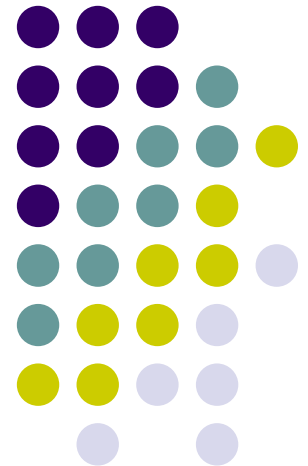
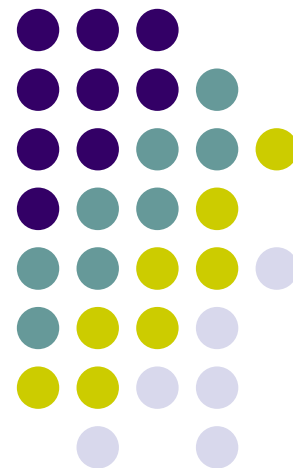


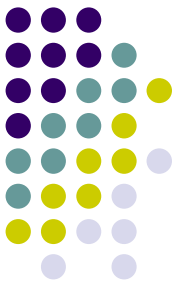
Διαμόρφωση Παλμών

Pulse Modulation



Δειγματοληψία

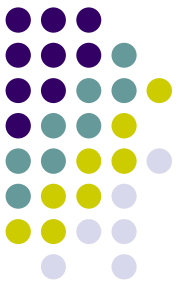




Θεώρημα δειγματοληψίας

- Ένα βαθυπερατό σήμα πεπερασμένης ενέργειας που δεν περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες των W Hertz μπορεί να περιγραφθεί πλήρως από τις τιμές του σε χρονικές στιγμές ισαπέχουσες κατά $1/2W$ sec
- Ένα βαθυπερατό σήμα πεπερασμένης ενέργειας που δεν περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες των W Hertz μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από δείγματά του που λαμβάνονται με ρυθμό $2W$ ανά sec
- Nyquist 1928, Shannon 1949

Φάσμα σήματος μετά τη δειγματοληψία



$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

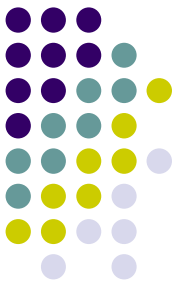
$$x_{\delta}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$X_{\delta}(f) = X(f) \otimes \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

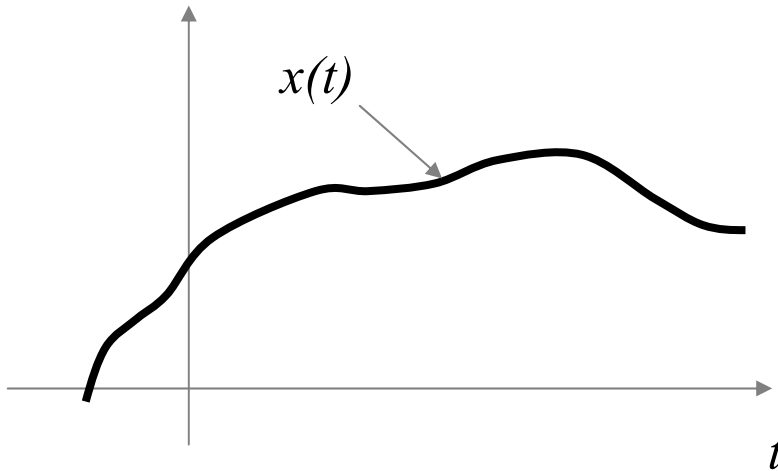
$$X_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) \otimes \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$X_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

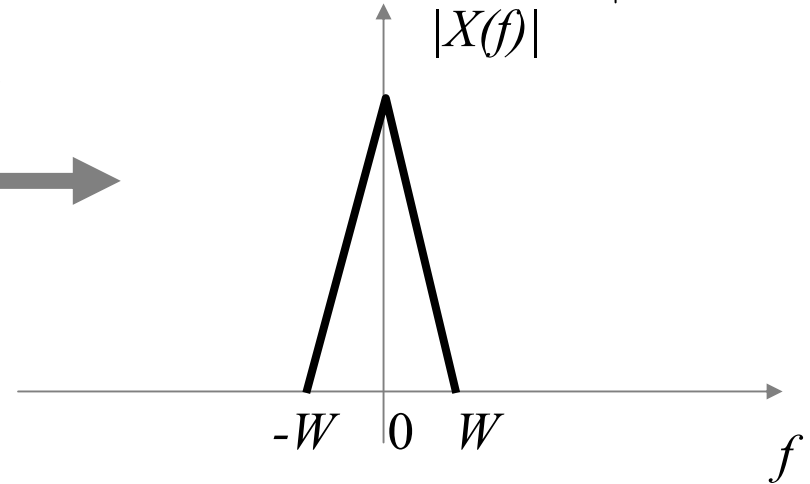
Επίδραση δειγματοληψίας στο φάσμα



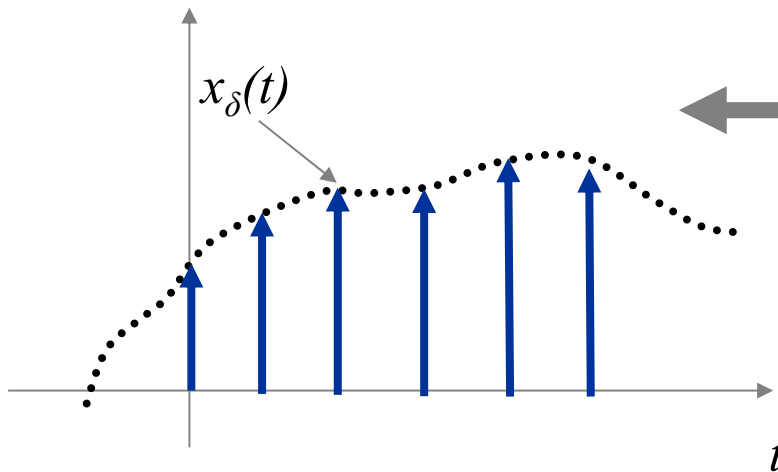
Αρχικό σήμα



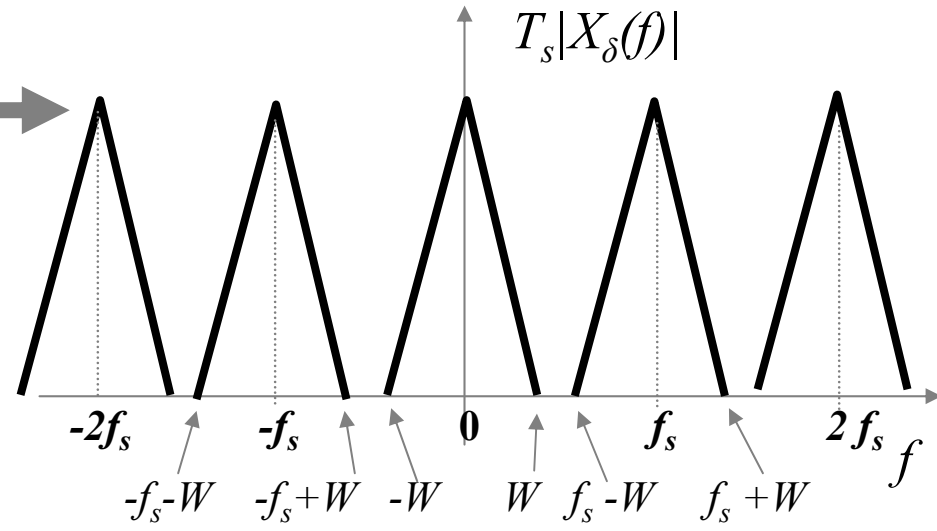
$\mathcal{F}$

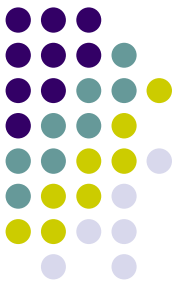


Μετά τη δειγματοληψία



$\mathcal{F}$

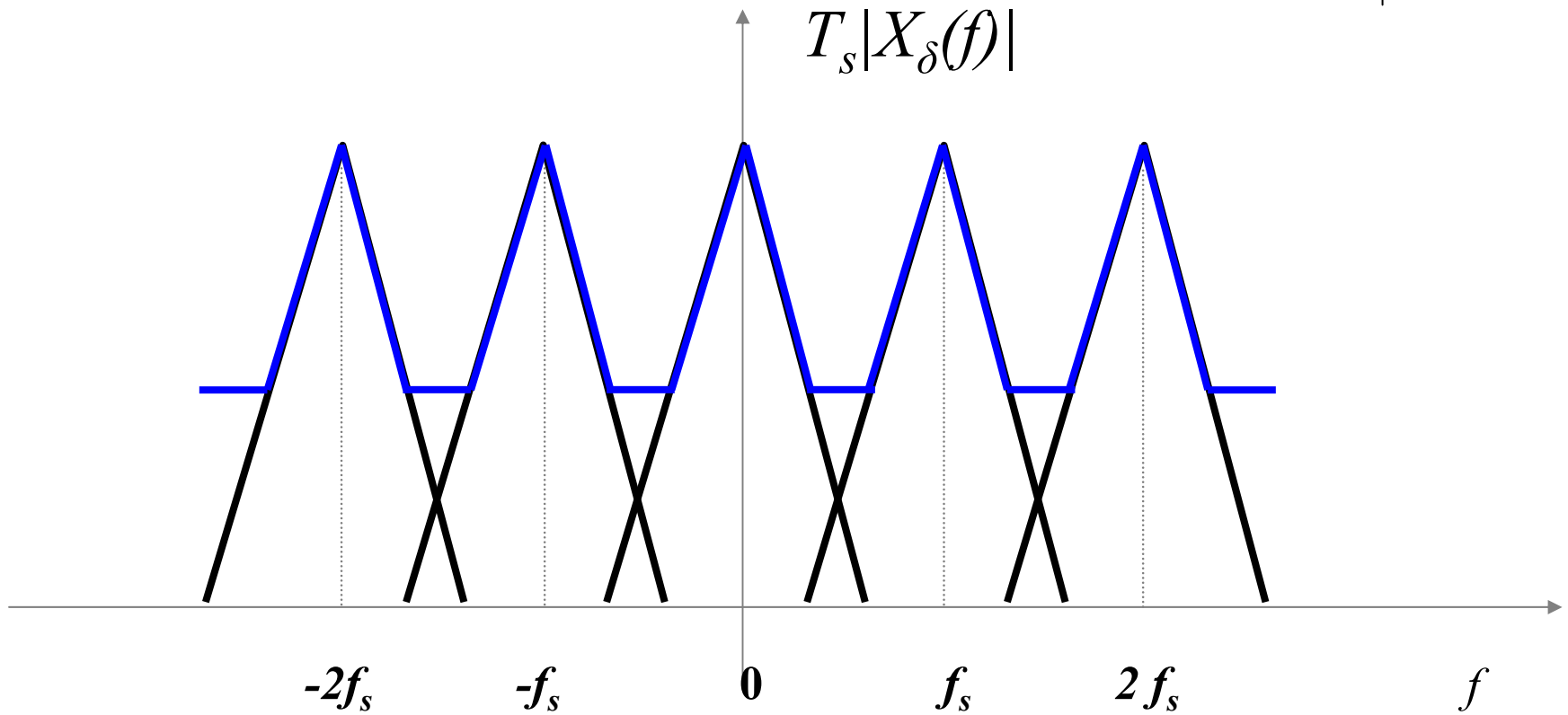
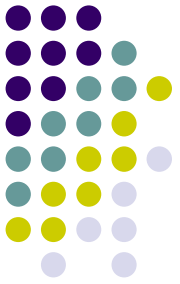




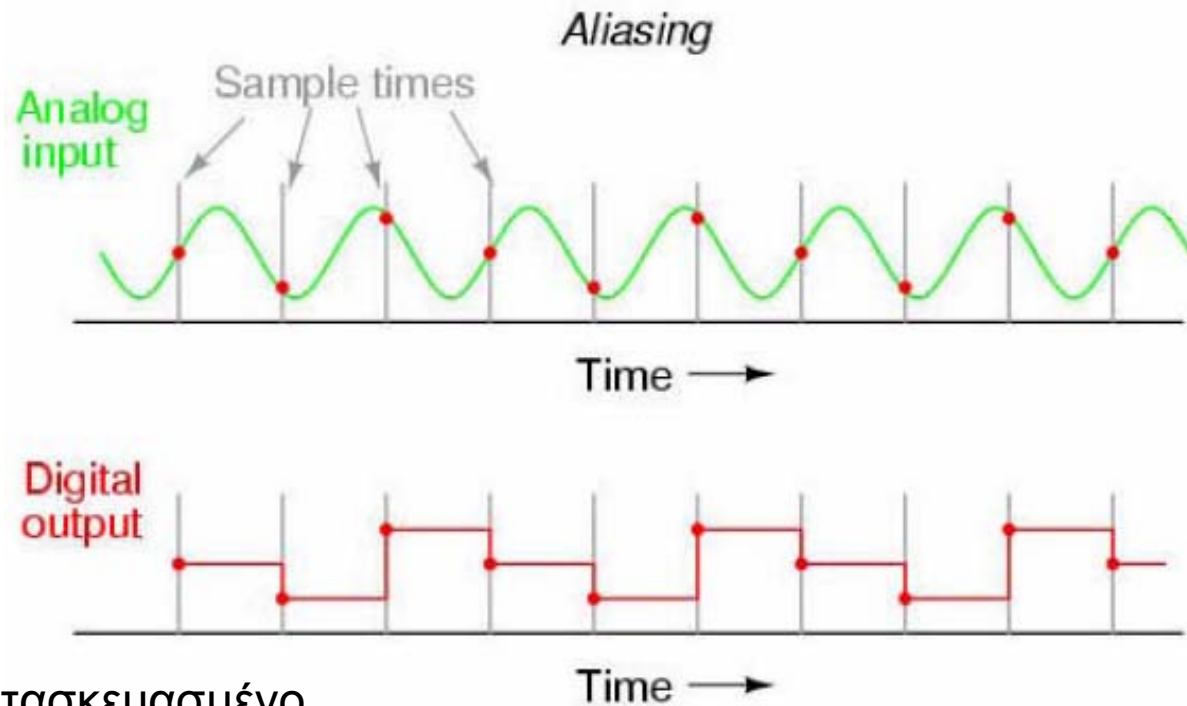
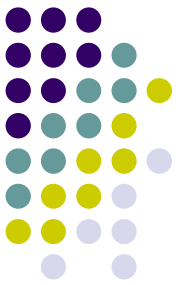
Περιοδικότητα φάσματος

- Η δειγματοληψία αντιγράφει το φάσμα του αρχικού σήματος στα **ακέραια** πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας
- Εάν η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s \geq 2W$, τότε το αρχικό σήμα μπορεί να ληφθεί με διάβαση μέσω βαθυπερατού φίλτρου
- Εάν $f_s < 2W$ εμφανίζεται παραλλαγή (aliasing), δηλαδή, αναδίπλωση του φάσματος

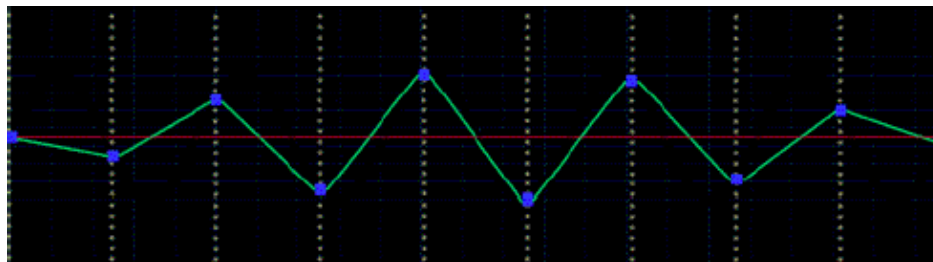
Παραλλαγή

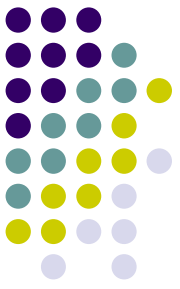


Παραλλαγή



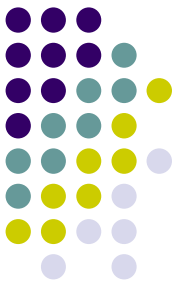
Ανακατασκευασμένο
σήμα





Παραλλαγή

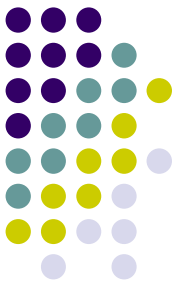
- Στη δειγματοληψία σημάτων μουσικής και βίντεο το φαινόμενο της παραλλαγής πρέπει να αποφευχθεί
 - Εάν το μουσικό τμήμα περιέχει υψηλές συχνότητες που δεν γίνονται ακουστές, μετά τη δειγματοληψία αυτές θα ακουστούν ως χαμηλές συχνότητες
 - Ανάγκη για φίλτρο αντι-παραλλαγής (anti-aliasing)
 - Στο βίντεο ή κινηματογράφο εμφανίζεται ως το φαινόμενο της αργά ή αντίστροφα κινούμενης ρόδας



Παραλλαγή

- Τα προηγούμενα παραδείγματα αφορούν τη χρονική εκδοχή της παραλλαγής
- Στη χωρική εκδοχή της εμφανίζεται στις ψηφιακές φωτογραφίες και είναι γνωστή ως μορφές Moiré
 - Ανάγκη για φίλτρο αντι-παραλλαγής (anti-aliasing)





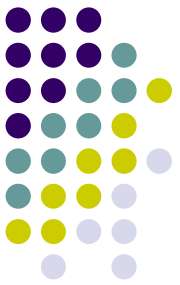
Ανάκτηση του σήματος

- Τα δείγματα του σήματος αρκούν για την ανακατασκευή του
 - Είναι οι συντελεστές Fourier του περιοδικού φάσματος

