FM & PM στενής ζώνης

Narrowband FM & PM

Διαμόρφωση γωνίας στενής ζώνης

- Το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα μπορεί να γραφεί ως
$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$$
- όπου η στιγμιαία φάση είναι
$$\phi(t) = \begin{cases} \Delta\phi x(t) & \text{PM} \\ 2\pi\Delta f \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau & \text{FM} \end{cases}$$
- Εάν $|\phi(t)| \ll 1$ έχουμε διαμόρφωση στενής ζώνης

Διαμόρφωση γωνίας ως ζωνοπερατό σήμα

- Αναπαράσταση ως ζωνοπερατό σήμα

$$
\begin{aligned}
s(t) &= A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right] \\
&= A_c \left[\cos(2\pi f_c t)\cos\left(\phi(t)\right) - \sin(2\pi f_c t)\sin\left(\phi(t)\right)\right] \\
&= m_c(t)\cos(2\pi f_c t) - m_s(t)\sin(2\pi f_c t)
\end{aligned}
$$

- όπου οι ορθογώνιες συνιστώσες είναι

$$
m_c(t) = A_c \cos\left(\phi(t)\right) = A_c\left[1 - \frac{1}{2!}\phi^2(t) + \cdots\right] \approx A_c
$$

$$
m_s(t) = A_c \sin\left(\phi(t)\right) = A_c\left[\phi(t) - \frac{1}{3!}\phi^3(t) + \cdots\right] \approx A_c\phi(t)
$$

Διαμόρφωση γωνίας στενής ζώνης

- Στην περίπτωση διαμόρφωσης στενής ζώνης

$$m_c(t) \approx A_c$$

$$m_s(t) \approx A_c \phi(t)$$

- οπότε το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα στενής ζώνης είναι

$$s(t) \approx A_c \left[\cos(2\pi f_c t) - \phi(t) \sin(2\pi f_c t) \right]$$

Φάσμα σήματος στενής ζώνης

- Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος στενής ζώνης είναι

$$S(f)=\frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]+\frac{jA_c}{2}\left[\Phi(f-f_c)-\Phi(f+f_c)\right]$$

- όπου

$$\Phi(t)=\begin{cases}\Delta\phi X(t) & \text{PM}\\ -\dfrac{j\Delta f}{f}X(t) & \text{FM}\end{cases}$$

Διαμόρφωση στενής ζώνης από απλό τόνο

- Έστω $m(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_m t) & \text{FM} \\ A\sin(2\pi f_m t) & \text{PM} \end{cases}$

- Διαμόρφωση φάσης

$$s(t) = A_c\left[\cos(2\pi f_c t) - \Delta\phi \sin(2\pi f_m t)\sin(2\pi f_c t)\right]$$
$$= A_c\left[\cos(2\pi f_c t) - \beta_p \sin(2\pi f_m t)\sin(2\pi f_c t)\right]$$

- Διαμόρφωση συχνότητας

$$s(t) = A_c\left[\cos(2\pi f_c t) - \frac{\Delta f}{f_m}\sin(2\pi f_m t)\sin(2\pi f_c t)\right]$$
$$= A_c\left[\cos(2\pi f_c t) - \beta_f \sin(2\pi f_m t)\sin(2\pi f_c t)\right]$$

Διαμόρφωση στενής ζώνης από απλό τόνο

- που τελικά απλοποιείται στην

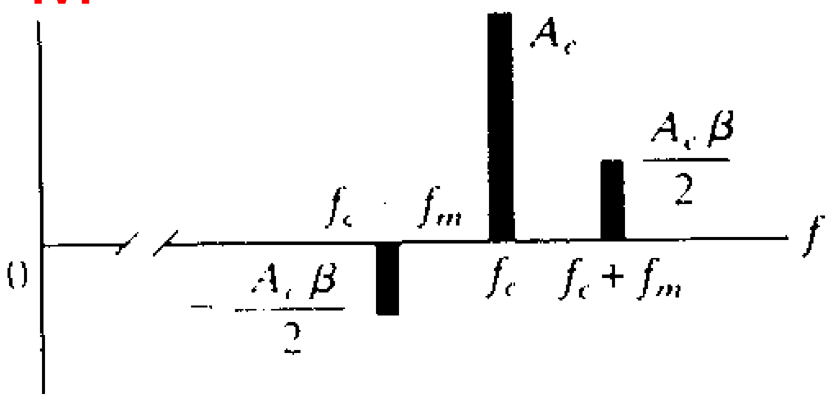
$$s(t) = A_c \left[\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}\beta \cos\left[2\pi(f_c + f_m)t\right] - \frac{1}{2}\beta \cos\left[2\pi(f_c - f_m)t\right] \right]$$

