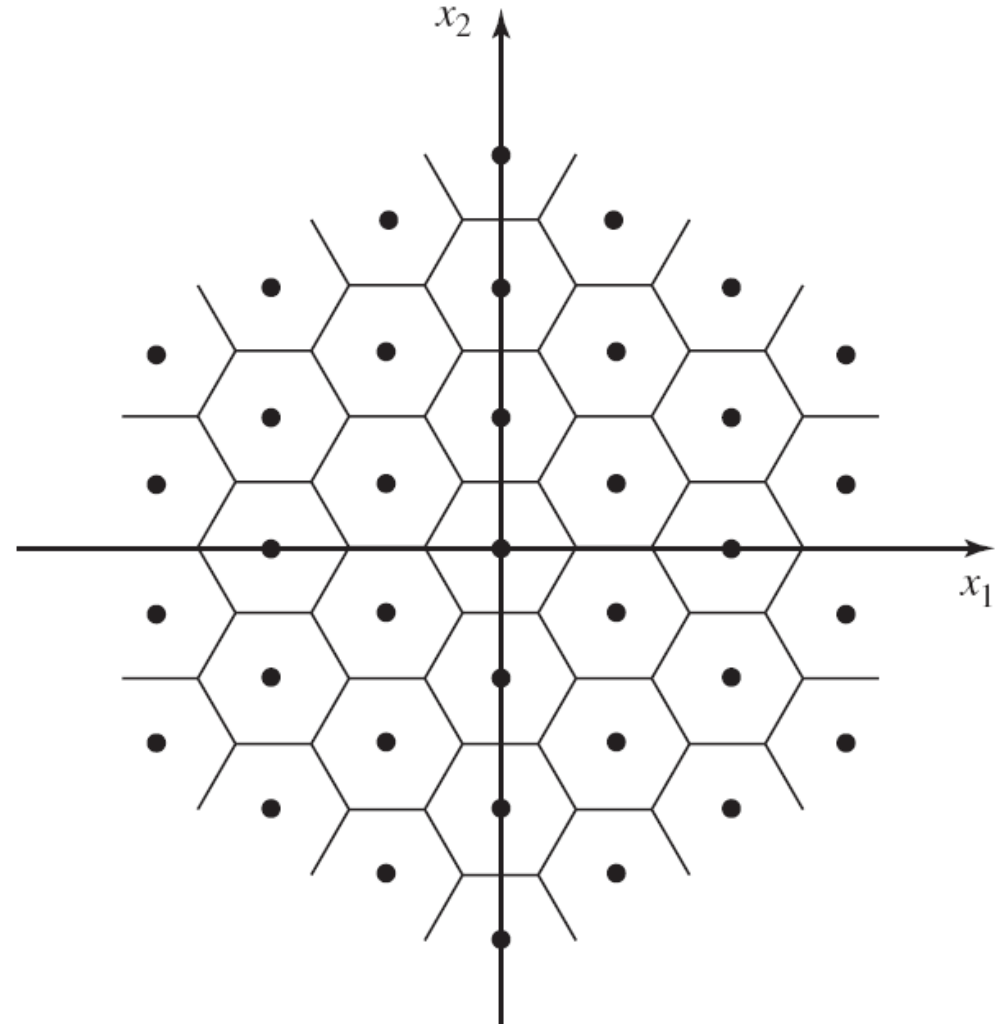
$$R = \frac{\log K}{n}$$

- Ο βέλτιστος διανυσματικός κβαντιστής προκύπτει επιλέγοντας τις περιοχές κβάντισης και τις τιμές κβάντισης έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η παραμόρφωση

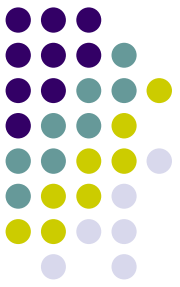
Παράδειγμα διανυσματικής κβάντισης



- $K=37, n=2$



Παράδειγμα διανυσματικής κβάντισης



- Βαθμωτός κβαντιστής 4 σταθμών και διανυσματικός κβαντιστής 4 σταθμών σε δύο δείγματα