$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \Rightarrow$$

$$X_{\delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \exp(-j2\pi n f T_s) \Rightarrow$$

$$x(nT_s) = T_s \int_0^{1/T_s} X_{\delta}(f) \exp(jn2\pi f T_s) df$$

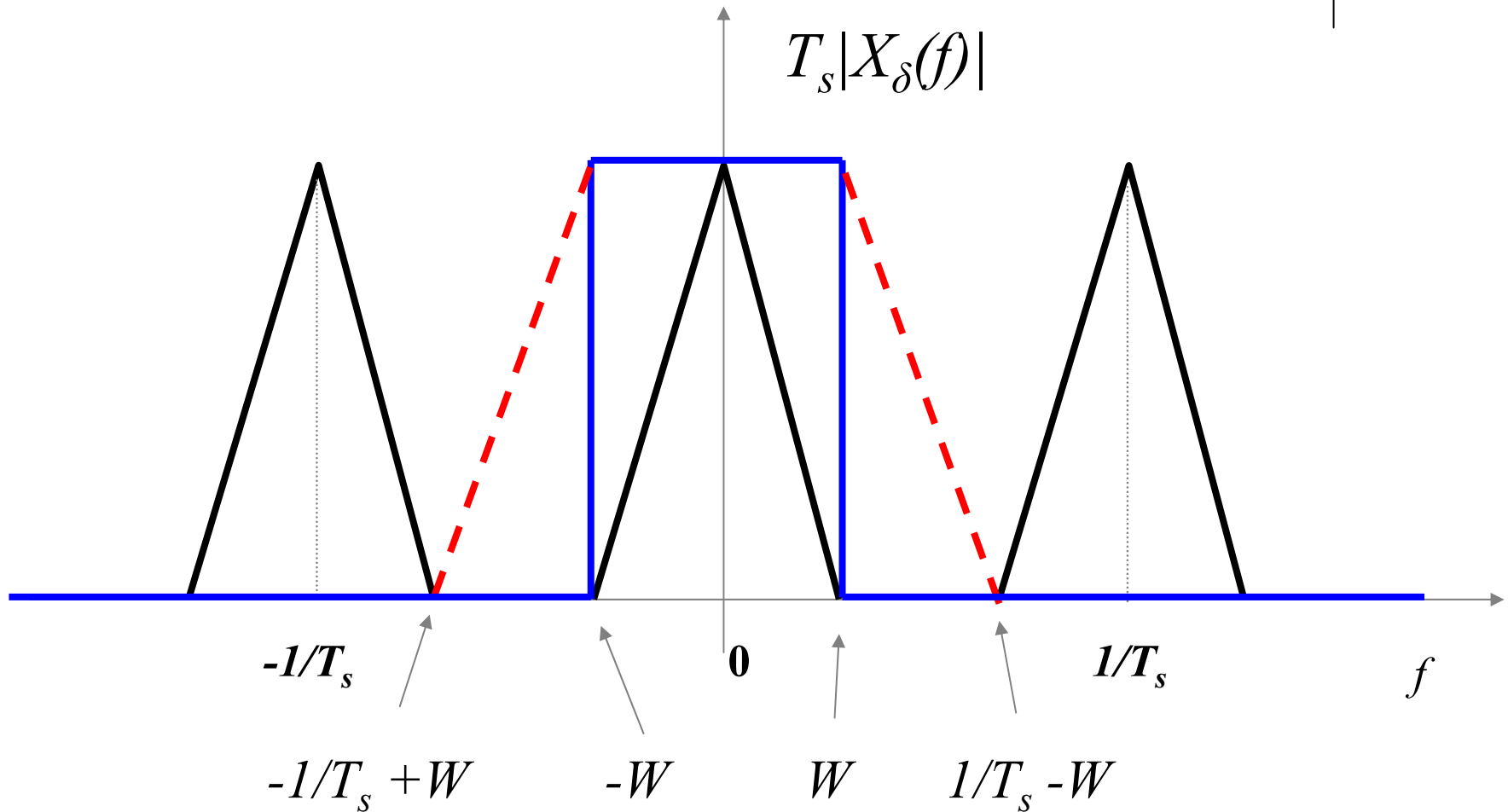
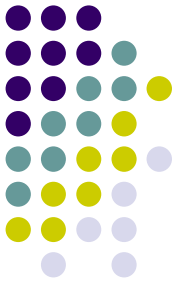


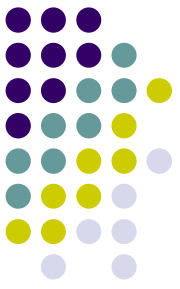
Ανάκτηση του σήματος

- Εάν $T_s \leq 1/2W$ το αρχικό σήμα είναι η έξοδος οποιουδήποτε βαθυπερατού φίλτρου, όπου

$$H(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq W \\ 0 & |f| \geq \frac{1}{T_s} - W \\ ? & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ιδανικό φίλτρο ανάκτησης

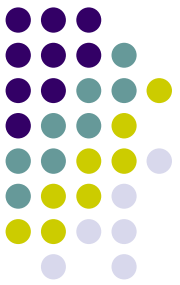




Ανάκτηση του σήματος

- Έστω βαθυπερατό φίλτρο ανάκτησης εύρους ζώνης B , όπου $W \leq B \leq f_s - W$ τότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df = \int_{-B}^B T_s X_{\delta}(f) \exp(j2\pi ft) df \\ &= T_s \int_{-B}^B \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \exp(-j2\pi n f T_s) \exp(j2\pi ft) df \\ &= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-B}^B \exp[j2\pi f(t - nT_s)] df \\ &= 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \operatorname{sinc}[2B(t - nT_s)] \end{aligned}$$



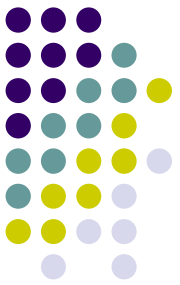
Ανάκτηση του σήματος

- Για το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο ανάκτησης εύρους ζώνης W και $T_s = 1/2W$

$$x(t) = 2WT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}[2W(t - nT_s)]$$

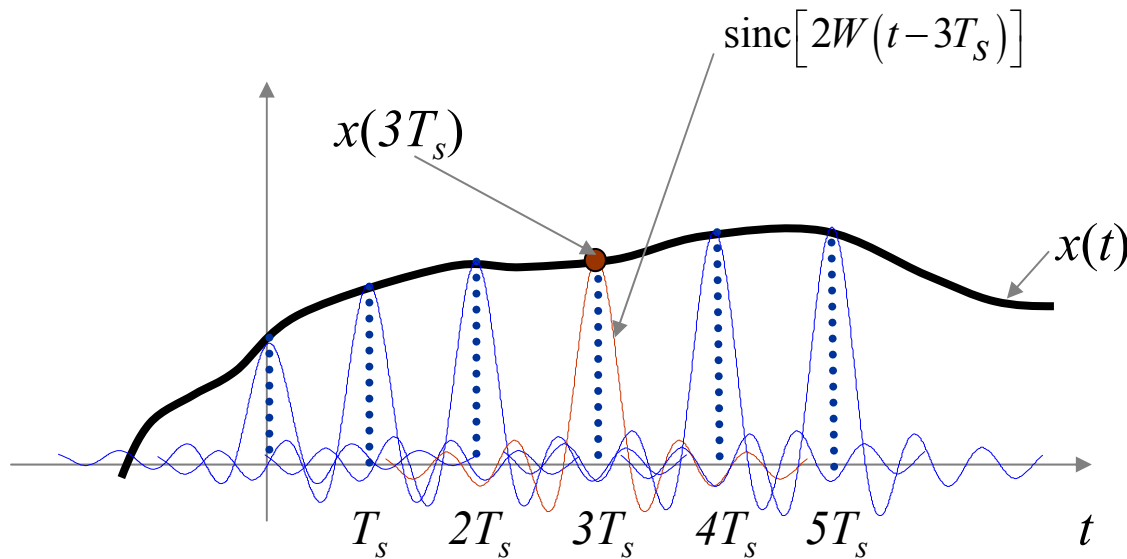
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}(f_s t - n)$$

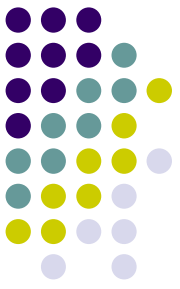


Τι σημαίνει αυτό;

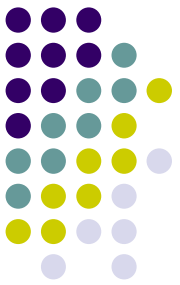
- Μπορούμε να λάβουμε το αρχικό σήμα χωρίς λάθη αθροίζοντας καθυστερημένες εκδοχές συναρτήσεων sinc με βάρη τα δείγματα



Πρακτικά θέματα δειγματοληψίας

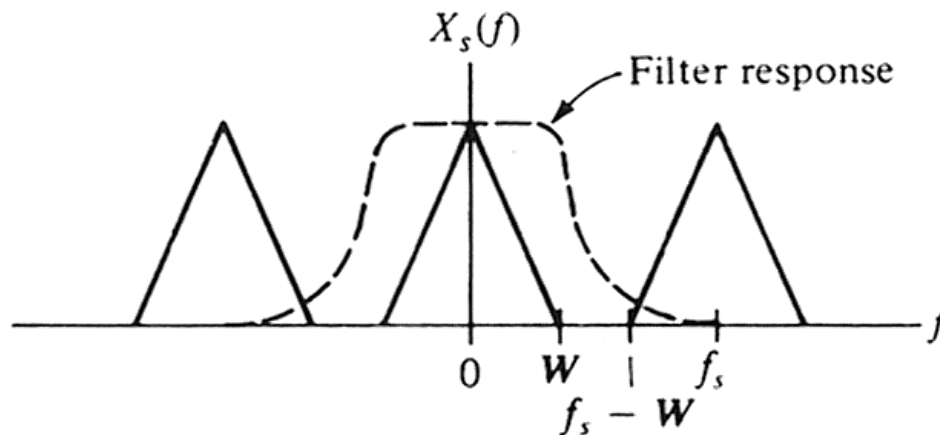


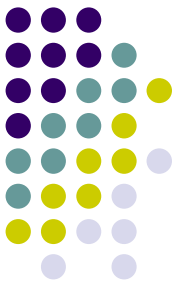
- Η συνάρτηση δειγματοληψίας αποτελείται από παλμούς πεπερασμένου πλάτους και διάρκειας αντί κρουστικές συναρτήσεις
 - Οδηγεί σε ποικίλα συστήματα διαμόρφωσης
- Το σήμα είναι χρονικά πεπερασμένο, άρα το φάσμα του δεν μπορεί να είναι βαθυπερατό
- Το φίλτρο ανάκτησης δεν είναι ιδανικό



Μη ιδανικό φίλτρο ανάκτησης

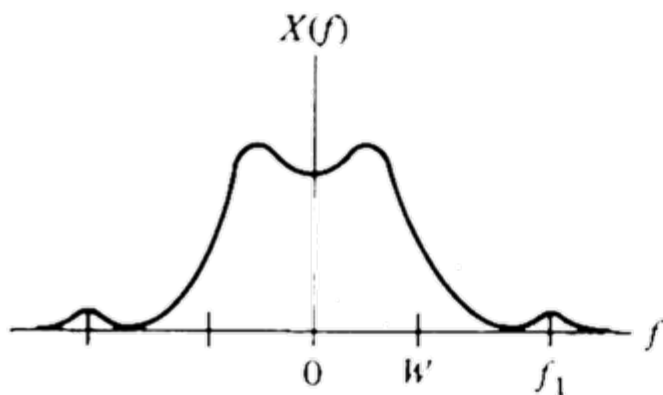
- Οι ανεπιθύμητες συχνότητες που περνούν από το φίλτρο εμφανίζονται ως υψίσυχνος θόρυβος



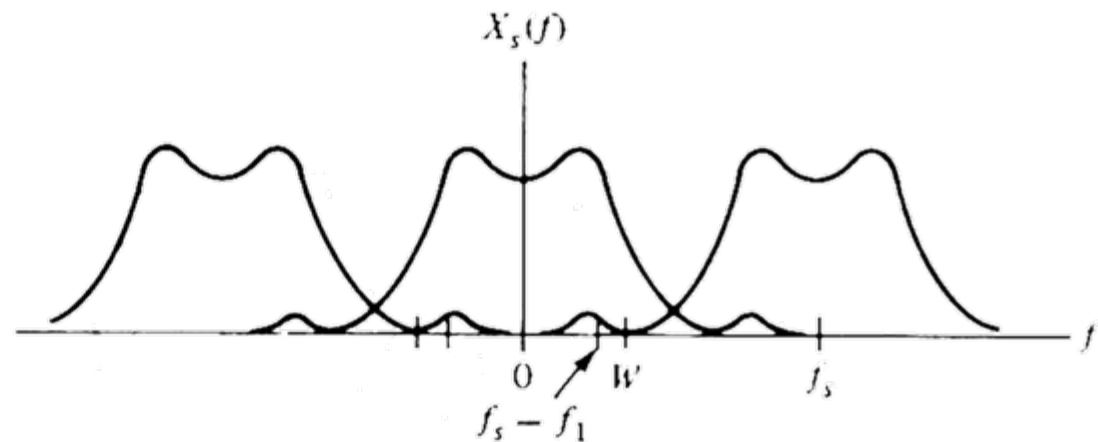


Χρονικά πεπερασμένο σήμα

- Οδηγεί σε παραλλαγή (aliasing), δηλαδή, αναδίπλωση του φάσματος
- Υψηλές συχνότητες εμφανίζονται ως χαμηλότερες συχνότητες

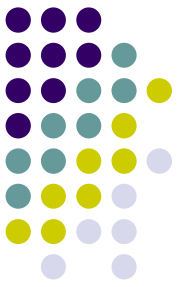


(a)



(b)

Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων



- Ζωνοπερατό σήμα εύρους ζώνης W με συχνότητες στην περιοχή από f_L έως f_H ($0 < f_L < f_H$, $W = f_H - f_L$) μπορεί να ανακτηθεί από δείγματα που λαμβάνονται με ρυθμό

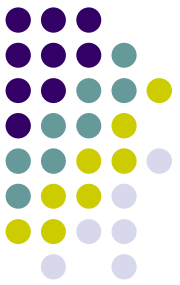
$$\frac{2f_H}{n+1} < f_s < \frac{2f_L}{n}$$

- όπου $n = 0, 1, \dots$ ακέραιος τέτοιος ώστε $n < \frac{f_L}{W}$

- και το φίλτρο ανάκτησης έχει κρουστική απόκριση

$$(n+1) \operatorname{sinc}\left(\frac{(n+1)t}{T_s}\right) - n \operatorname{sinc}\left(\frac{nt}{T_s}\right)$$

Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων

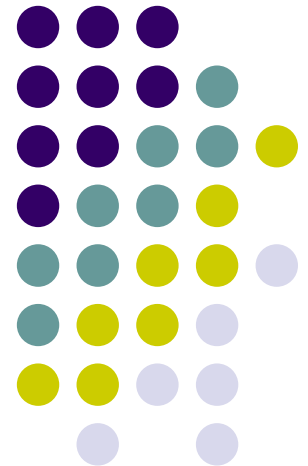


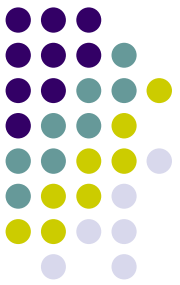
- Παράδειγμα, στη ραδιοφωνία FM έχουμε $f_L = 88$ MHz, $f_H = 108$ MHz, $W = 20$ MHz, οπότε

$$n < 4,4 = \frac{88}{20}$$

- Για $n=4$, $43,2 \text{ MHz} < f_s < 44 \text{ MHz}$
- Για $n=3$, $54 \text{ MHz} < f_s < 58,67 \text{ MHz}$
- Για $n=2$, $72 \text{ MHz} < f_s < 88 \text{ MHz}$
- Για $n=1$, $108 \text{ MHz} < f_s < 176 \text{ MHz}$
- Για $n=0$, $216 \text{ MHz} < f_s$ (ρυθμός Nyquist)

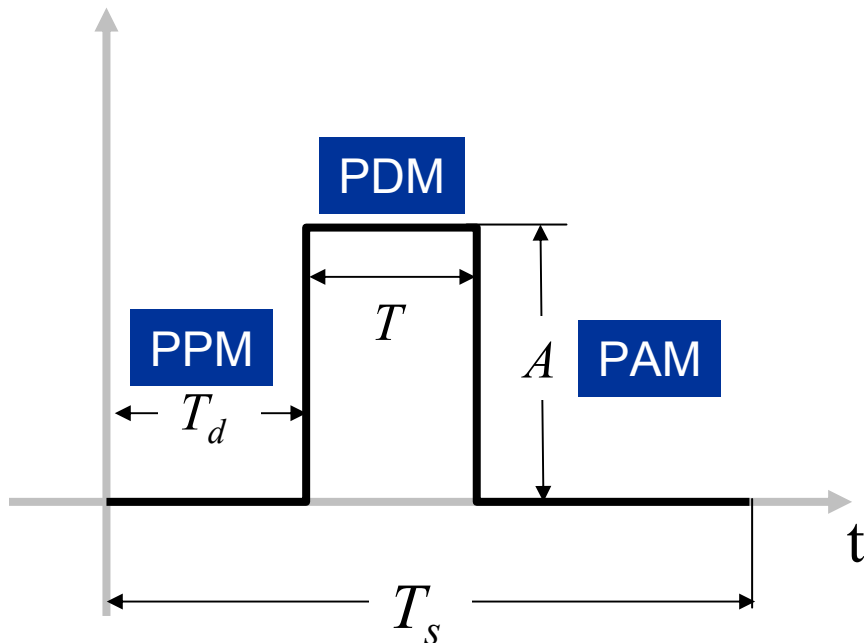
Συστήματα διαμόρφωσης παλμών



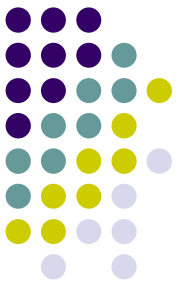


Είδη διαμόρφωσης παλμών

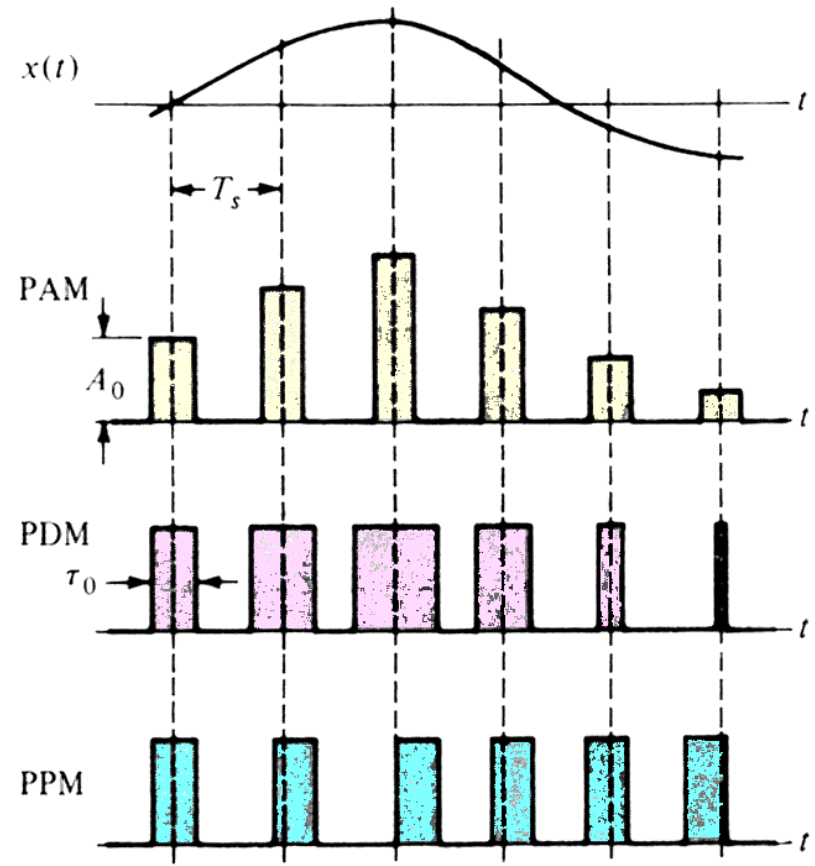
- Pulse Amplitude Modulation (PAM): $A \propto m(t)$
- Pulse Position Modulation (PPM): $T_d \propto m(t)$
- Pulse Duration Modulation (PDM): $T \propto m(t)$