- Όπου $\beta \ll 1$ ο εκάστοτε δείκτης διαμόρφωσης

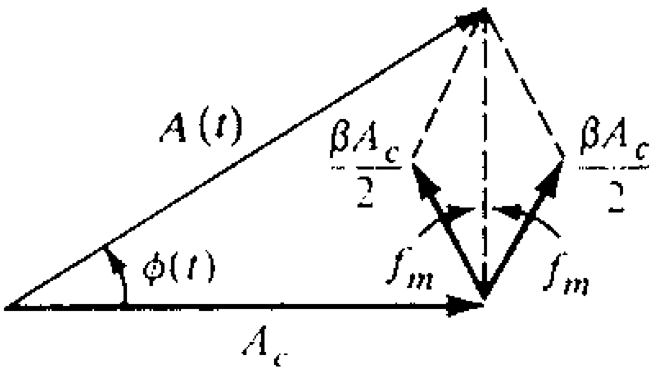
$$\beta = \begin{cases} \Delta\phi = k_p A_m & \text{PM} \\ \dfrac{\Delta f}{f_m} = \dfrac{k_f A_m}{f_m} & \text{FM} \end{cases}$$

Αναπαράσταση με φασιθέτες

- FM

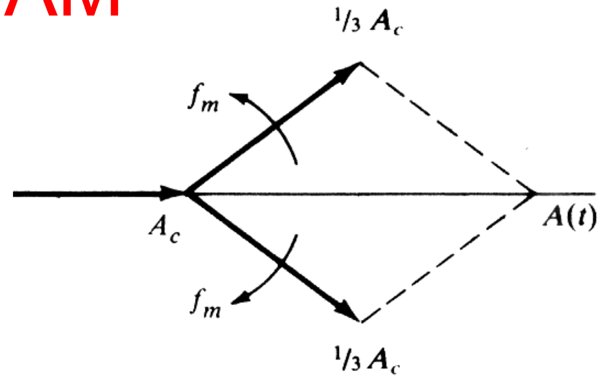


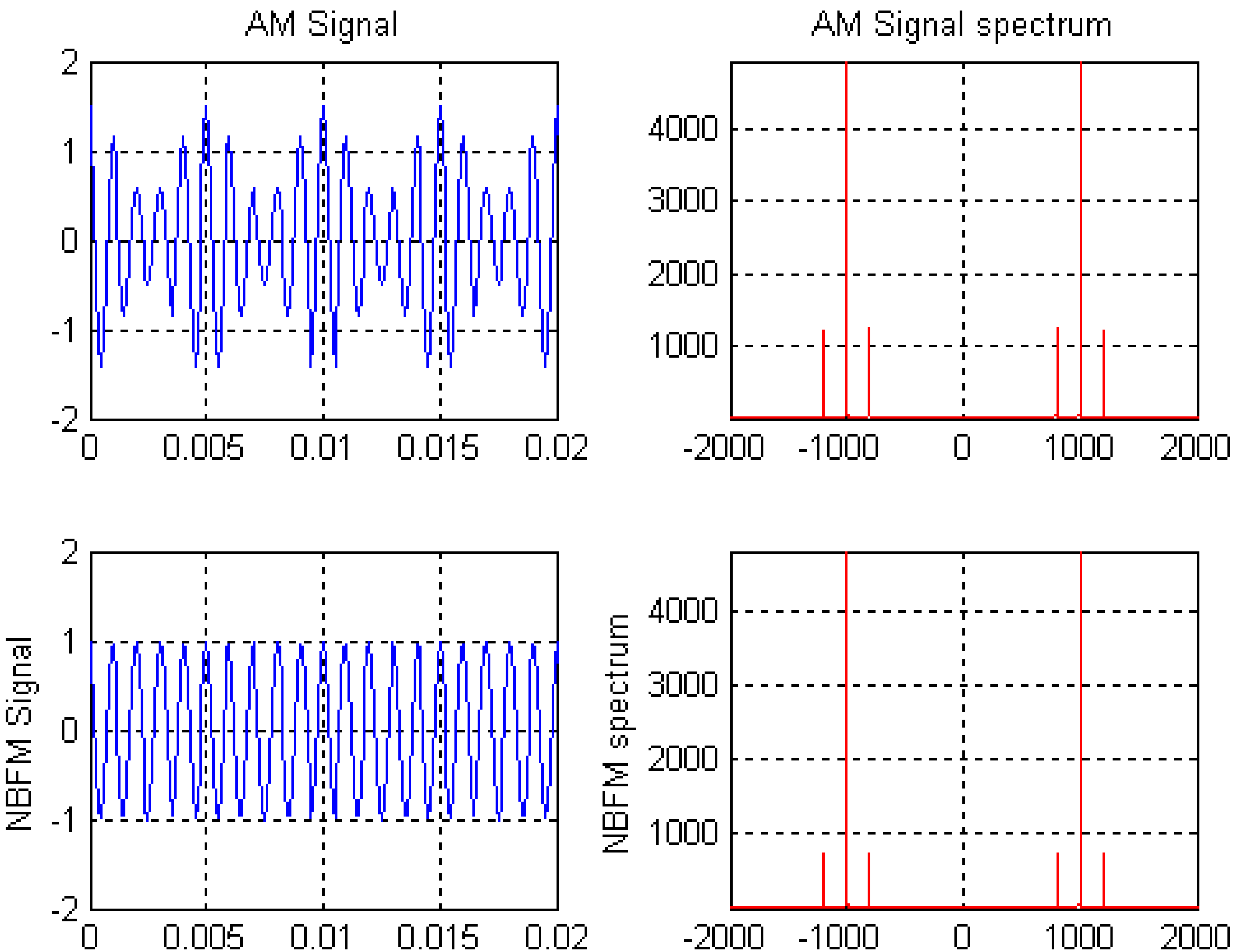
(a)