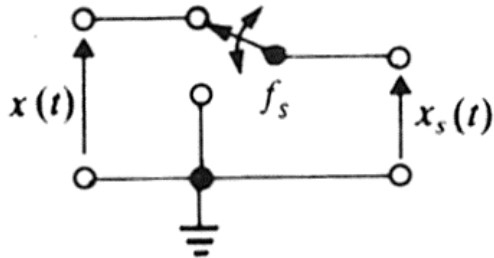
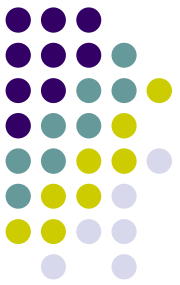
Διαμόρφωση παλμών



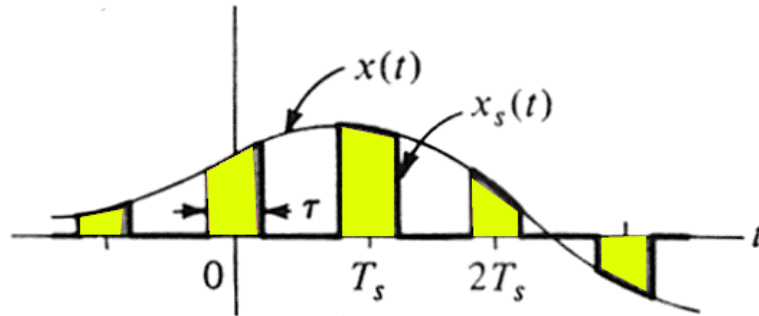
- Η διαμόρφωση πλάτους παλμών (PAM) παράγεται από τεμαχιστή (chopper)
- Συχνά χρησιμοποιείται κύκλωμα sample-and-hold με αποτέλεσμα παλμούς επίπεδης κορυφής



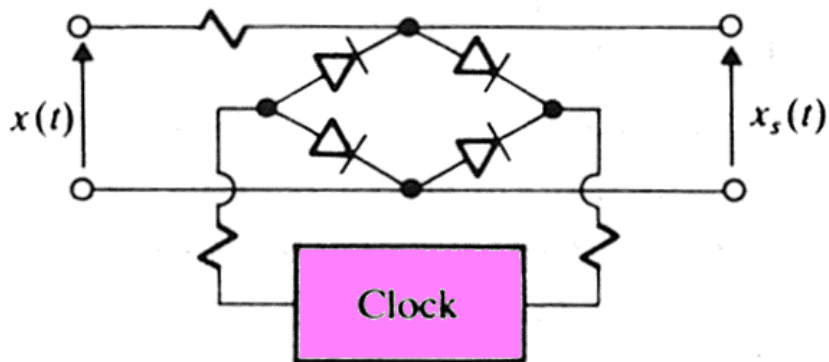
Τεμαχιστής (chopper)



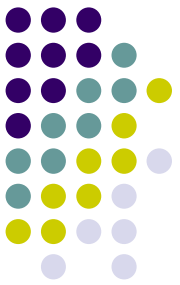
(a)



(b)

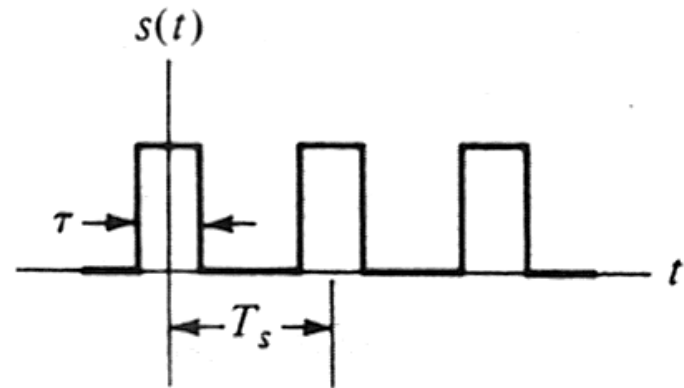
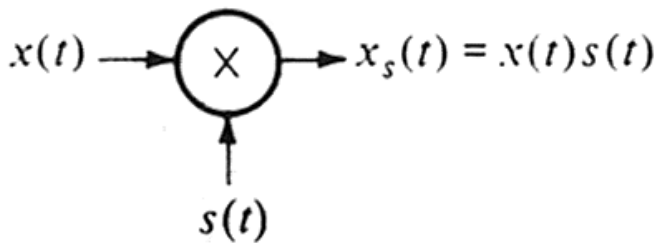


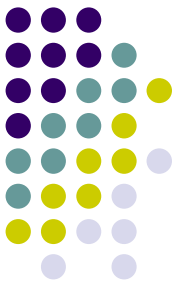
(c)



Παραγωγή PAM

- Το διαμορφωμένο σήμα PAM είναι το γινόμενο του σήματος επί τη συνάρτηση δειγματοληψίας (σειρά παλμών)





Φάσμα PAM

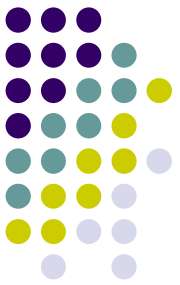
- Εάν το σήμα είναι βαθυπερατό, τότε μπορεί να ανακτηθεί από το διαμορφωμένο σήμα PAM

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

$$s(t) = \tau f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(nf_s \tau) \exp(jn2\pi f_s t) \Rightarrow$$

$$x_s(t) = \tau f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(nf_s \tau) \exp(jn2\pi f_s t) x(t) \Rightarrow$$

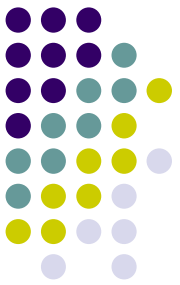
$$X_s(f) = \tau f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(nf_s \tau) X(f - nf_s)$$



Φάσμα PAM

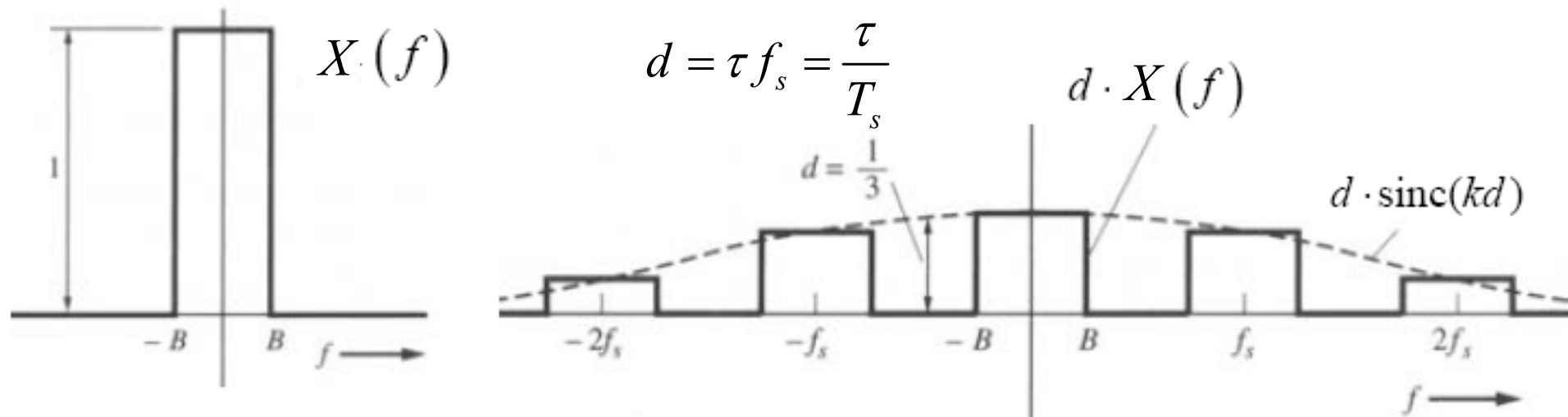
- Το αποτέλεσμα της πεπερασμένης διάρκειας παλμού είναι ο πολλαπλασιασμός του n -στου λοβού με $d \operatorname{sinc}(nd)$
- όπου η σταθερά d είναι ο κύκλος εργασίας (duty cycle) του παλμού

$$d = \tau f_s = \frac{\tau}{T_s}$$

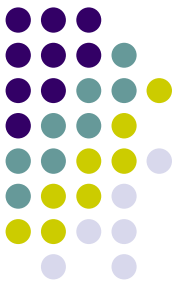


Φάσμα ΡΑΜ

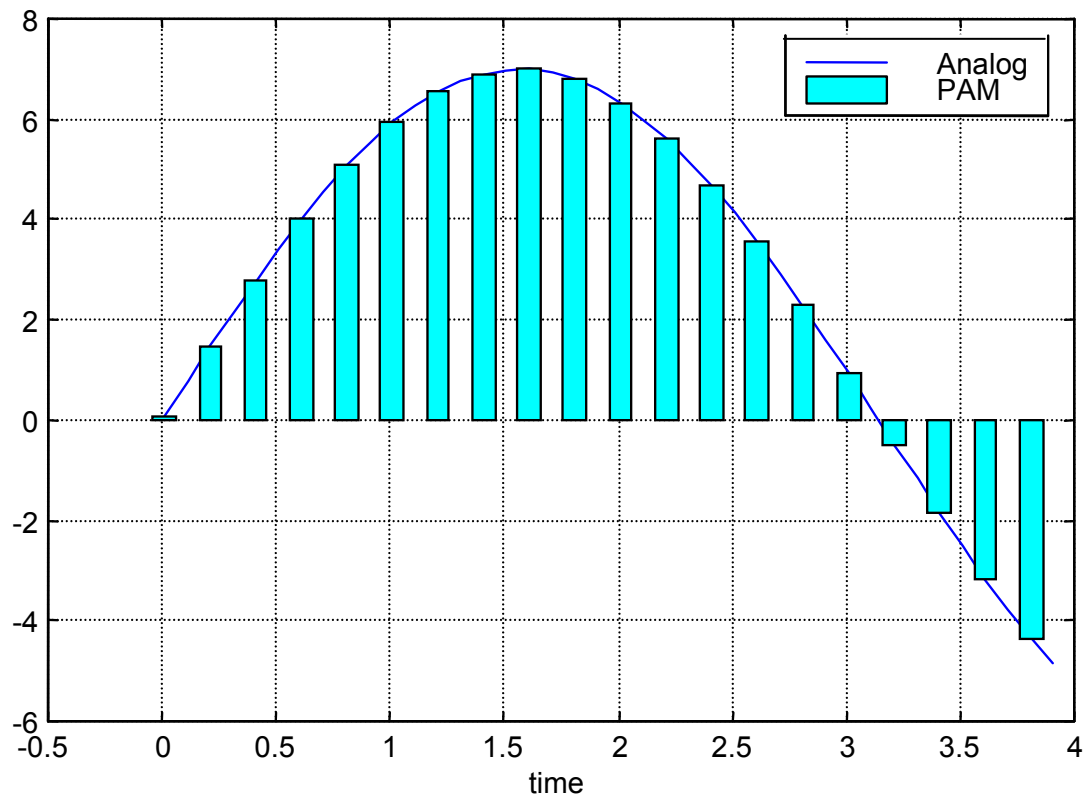
- Ο πρώτος όρος είναι το φάσμα του σήματος, πολλαπλασιασμένο με d , άρα με διάβαση από βαθυπερατό φίλτρο ανακτάμε το σήμα



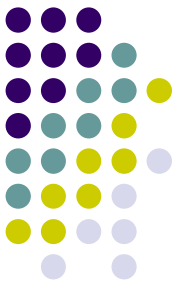
Δείγματα με επίπεδη κορυφή



- flat top sampling



ΡΑΜ και δείγματα με επίπεδη κορυφή



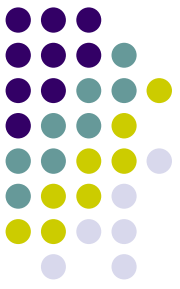
$$x_p(t) = \sum_n x(nT_s) p(t - nT_s)$$

$$x_p(t) = p(t) \otimes \left[\sum_n x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right]$$

$$x_p(t) = p(t) \otimes x_\delta(t) \Rightarrow$$

$$X_p(f) = P(f) X_\delta(f)$$

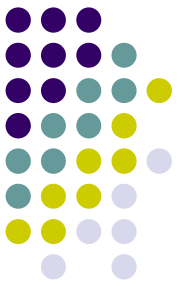
Φάσμα PAM με δείγματα επίπεδης κορυφής



- Το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας με δείγματα επίπεδης κορυφής ισοδυναμεί με τη διάβαση του ιδανικού σήματος δειγματοληψίας μέσω φίλτρου $P(f)$
- Το $P(f)$ δρα ως βαθυπερατό φίλτρο που εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες του PAM
 - Φαινόμενο ανοίγματος (aperture effect)
- Το φαινόμενο ανοίγματος μπορεί να διορθωθεί με εξισωτή (equalizer)

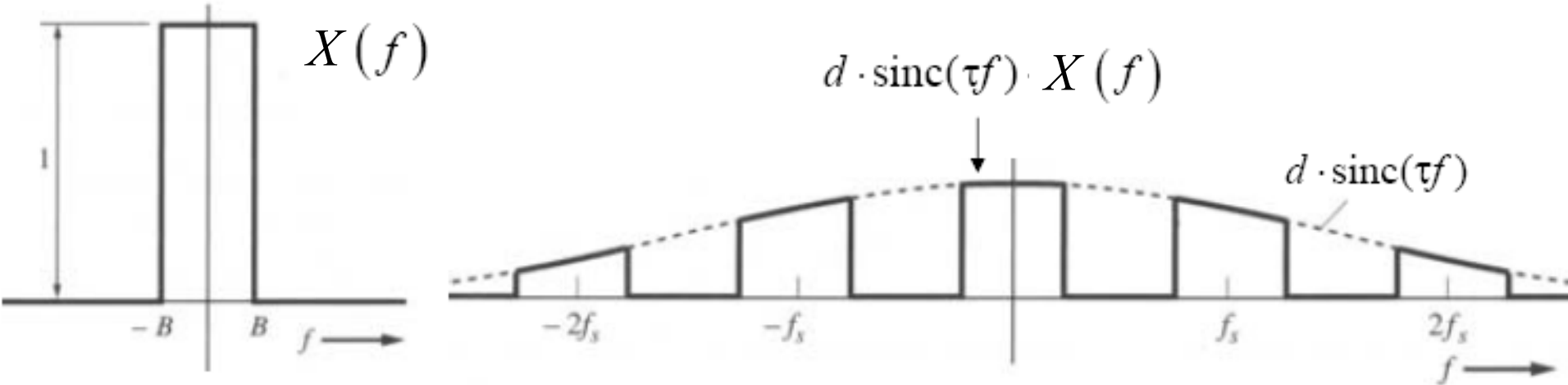
$$H_{eq}(f) = K \exp(-j2\pi f \tau_d) / P(f)$$

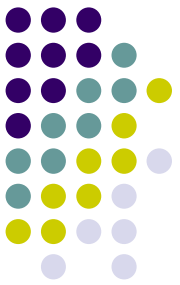
Φάσμα ΡΑΜ με δείγματα επίπεδης κορυφής



- Εάν ο κύκλος εργασίας είναι μικρός δεν απαιτείται σχεδόν καθόλου ισοστάθμιση

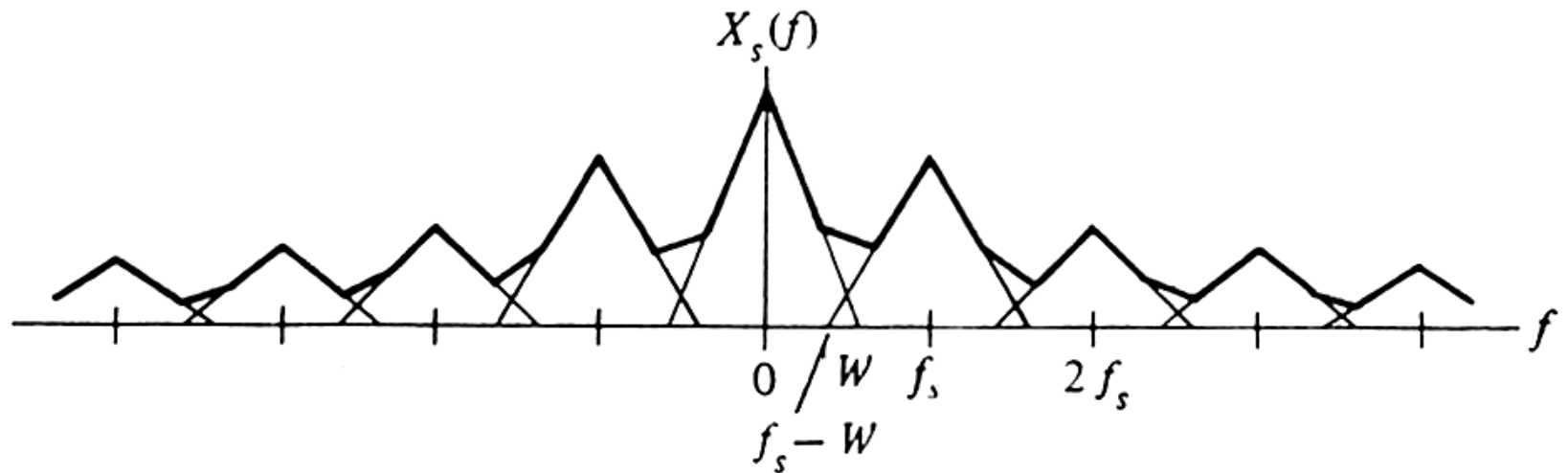
$$d = \frac{\tau}{T_s} \ll 1$$

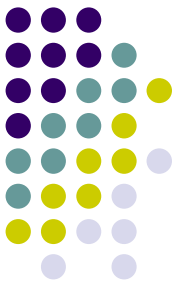




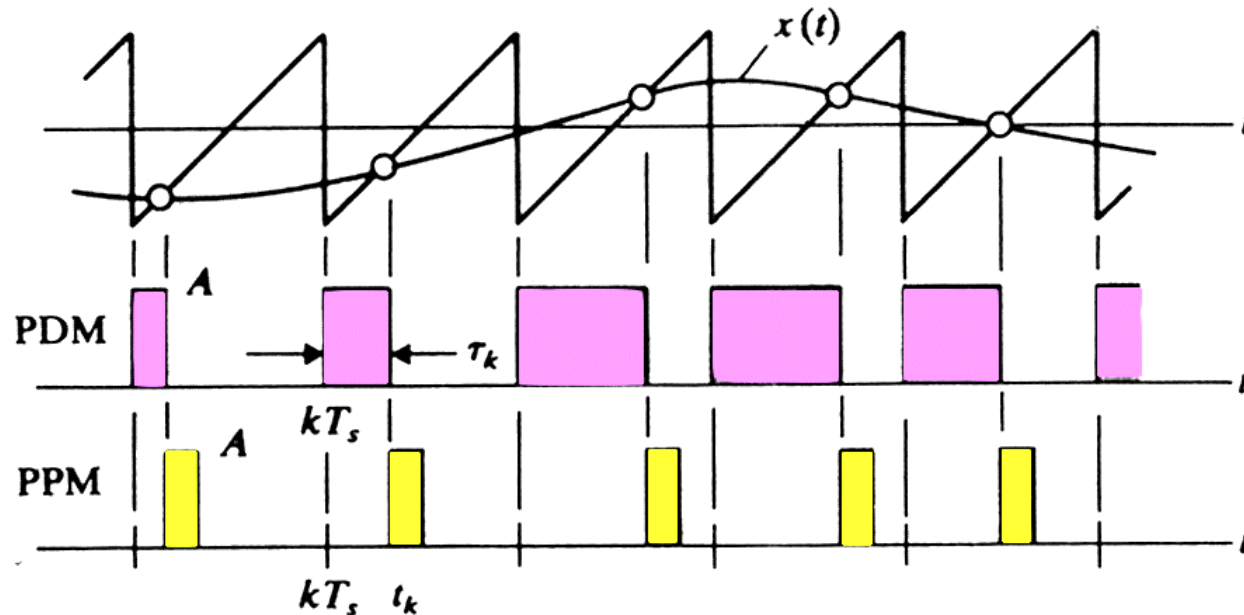
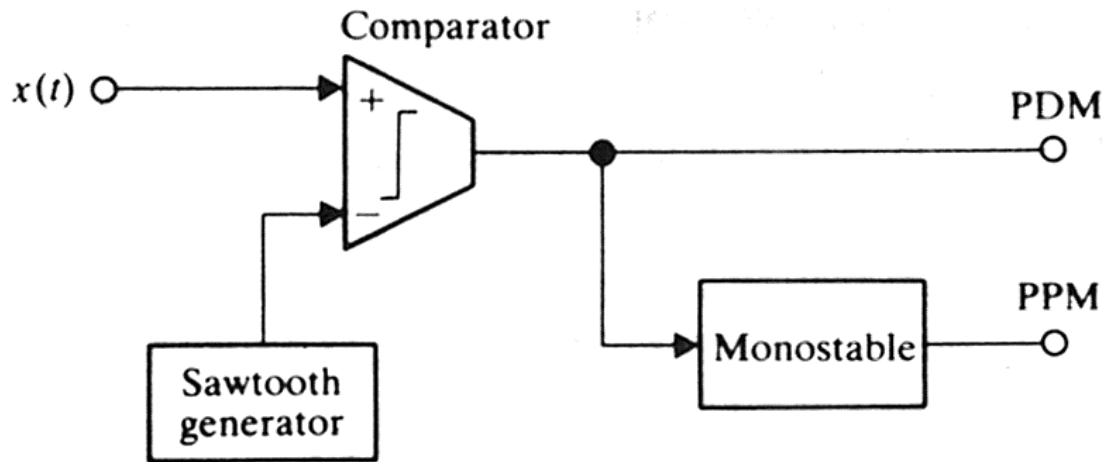
Ανάκτηση σήματος

- Εάν $T_s \leq 1/2W$ μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα με χρήση κατάλληλου φίλτρου
- Αλλιώς εμφανίζεται παραλλαγή

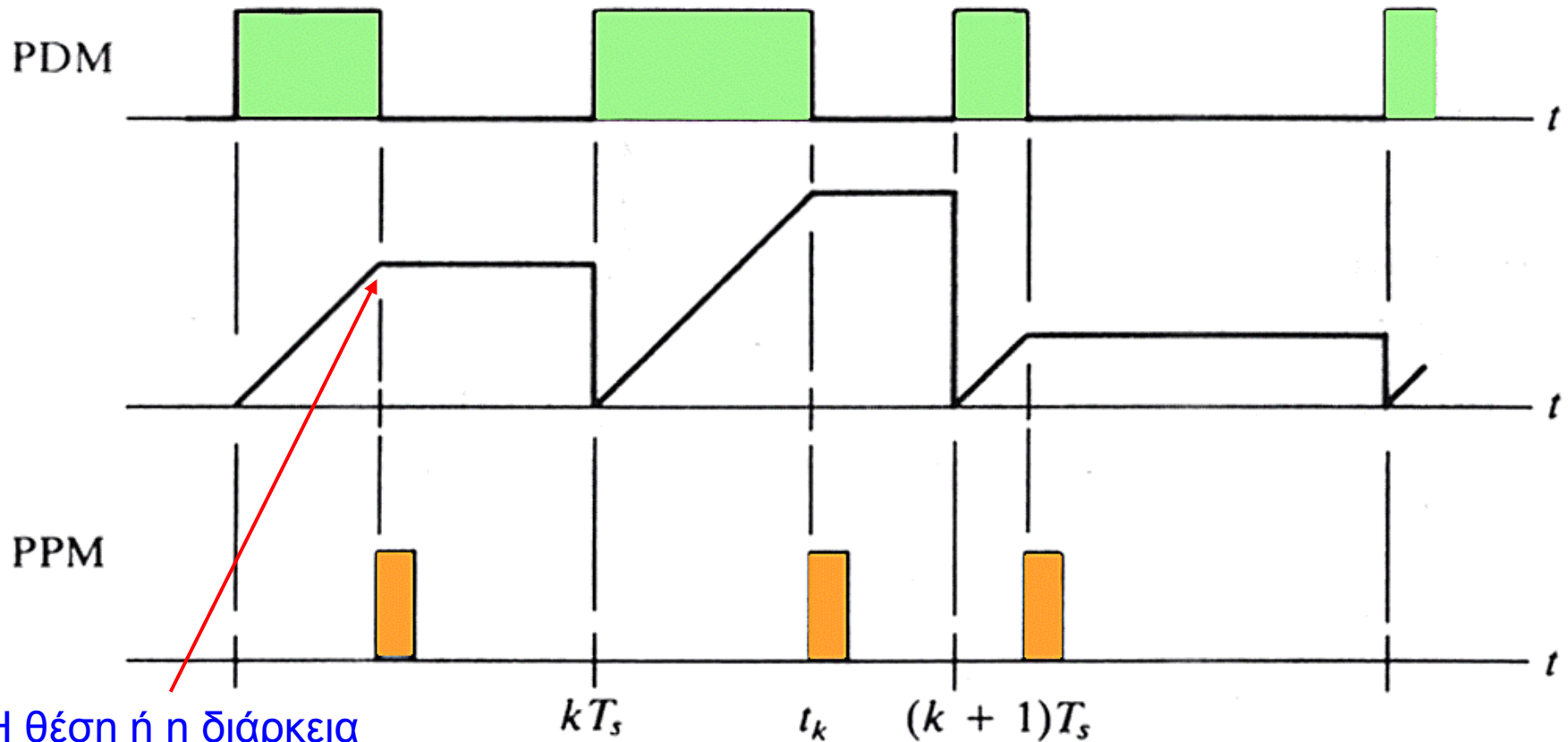
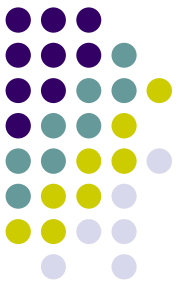




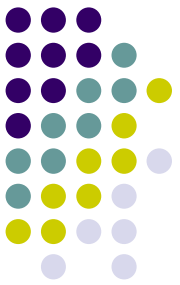
Παραγωγή PDM και PPM



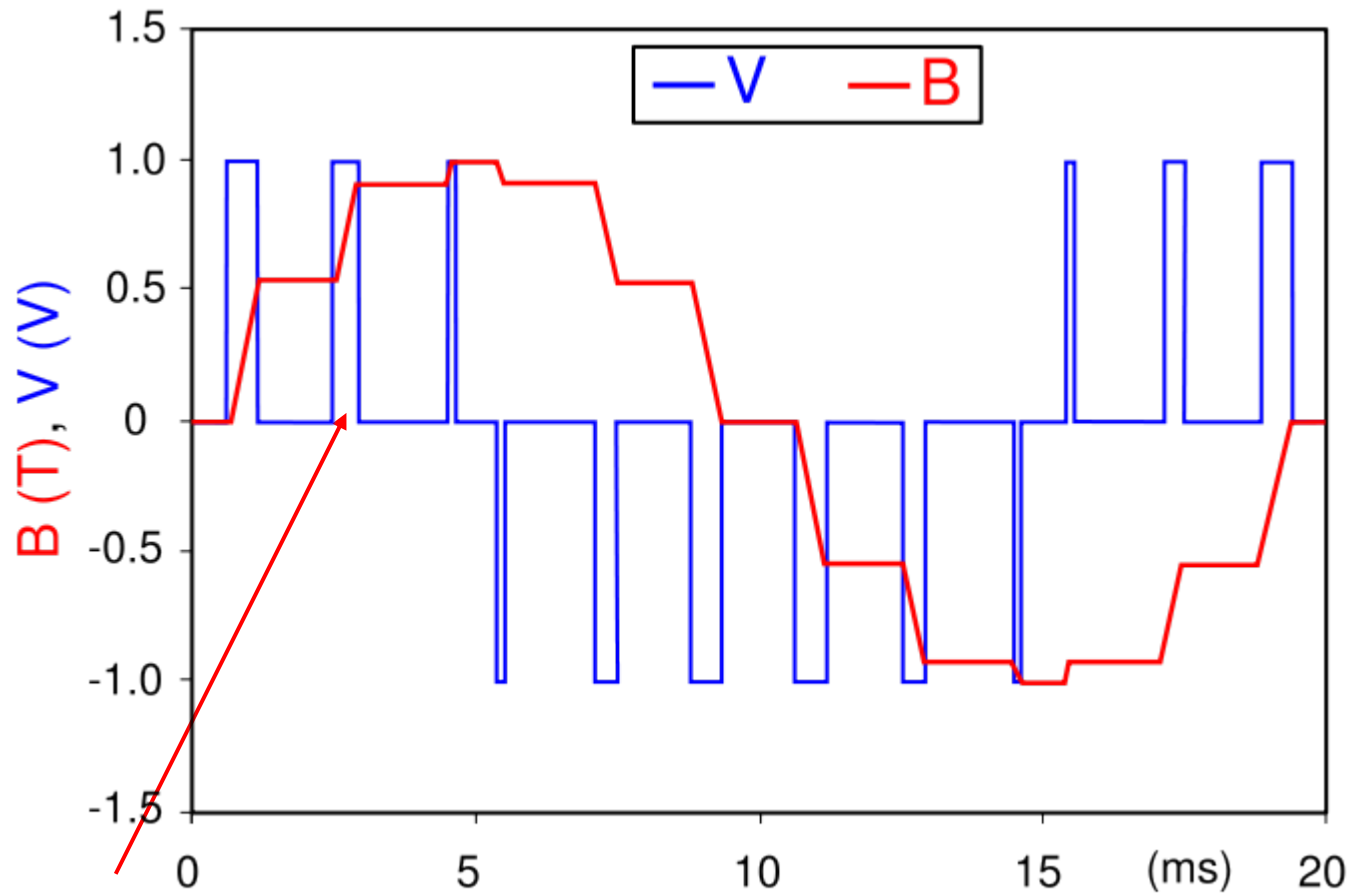
Μετατροπή PDM, PPM σε PAM



Η θέση ή η διάρκεια
προσδιορίζουν το
πλάτος

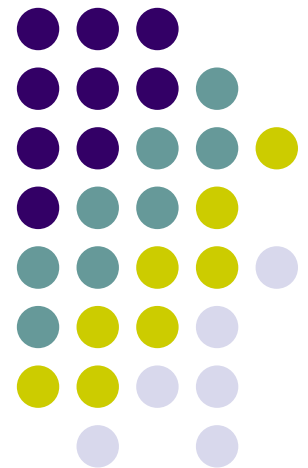


Παράδειγμα μετατροπής

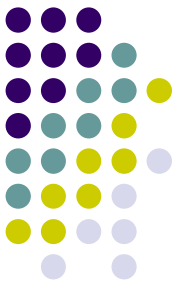


Η θέση ή η διάρκεια
προσδιορίζουν το
πλάτος

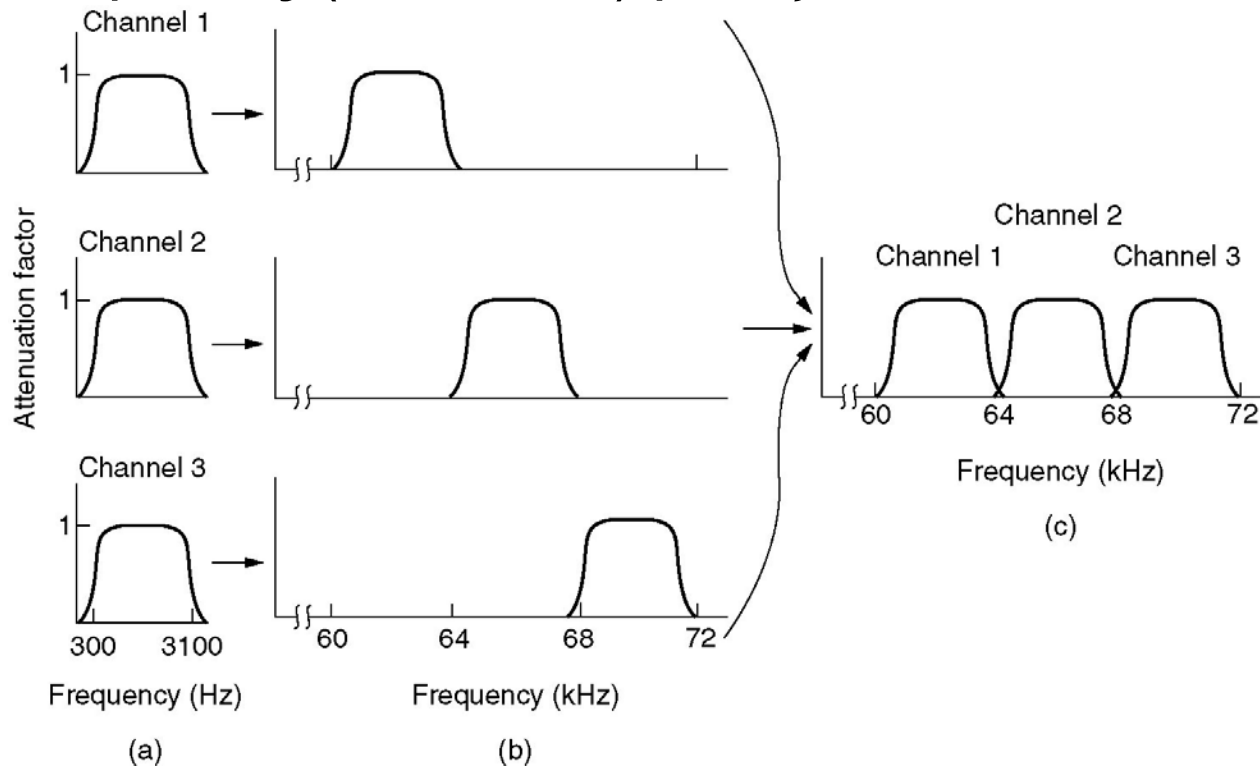
Παλμοκωδική διαμόρφωση



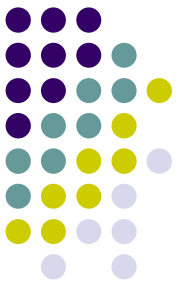
Frequency Division Multiplexing (FDM)



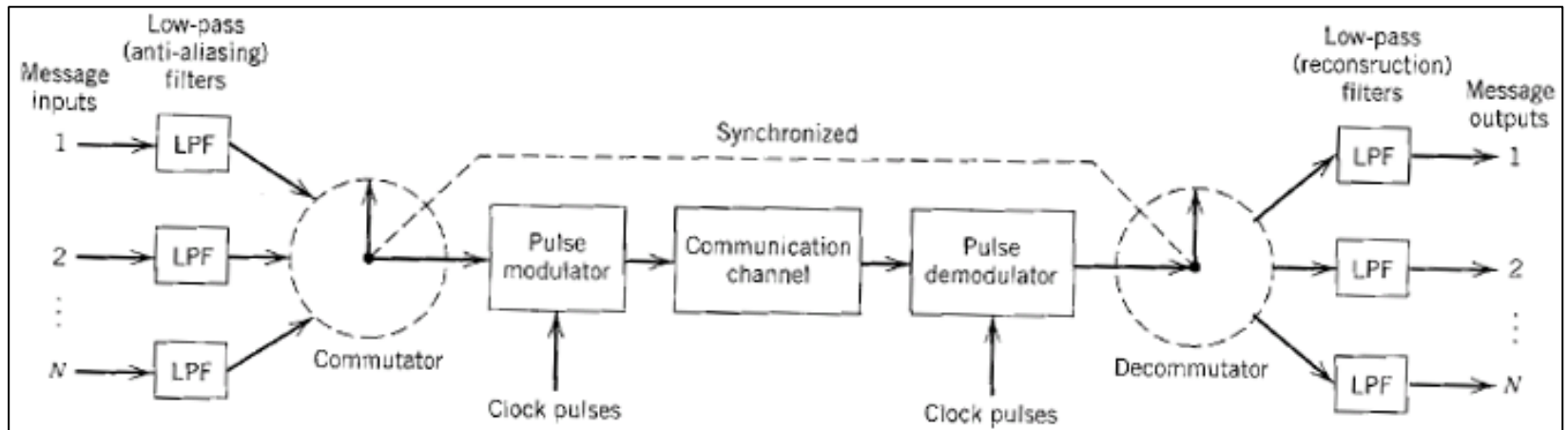
- Στις αναλογικές μεθόδους πολυπλεξίας συχνότητας, που χρησιμοποιήθηκαν στην τηλεφωνία (SSB-FDM), λόγω μη γραμμικοτήτων, εμφανίζεται το πρόβλημα της διαφωνίας (cross-talk) μεταξύ των καναλιών φωνής

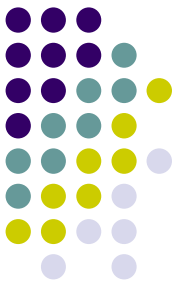


Time Division Multiplexing (TDM)



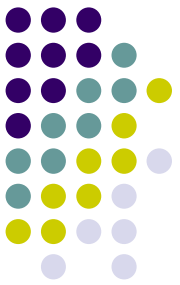
- Μια εναλλακτική μέθοδος είναι η πολυπλεξία το πεδίο του χρόνου (TDM)
- Ο δίαυλος μοιράζεται στα προς μετάδοση σήματα σε χρονική βάση
- Τα διαφορετικά σήματα μεταδίδονται δειγματοληπτημένα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές





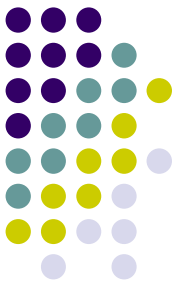
Συγχρονισμός

- Σε όλα τα συστήματα TDM πρέπει να υπάρχει συγχρονισμός μεταξύ πομπού και δέκτη!
- Διαφορετικά δεν θα ληφθούν τα σωστά σήματα



Pulse-code modulation (PCM)

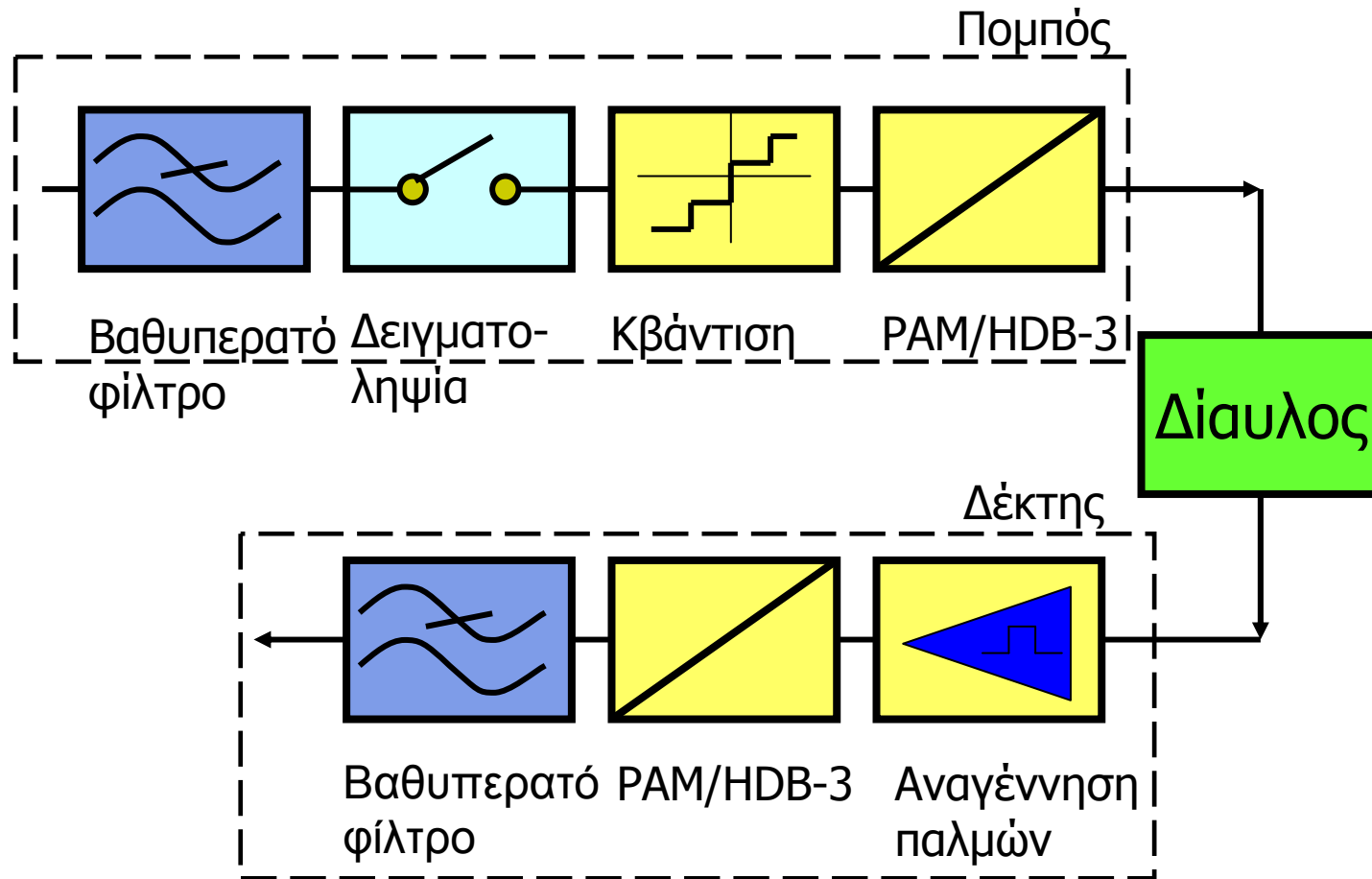
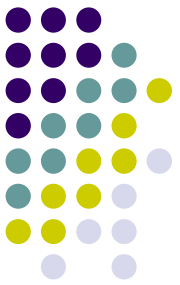
- Η PCM είναι ένας στοιχειώδης τρόπος διαμόρφωσης που **δεν** χρησιμοποιεί φέρον!
- Το μεταδιδόμενο (διαμορφωμένο) σήμα PCM είναι μια ψηφιακή αναπαράσταση του αναλογικού σήματος όπου το πλάτος του σήματος δειγματοληπτείται, κβαντίζεται και μεταδίδεται ως σειρά συμβόλων, συνήθως, δυαδικών (bit)
- Ο δέκτης από τους λαμβανόμενους παλμούς ανακτά τη ψηφιακή ακολουθία συμβόλων και ανακατασκευάζει το αναλογικό σήμα μέσω μετατροπέα D/A



Pulse-code modulation (PCM)

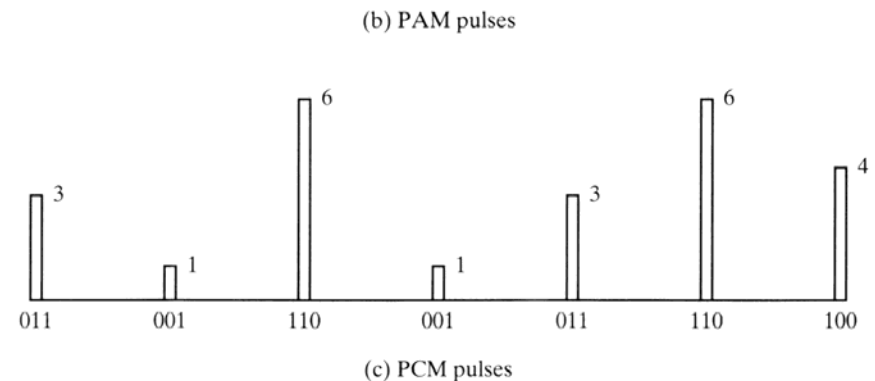
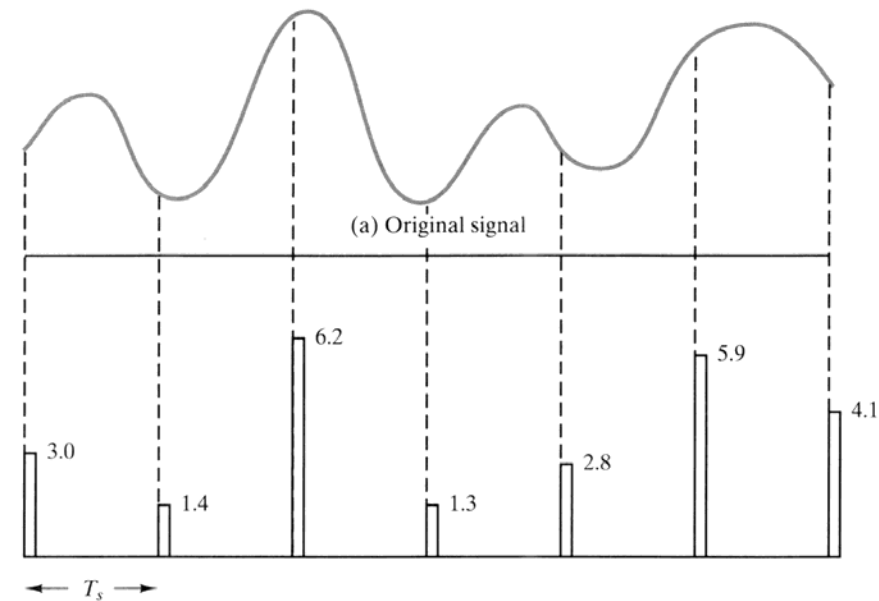
- Δοκιμάσθηκε για πρώτη φορά το 1948 στα Bell Labs για τη μετάδοση αναλογικού σήματος φωνής 4kHz ως ψηφιακού σήματος 64 kbps
- Σε συνδυασμό με TDM, η PCM άρχισε να χρησιμοποιείται στο τηλεφωνικό σύστημα
 - 1962 στις ΗΠΑ: 24 κανάλια φωνής σε φορέα 1,5 Mbps
 - 1969 στην Ευρώπη, 30 κανάλια φωνής σε φορέα 2 Mbps
- Η PCM διευκολύνει τη ψηφιακή μετάδοση από σημείο σε σημείο (σε σειρά ζεύξεων)
- Εκτός από την τηλεφωνία, η PCM χρησιμοποιείται στον ψηφιακό ήχο σε προσωπικούς υπολογιστές και στα CD (δεν συνηθίζεται στα DVD)

Pulse Code Modulation (PCM)



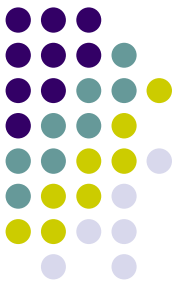
Κβάντιση

- Το σήμα έχει συνεχείς τιμές εντός της δυναμικής του περιοχής
- Το σήμα PAM έχει συνεχείς τιμές σε διακριτές χρονικές στιγμές
- Το κβαντισμένο σήμα PAM έχει πεπερασμένες τιμές (εδώ οι λέξεις 3 bit)



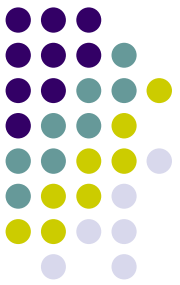
011001110001011110100

(d) PCM output



Συγχρονισμός

- Όπως σε όλα τα συστήματα TDM, απαιτείται συγχρονισμός μεταξύ πομπού και δέκτη
- Εάν τα ρολόγια στον πομπό και τον δέκτη διαφέρουν, αυτό θα οδηγήσει σε παραμορφώσεις του σήματος
- Στην PCM ο χρονισμός στον δέκτη εξάγεται από το λαμβανόμενο σήμα
 - Το φάσμα του συρμού των λαμβανόμενων παλμών περιέχει τη συχνότητα του ρολογιού

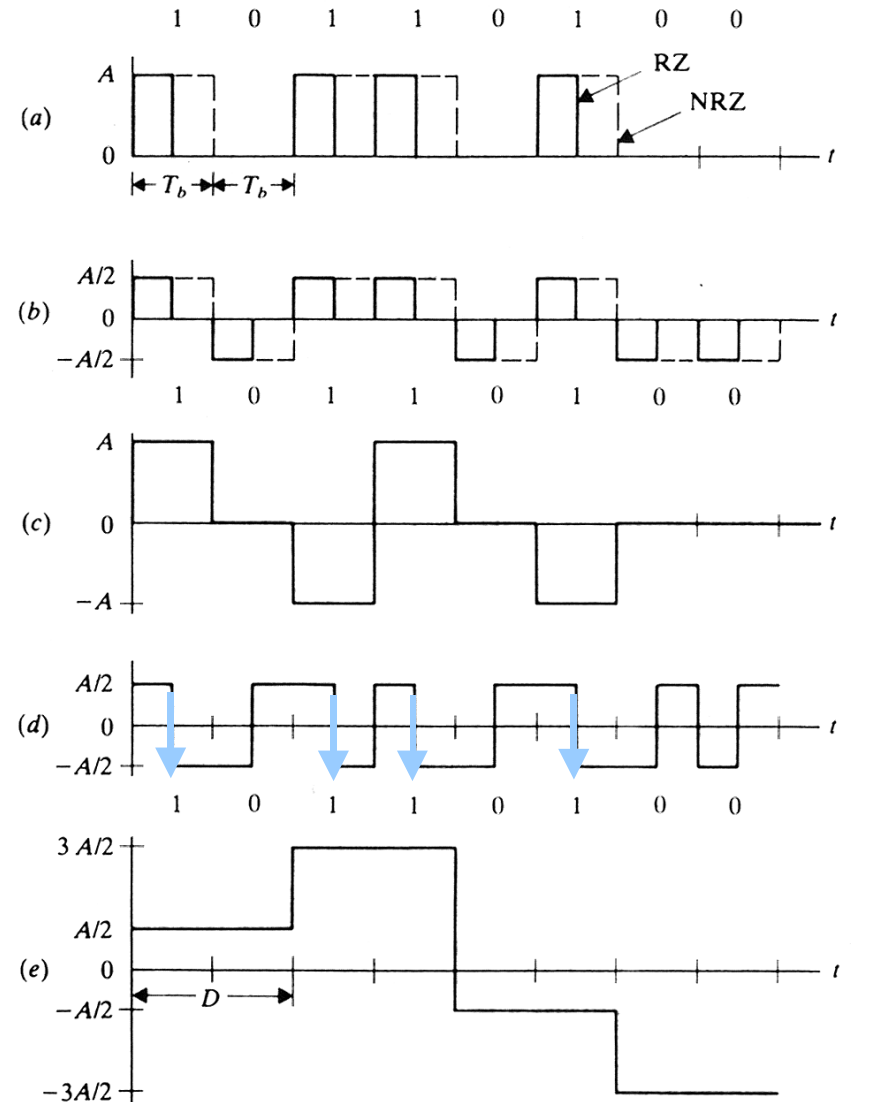


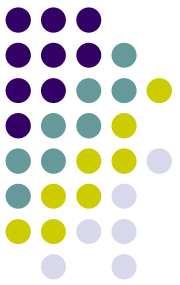
Κωδικοποίηση γραμμής

- Η κωδικοποίηση γραμμής χρησιμοποιείται για τη μετάδοση των ψηφιακών συμβόλων στη βασική ζώνη (baseband)
- Διευκολύνει την ανάκτηση του ρολογιού και τον συγχρονισμό του δέκτη
- Η κωδικοποίηση γραμμής πρέπει
 - να μην οδηγεί σε μακριές σειρές από μηδενικά, που θα αποσυγχρονίσουν τον δέκτη
 - να μη δημιουργεί συνιστώσα DC
 - να απαιτεί μικρό εύρος ζώνης

Κωδικοποίηση γραμμής

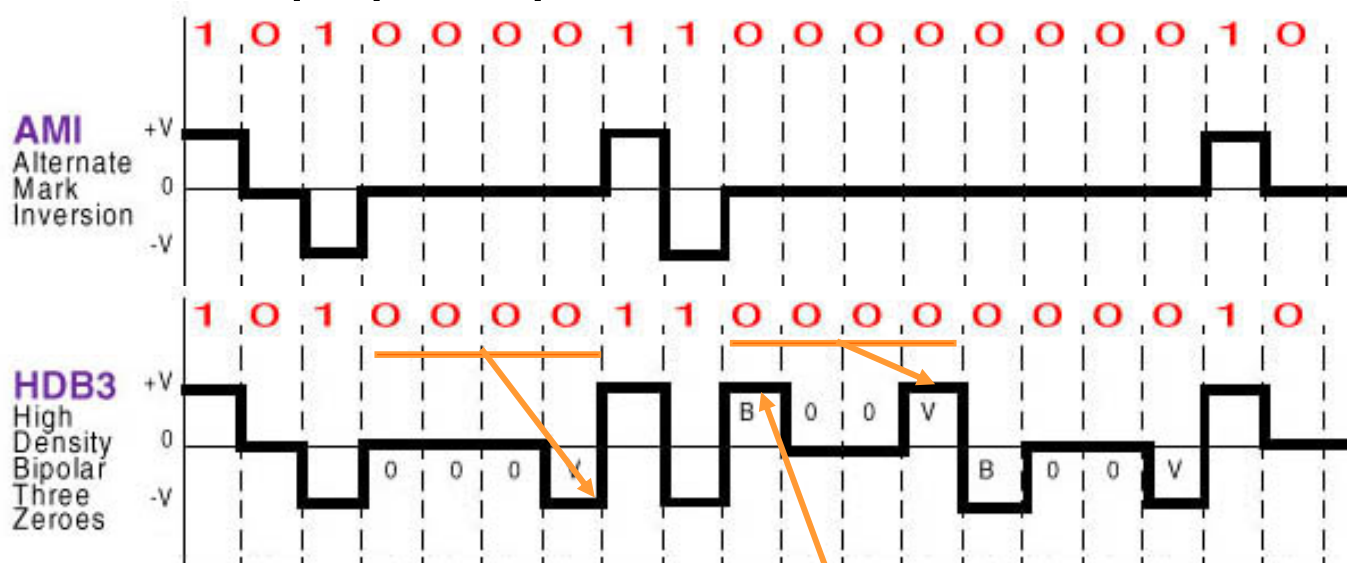
- Μονοπολική $[0, A]$
RZ, NRZ
- Πολική $[-A/2, A/2]$
RZ, NRZ
- Διπολική $[-A, 0, A]$
AMI
- Manchester
- Πολική τετραδική





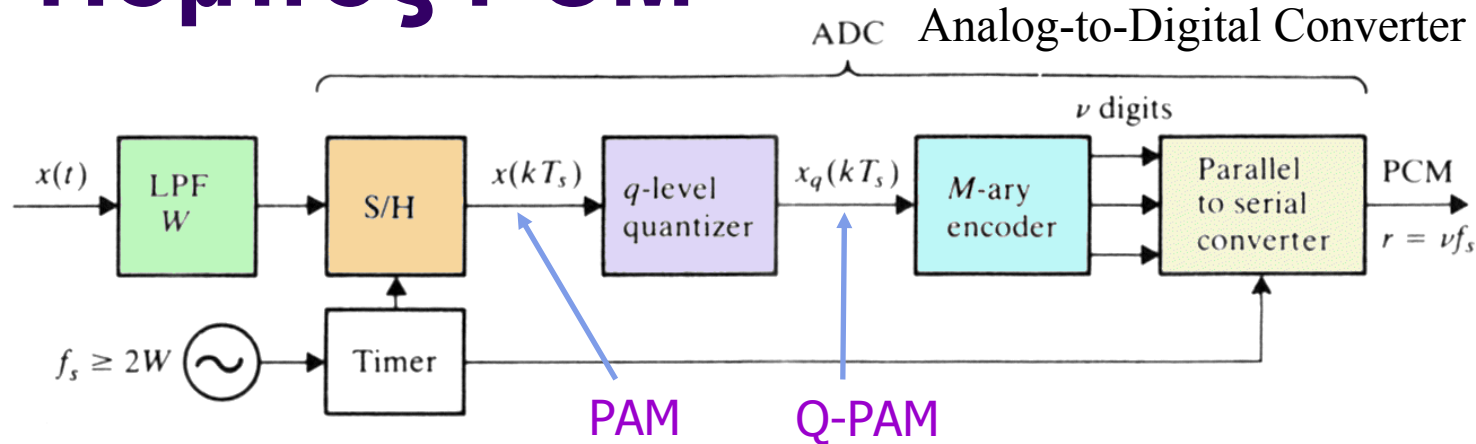
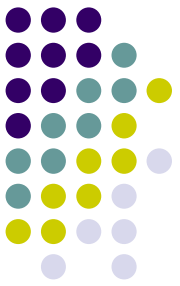
Κωδικοποίηση γραμμής

- High Density Bipolar (HDB3)
 - Τέσσερα συνεχόμενα 0 αντικαθίστανται από τρία 0 και παραβίαση κώδικα ή αντιστάθμιση, δύο 0 και παραβίαση κώδικα

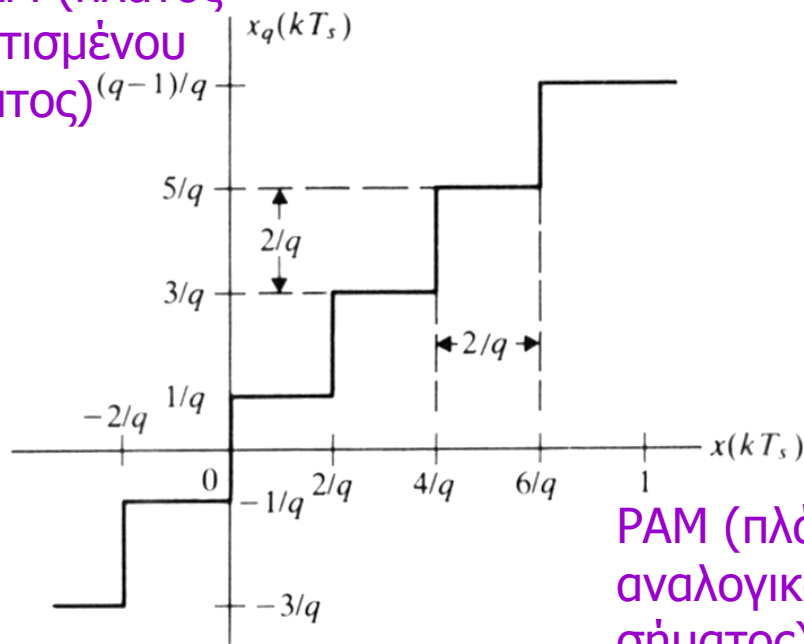


Παλμός
αντιστάθμισης

Πομπός PCM



Q-PAM (πλάτος κβαντισμένου σήματος)



PAM (πλάτος αναλογικού σήματος)

$$M = 2, \nu = 8$$

$$q = M^\nu = 256 \quad (\nu = \log_M q)$$

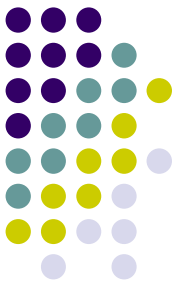
$$2/q \approx 7.8 \cdot 10^{-3}$$

M : σύμβολα

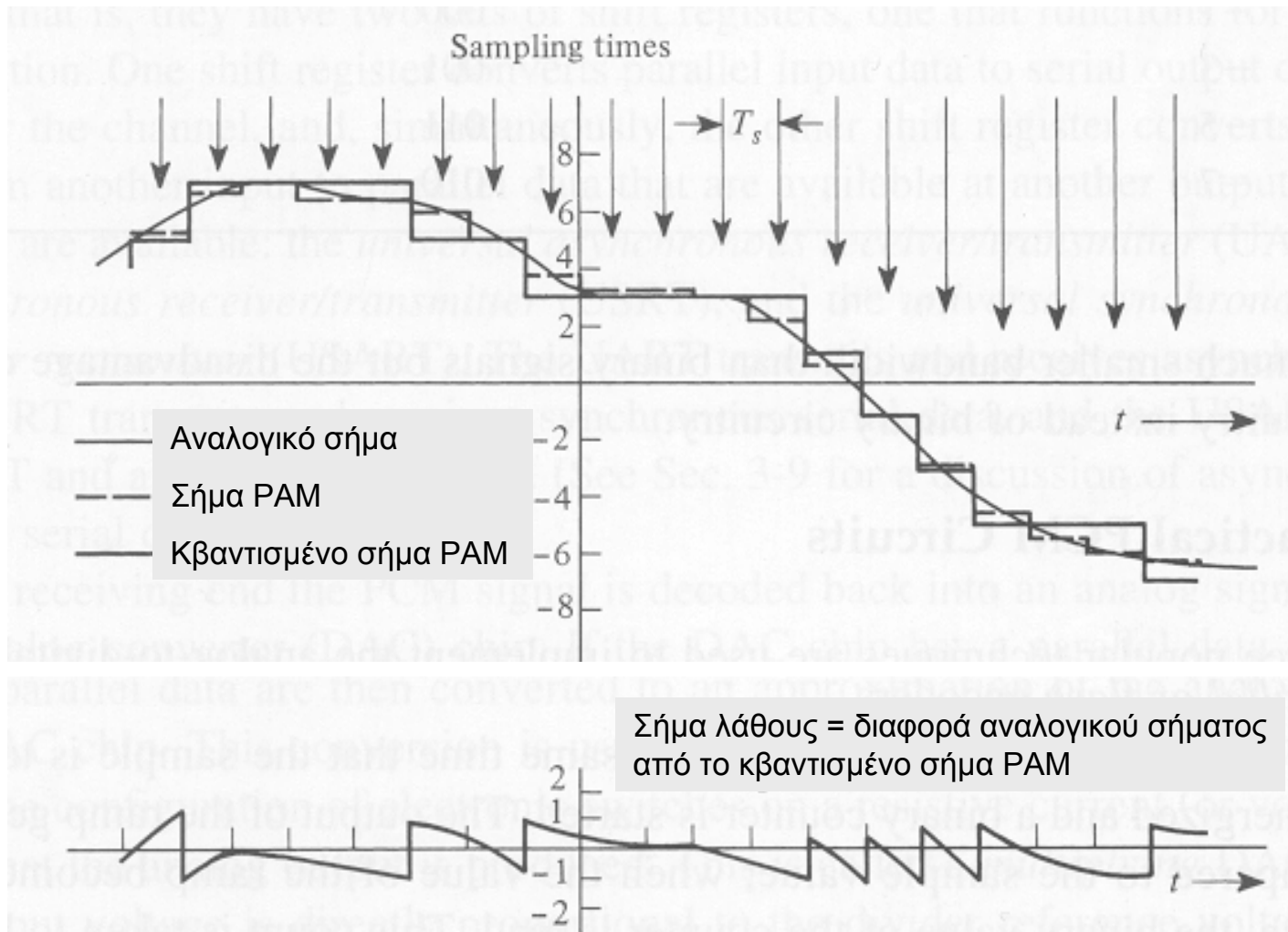
q : στάθμες κβαντισμού

ν : αριθμός bit

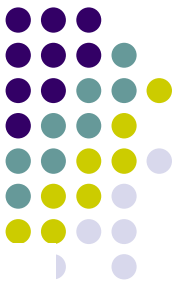
r : ρυθμός εξόδου



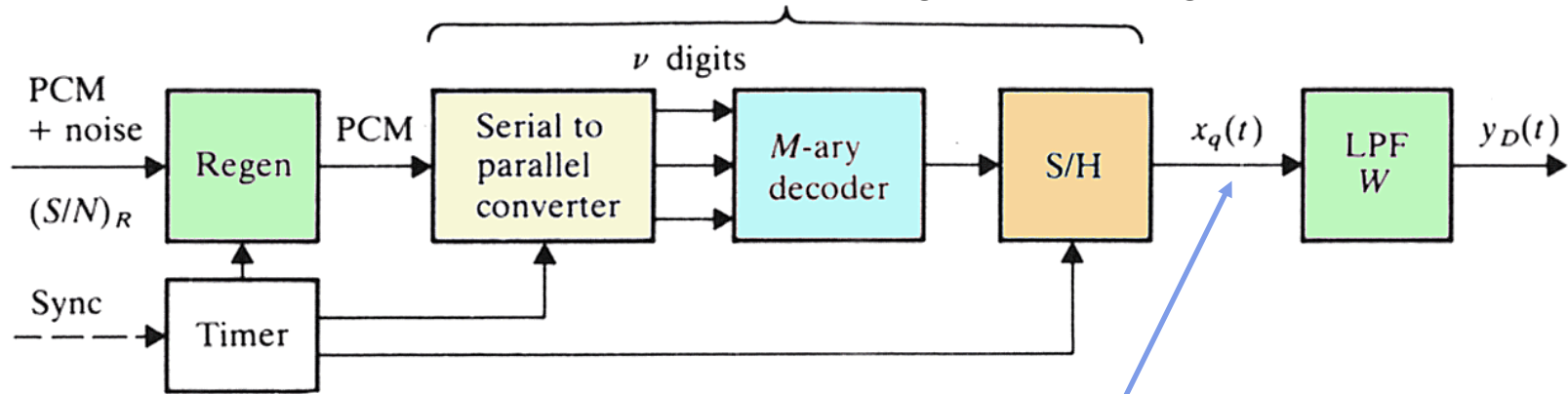
Κυματομορφές PCM



Δέκτης PCM

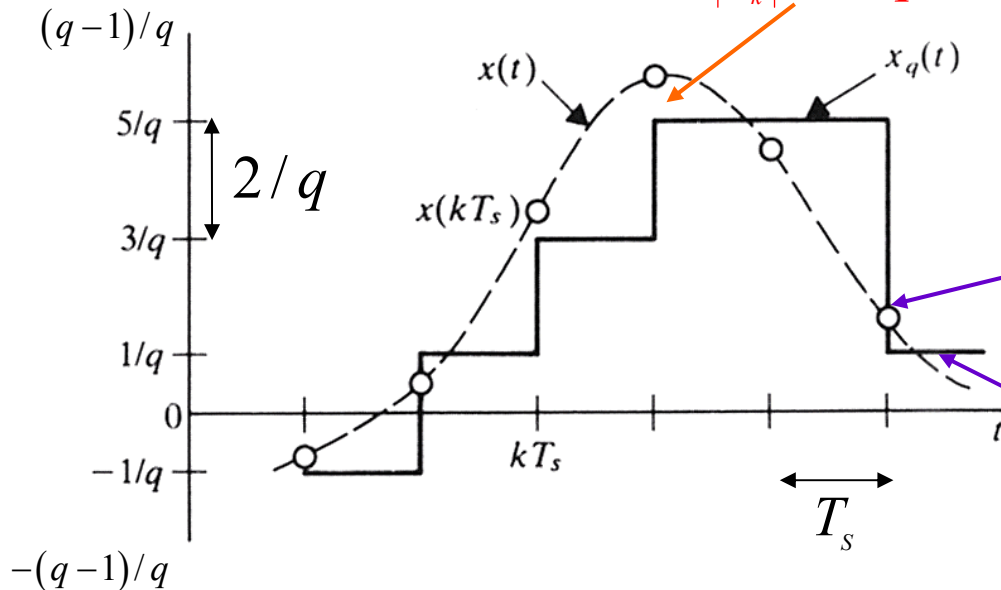


DAC Digital-to-Analog Converter



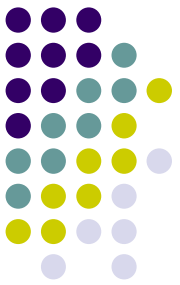
Το σφάλμα κβαντισμού
έχει όριο $|\varepsilon_k| \leq 1/q$

Q-PAM

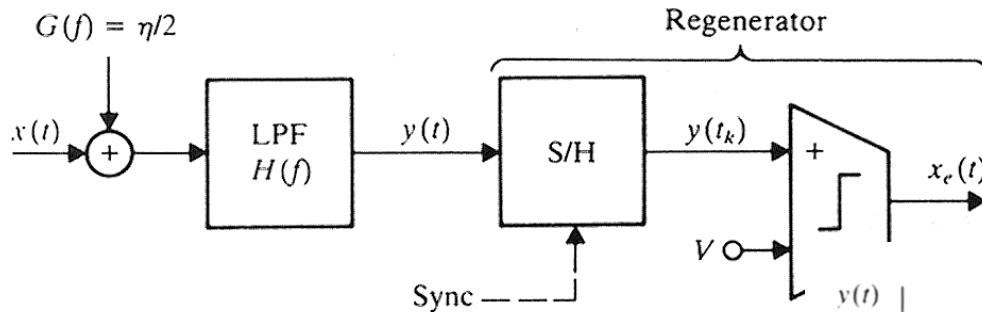


PAM (πλάτος
αναλογικού σήματος)

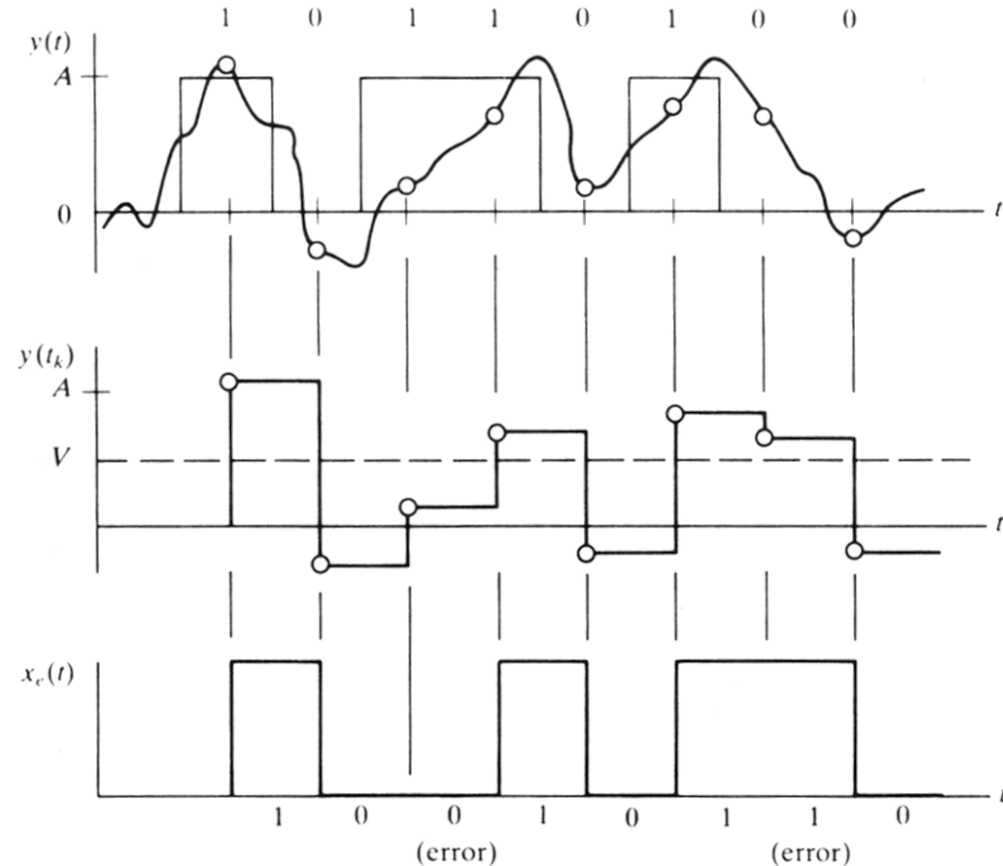
Q-PAM (πλάτος
κβαντισμένου σήματος)

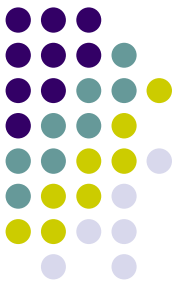


Αποδιαμόρφωση PCM



- Στην περίπτωση δυαδικής σηματοδότησης, ο συγκριτής αποφασίζει για το εάν μεταδόθηκε 0 ή 1, ανάλογα με το εάν η στάθμη του σήματος (συν το θόρυβο) είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από ένα κατώφλι V





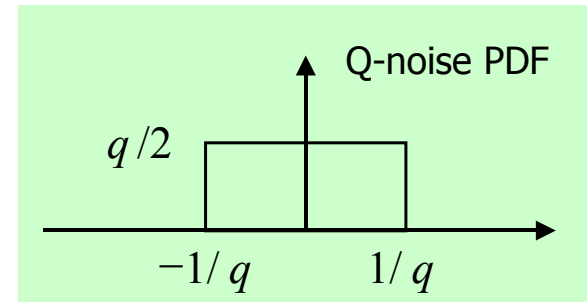
Σφάλμα κβαντισμού

- Τα σφάλμα κβαντισμού είναι η διαφορά μεταξύ των κυματομορφών Q-PAM και PAM

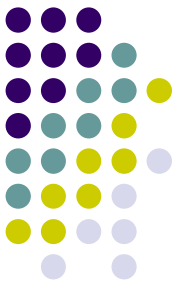
$$\varepsilon_n = x_q(nT_s) - x(nT_s)$$

- Υποθέτοντας ομοιόμορφη κατανομή όλων των σταθμών πλάτους του σήματος

$$\overline{\sigma_q^2} = \overline{\varepsilon_n^2} = \frac{q}{2} \int_{-1/q}^{1/q} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{3q^2}$$



Σηματοθορυβική σχέση εξόδου



- Το σήμα στην είσοδο του δέκτη PCM , υποθέτοντας δίαυλο χωρίς λάθη, είναι

$$x_q(t) = \sum_n [x(nT_s) + \varepsilon_n] \delta(t - nT_s)$$

- Το σήμα στην έξοδο του δέκτη PCM είναι

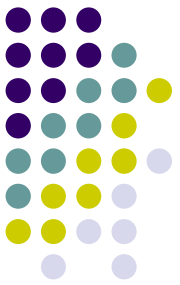
$$y_D(t) = x(t) + \sum_n \varepsilon_n \text{sinc}(f_s t - n)$$

- Η ισχύς του σήματος στην έξοδο είναι

$$S_D = \overline{x^2} = S_x \leq 1$$

- Η σηματοθορυβική σχέση στην έξοδο ορίζεται από την ισχύ του σήματος προς την ισχύ του θορύβου κβαντισμού

$$SNR_o = \frac{S_x}{\sigma_q^2} = 3q^2 S_x$$



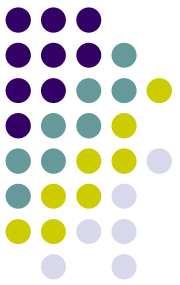
Σηματοθορυβική σχέση εξόδου

- Επειδή $q=2^v$ εκφράζοντας τη σηματοθορυβική σχέση σε db

$$SNR_o = 10\log_{10}(3 \cdot 2^{2v} S_x) = 4.8 + 6.0v + 10\log_{10}(S_x) \leq 4.8 + 6.0v$$

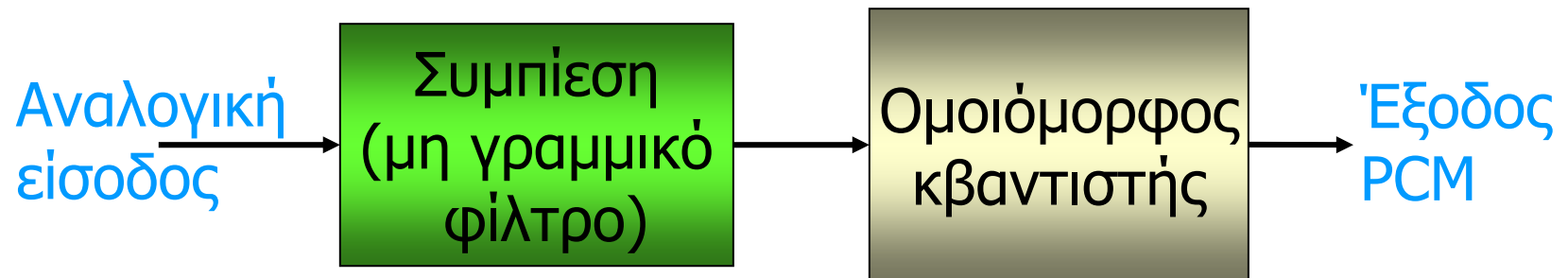
με την ισότητα να ισχύει για $S_x=1$

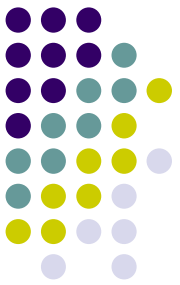
- Για συστήματα PCM φωνής έχουμε $v=8$, άρα
 - $SNR_o \leq 52,8 \text{ db}$
- Για μουσική ο λόγος $|x(t)|_{\max} / \sigma_x$ είναι μεγάλος επομένως $S_x = \sigma_x^2 \ll 1$
 - Σε κάποια συστήματα ήχου $v=14$, αλλά $SNR_o \approx 60 \text{ db}$ αντί του ορίου $88,8 \text{ db}$
 - Ανάγκη για μη ομοιόμορφη κβάντιση



Μη γραμμικοί κβαντιστές

- Για την αντιμετώπιση του δυναμικού εύρους σημάτων στην PCM χρησιμοποιούνται μη ομοιόμορφοι κβαντιστές





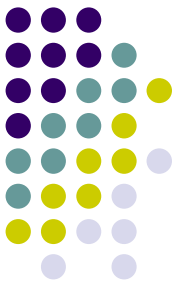
Συμπίεση-Αποσυμπίεση

- Για σήματα φωνής σε συστήματα τηλεφωνίας στην PCM χρησιμοποιούνται συμπίεστές
 - Νόμου μ (μ -law) στις ΗΠΑ και Ιαπωνία

$$y = \frac{\ln(1 + \mu|x|)}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(x), \quad |x| \leq 1$$

- Νόμου A (A-law) στην Ευρώπη

$$y = \begin{cases} \frac{A|x|}{1 + \ln A} \operatorname{sgn}(x), & |x| < 1/A \\ \frac{1 + \ln(A|x|)}{1 + \ln A} \operatorname{sgn}(x), & 1/A \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$



Συμπίεση-Αποσυμπίεση

- Η αποσυμπίεση είναι η αντίστροφη πράξη της συμπίεσης
 - Νόμου μ (μ -law)

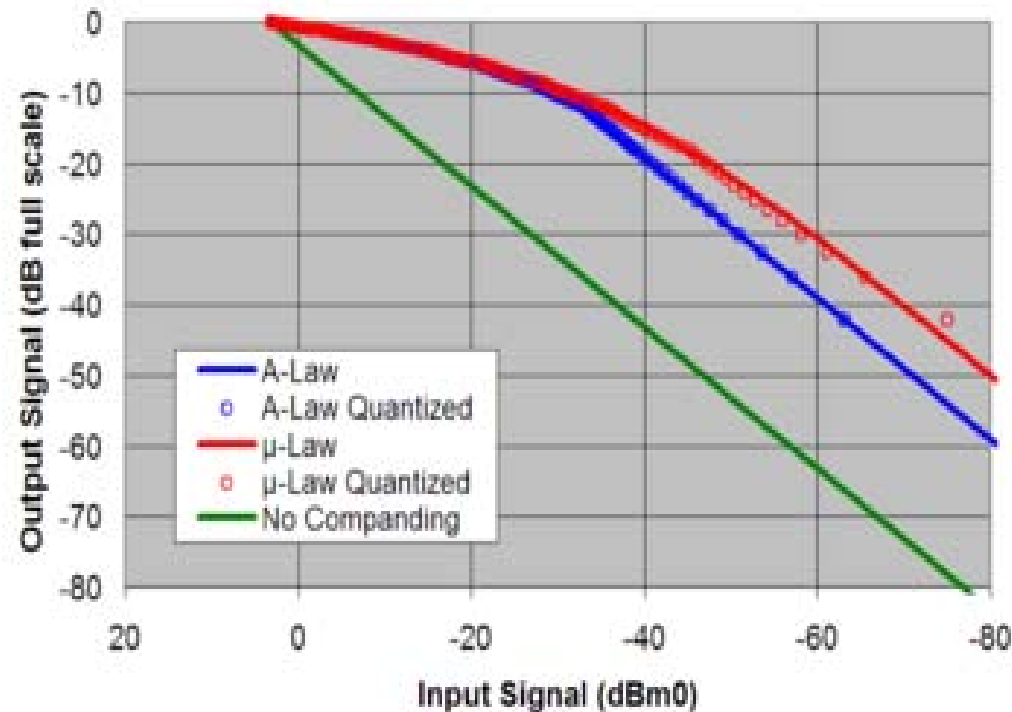
$$x = \frac{(1 + \mu)^{|y|} - 1}{\mu} \operatorname{sgn}(y), \quad |y| \leq 1$$

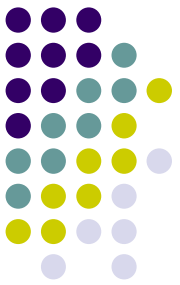
- Νόμου A (A -law)

$$x = \operatorname{sgn}(x) \begin{cases} |y| \frac{1 + \ln A}{A}, & |y| < \frac{1}{1 + \ln A} \\ \frac{\exp(|y|(1 + \ln A - 1))}{A} & \frac{1}{1 + \ln A} \leq |y| < 1 \end{cases}$$

Συμπίεση

- Με τη συμπίεση μειώνεται το δυναμικό εύρος του σήματος και έτσι αυξάνεται η αποδοτικότητα της κωδικοποίησης
- Το αποτέλεσμα είναι καλύτερος λόγος σήματος προς παραμόρφωση σε σχέση με ομοιόμορφη κβάντιση για δεδομένο αριθμό bit



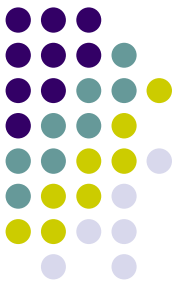


PCM και θόρυβος διαύλου

- Ο θόρυβος στον δίαυλο αλλοιώνει τις τιμές των κωδικών λέξεων
 - Λάθη σε bit
- Η επίδραση του θορύβου είναι μεγαλύτερη στα πιο σημαντικά bit
- Για το bit τάξης m έχουμε αλλαγή 2^m σταθμών κβαντισμού ύψους $2/q$, άρα λάθος

$$\varepsilon_m = \pm(2/q)2^m$$

- Το μέσο λάθος είναι $\overline{\varepsilon_m^2} = \frac{4}{3\nu} \frac{q^2 - 1}{q^2} \approx \frac{4}{3\nu}$



PCM και θόρυβος διαύλου

- Ο θόρυβος αποκωδικοποίησης είναι επομένως

$$\sigma_d^2 = \nu P_e \overline{\varepsilon_m^2} \approx \frac{4}{3} P_e$$

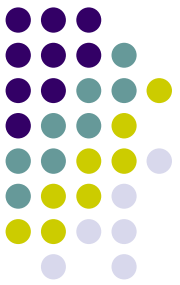
όπου P_e η πιθανότητα σφάλματος bit

- Η ισχύς θορύβου στην έξοδο είναι

$$N_D = \sigma_q^2 + \sigma_d^2 = \frac{1 + 4q^2 P_e}{3q^2}$$

- και η σηματοθορυβική σχέση γίνεται

$$SNR_o = \frac{3q^2}{1 + 4q^2 P_e} S_x$$

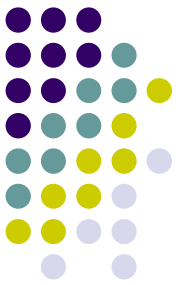


PCM και θόρυβος διαύλου

- Η επίδραση των σφαλμάτων bit εξαρτάται από την ποσότητα $4q^2 P_e$
- Έχουμε δύο ακραίες καταστάσεις

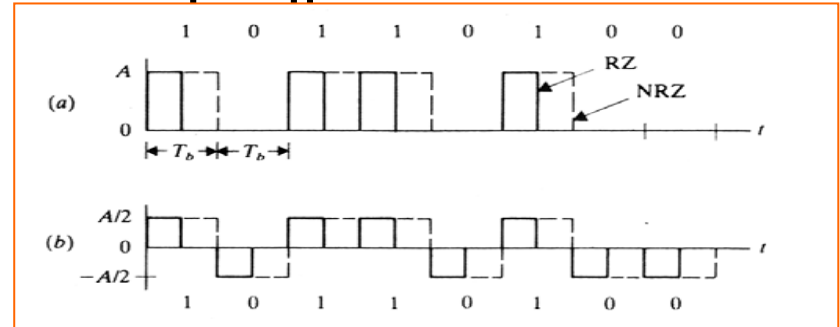
$$SNR_o \approx \begin{cases} 3q^2 S_x & P_e \ll 1/4q^2 \\ \frac{3S_x}{4P_e} & P_e \gg 1/4q^2 \end{cases}$$

Γκαουσιανός θόρυβος διαύλου



- Πιθανότητα σφάλματος για πολική σηματοδοσία

$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{SNR_c / 2}\right) & \text{μονοπολική} \\ Q\left(\sqrt{SNR_c}\right) & \text{πολική} \end{cases}$$

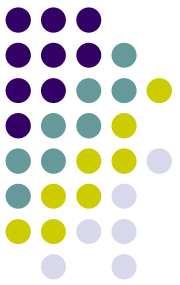


- πιθανότητα σφάλματος για M -κη σηματοδοσία

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q\left[\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1}SNR_c}\right]$$

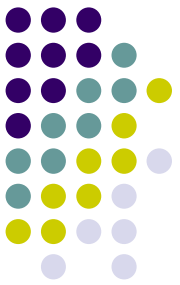
- όπου $Q(x)$, η συμπληρωματική συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$



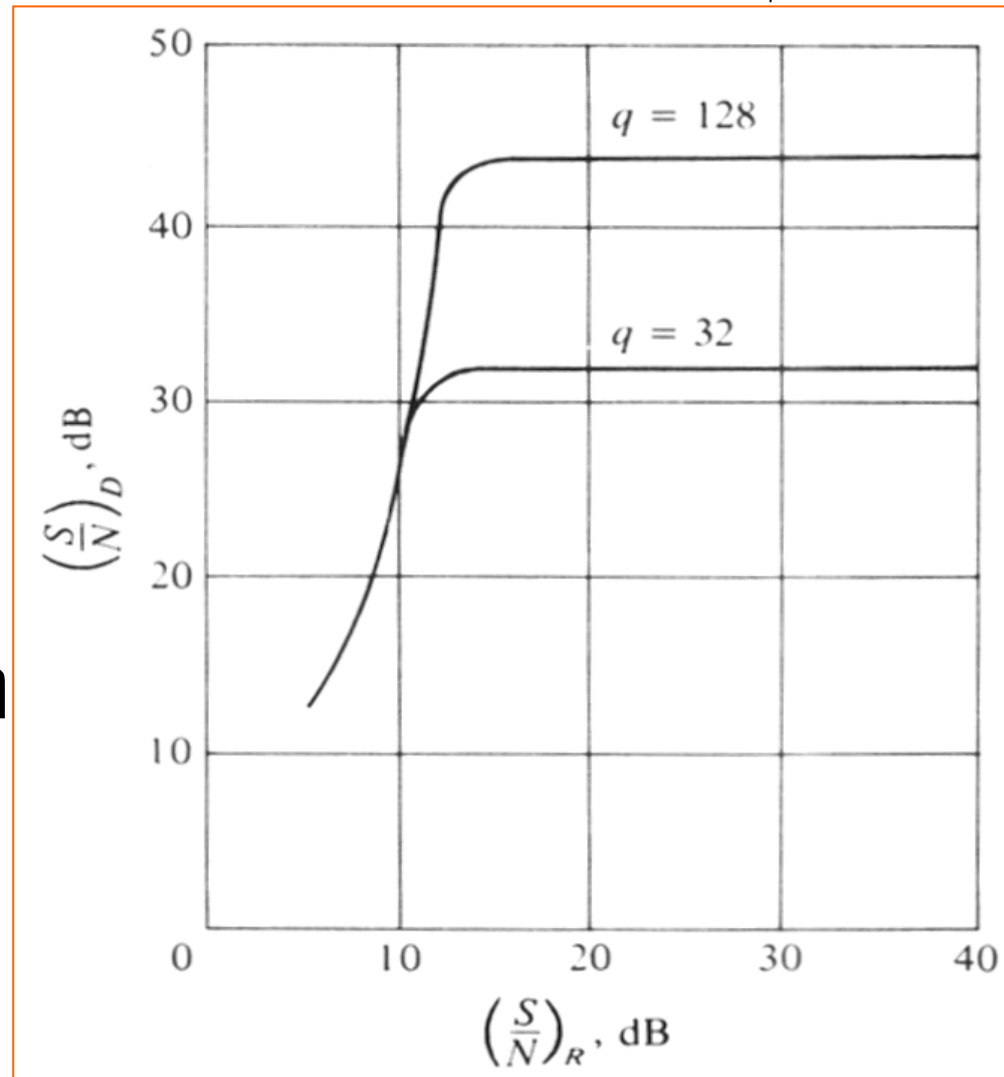
Κατώφλι

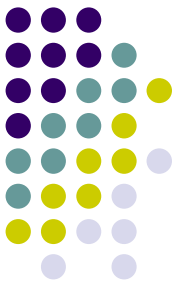
- Εάν $P_e \leq 10^{-5}$ τα σφάλματα μετάδοσης είναι αμελητέα και το PCM λειτουργεί πάνω από το κατώφλι
- Λύνοντας την $P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q \left[\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1}} SNR_c \right] \leq 10^{-5}$
- Λαμβάνουμε την ελάχιστη σηματοθορυβική σχέση για λειτουργία πάνω από το κατώφλι
$$SNR_{c,th} \approx 6(M^2 - 1)$$
- και λαμβάνοντας υπόψη το εύρος ζώνης μετάδοσης
$$SNR_{b,th} = (B_T / W) SNR_{o,th} \approx 6\nu(M^2 - 1)$$



Γκαουσιανός θόρυβος διαύλου

- Για $q=32$ ή 128 και $S_x=0,5$
- Η επίδοση του PCM παραμένει σταθερή μέχρις ότου η πιθανότητα σφάλματος μεγαλώσει
- Μετά έχουμε δραματική πτώση
- Φαινόμενο κατωφλίου





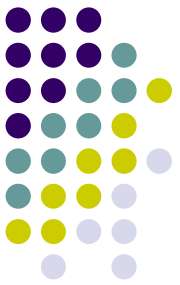
Πιθανότητα σφάλματος

- Υποθέτουμε **μονοπολική (on-off)** σηματοδότηση οπότε το σήμα στην έξοδο είναι

$$y(kt_s) = a_k + n(kt_s)$$

όπου $a_k=0$ όταν μεταδίδεται το bit 0 και $a_k=1$ όταν μεταδίδεται το bit 1

- Θεωρούμε τις δύο υποθέσεις
 - H_0 : $a_k=0$ και $y=n$ (μετάδοση 0)
 - H_1 : $a_k=1$ και $y=A+n$ (μετάδοση 1)



Πιθανότητα σφάλματος

- Η κατανομή του λαμβανόμενου σήματος ανάλογα με το τι μεταδόθηκε είναι

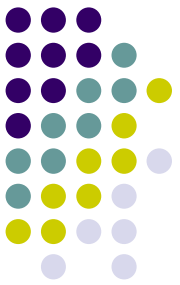
$$p_Y(y | H_0) = p_N(y)$$

$$p_Y(y | H_1) = p_N(y - A)$$

όπου $p_N(y)$ η κατανομή του θορύβου

- Στην περίπτωση λευκού θορύβου

$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$



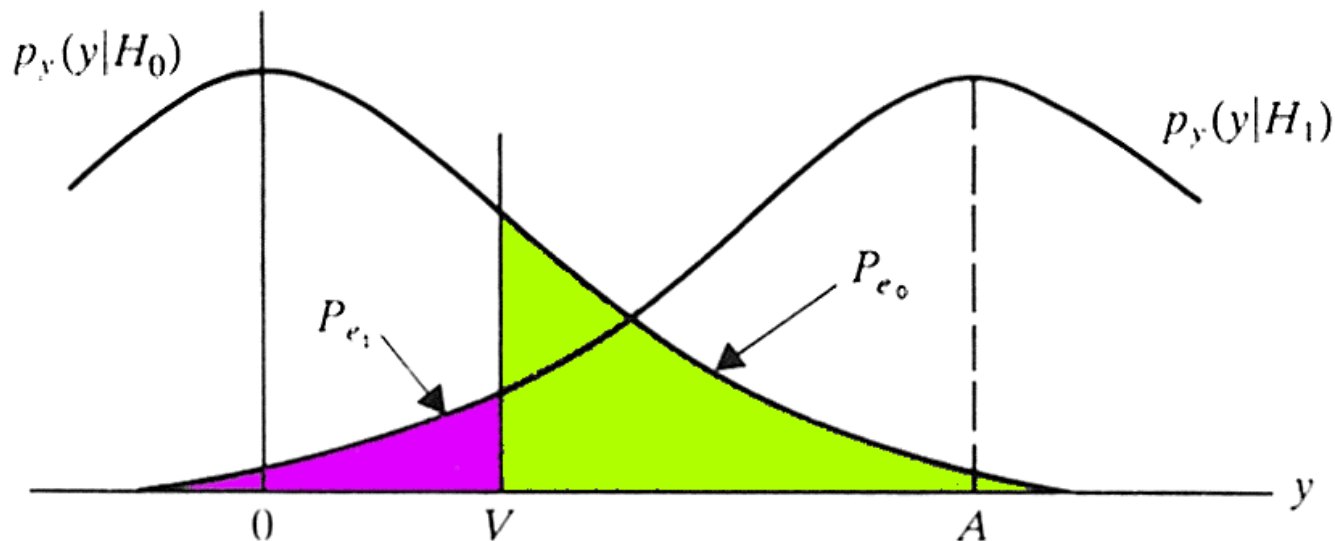
Πιθανότητα σφάλματος

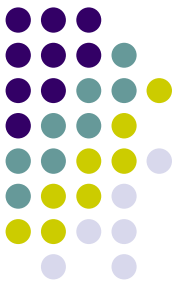
- Επομένως η πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}, \quad P_0 = P\{H_0\}, \quad P_1 = P\{H_1\}$$

$$P_{e0} = P\{Y > V \mid H_0\} = \int_V^{\infty} p_Y(y \mid H_0) dy$$

$$P_{e1} = P\{Y < V \mid H_1\} = \int_{-\infty}^V p_Y(y \mid H_1) dy$$





Βέλτιστο κατώφλι

- Το βέλτιστο κατώφλι προκύπτει από την σχέση

$$P_0 p_Y(V_{opt} | H_0) = P_1 p_Y(V_{opt} | H_1)$$

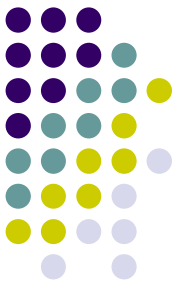
- Για ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1

$$P_0 = P_1 = 1/2$$

$$p_Y(V_{opt} | H_0) = p_Y(V_{opt} | H_1)$$

$$P_e = 1/2(P_{e0} + P_{e1})$$

Πιθανότητα σφάλματος σε λευκό θόρυβο



- Οι πιθανότητες σφάλματος για κατώφλι V είναι

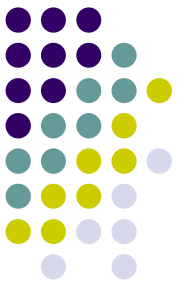
$$P_{e0} = \int_V^{\infty} p_N(y) dy = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^V p_N(y - A) dy = Q\left(\frac{A - V}{\sigma}\right)$$

- Για ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1

$$V_{opt} = A/2$$

$$P_{e0} = P_{e1} = P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$



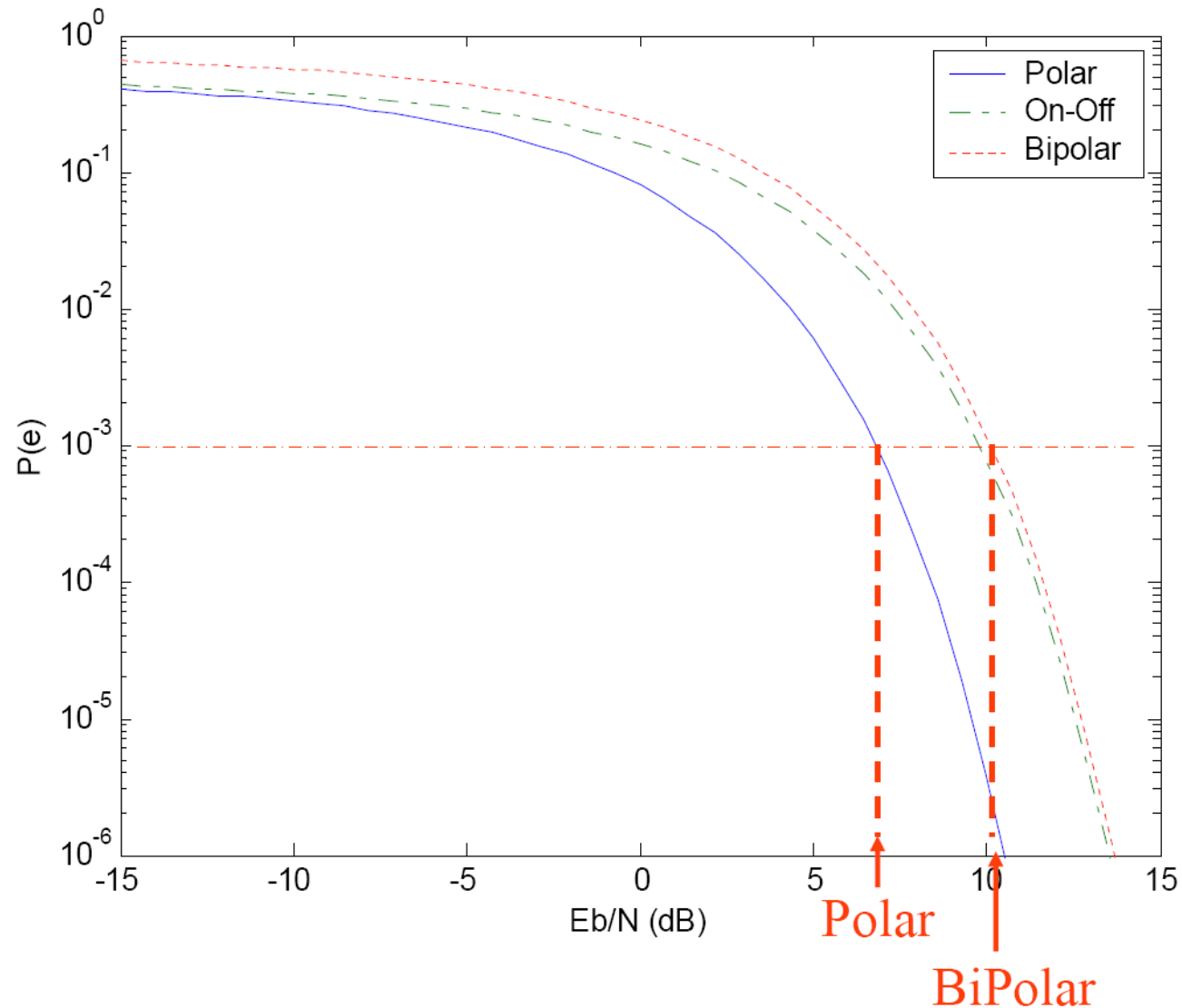
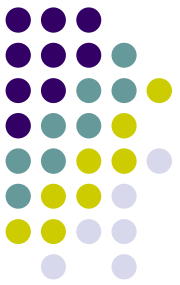
Πιθανότητα σφάλματος

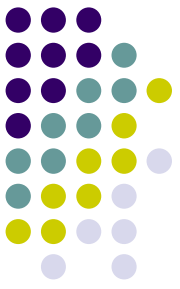
- Για μονοπολική σηματοδότηση $S_R = A^2 / 2$
- Για πολική σηματοδότηση $S_R = A^2 / 4$

- Άρα $\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{A^2}{4N_R} = \begin{cases} SNR_c / 2, \\ SNR_c \end{cases}$ μονοπολική
πολική

- και επομένως $P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{SNR_c / 2}\right), \\ Q\left(\sqrt{SNR_c}\right), \end{cases}$ μονοπολική
πολική

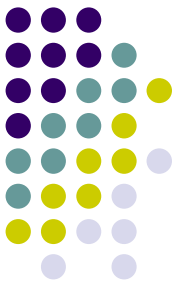
Πιθανότητα σφάλματος





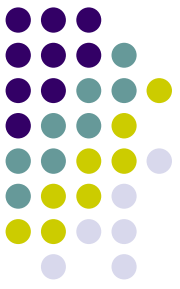
Επαναλήπτες

- Στα συστήματα μετάδοσης χρησιμοποιούνται αναγεννητικοί επαναλήπτες
- Ο αναγεννητικός επαναλήπτης ανιχνεύει τα bit στην είσοδο και αναγεννά το ψηφιακό σήμα στην έξοδο
- Εάν η πιθανότητα σφάλματος είναι αμελητέα, τότε το σήμα στην έξοδο είναι ακριβές αντίγραφο του αρχικού σήματος
- Για μικρές πιθανότητες σφάλματος, η παρεμβολή των επαναληπτών απλώς τις **προσθέτει**



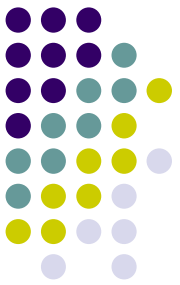
Εύρος ζώνης σήματος PCM

- Το (διαμορφωμένο) σήμα PCM όταν μεταδίδεται μέσω του διαύλου είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου και έχει το δικό του εύρος ζώνης
- Το εύρος ζώνης εξαρτάται τόσο από το ρυθμό μετάδοσης r και από την κωδικοποίηση γραμμής
 - Εάν χρησιμοποιηθούν παλμοί sinc $B_T \geq \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} \nu f_s$
 - Εάν χρησιμοποιηθούν τετραγωνικοί παλμοί $B_T = r = \nu f_s$



Εύρος ζώνης σήματος PCM

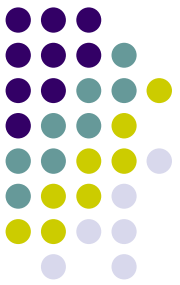
- Για δειγματοληψία στο ρυθμό Nyquist $f_s=2W$, οπότε
 - Κατώτερο όριο εύρος ζώνης $B_T \geq \nu W$
 - Για τετραγωνικούς παλμούς $B_T = 2\nu W$
 - Στην πράξη $\nu W < B_T < 2\nu W$



Παράδειγμα PCM

- Στην τηλεφωνία το φάσμα του σήματος φωνής εκτείνεται από τα 300 Hz μέχρι τα 3400 Hz
- Ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 8 kHz
- Τα δείγματα κωδικοποιούνται σε λέξεις των 8 bit
- Προκύπτει ρυθμός 64 kbps και απαιτείται εύρος ζώνης για τη μετάδοση τουλάχιστον 32 kHz (το πολύ 64 kHz)

PCM και συστήματα πολυπλεξίας



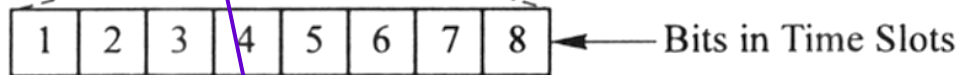
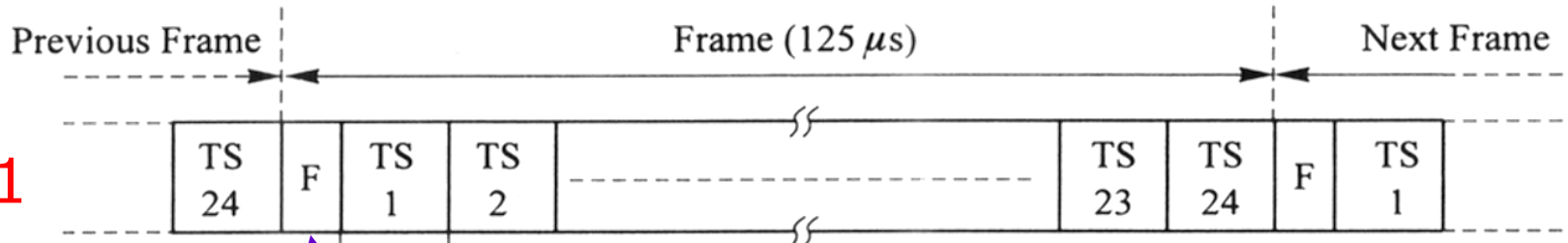
- Στην εφαρμογή της PCM στα τηλεφωνικά συστήματα μετάδοσης γίνεται πολυπλεξία πολλών καναλιών φωνής
- Στις ΗΠΑ χρησιμοποιείται το σύστημα T1 όπου 24 κανάλια φωνής πολυπλέκονται σε πλαίσιο των 125 μs ($=1/8000$) για μετάδοση πάνω από μια συνήθη τηλεφωνική γραμμή
- Στην Ευρώπη χρησιμοποιείται το σύστημα E1 όπου πολυπλέκονται 30 κανάλια φωνής και άλλα 2 για συγχρονισμό και σηματοδότηση

PCM και συστήματα πολυπλεξίας



Πλαίσιο

T1

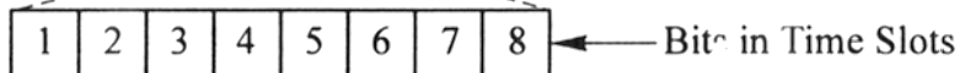
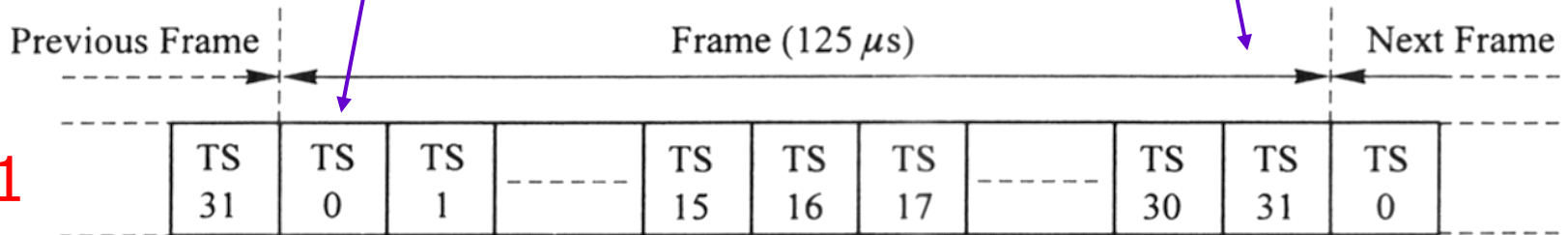


(a)

συγχρονισμός

Πλαίσιο

E1



(b)

Σηματοδοσία

Κανάλια=χρονοσχισμές