(b)

- AM





AM Signal
AM Signal spectrum
NBFM Signal
NBFM spectrum
2
1
0
-1
-2
0
0.005
0.01
0.015
0.02
4000
3000
2000
1000
-2000
-1000
0
1000
2000

Συμπέρασμα

- Το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα στενής ζώνης είναι παρόμοιο με το σήμα AM
- Έχει εύρος ζώνης 2W διπλάσιο του σήματος προς διαμόρφωση

FM & PM ευρείας ζώνης

Broadband FM & PM

Φασματική ανάλυση

- Η μαθηματική αναπαράσταση του φάσματος στη γενική περίπτωση, ακόμη και για απλά σήματα, είναι δυσχερής λόγω των εμπλεκομένων μη γραμμικοτήτων
- Επίσης, το διαμορφωμένο σήμα FM ή PM ευρείας ζώνης, εν γένει, δεν είναι περιοδικό
- Εντούτοις είναι δυνατή η ανάλυση σε αρμονικές συνιστώσες όταν το $m(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση
- Η απλούστερη περίπτωση είναι αυτή του ημιτονικού σήματος

Διαμόρφωση από απλό τόνο

- Όπως πριν για σήματα FM

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

- Ενώ για σήματα PM

$$m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$$

- Έτσι και στις δύο περιπτώσεις το διαμορφωμένο σήμα από απλό τόνο θα είναι

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right]$$

Μιγαδική περιβάλλουσα

- Το διαμορφωμένο κατά FM σήμα $s(t)$ που προκύπτει από απλό τόνο σήμα δεν είναι περιοδικό (πλην εξαιρέσεων)

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right]$$

$$= A_c \operatorname{Re}\left[\exp\left(j2\pi f_c t + j\beta \sin(2\pi f_m t)\right)\right]$$

$$= \operatorname{Re}\left[\tilde{s}(t)\exp(j2\pi f_c t)\right]$$

- όμως η μιγαδική του περιβάλλουσα $\tilde{s}(t)$ είναι περιοδικό σήμα, άρα μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp\left[j\beta \sin(2\pi f_m t)\right]$$

Ανάλυση σε σειρά Fourier

- Ανάπτυξη της μιγαδικής περιβάλλουσας σε σειρά Fourier

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_m t)$$

- με συντελεστές

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} \tilde{s}(t)\exp(-j2\pi n f_m t)dt = f_m A_c \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} \exp\left[j\beta\sin(2\pi f_m t) - j2\pi n f_m t\right]dt$$

$$= \frac{A_c}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[j(\beta\sin x - nx)\right]dt = A_c J_n(\beta)$$

- όπου $J_n(\beta)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης *n* με όρισμα το *β*

Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης

- Άρα $\tilde{s}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\exp(j2\pi n f_m t)$
- και επομένως

$$s(t) = A_c \operatorname{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\exp\left[j2\pi(f_c + nf_m)t\right]\right]$$

$$= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos\left[2\pi(f_c + nf_m)t\right]$$

- οπότε το φάσμα σήματος FM είναι

$$S(f) = A_c \operatorname{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\exp\left[j2\pi(f_c + nf_m)t\right]\right]$$

$$= \frac{A_c}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\left[\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)\right]$$

Ιδιότητες συναρτήσεων Bessel

- Η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης *n* είναι

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!}$$

- και για μικρές τιμές του β $\quad J_n(\beta) \simeq \dfrac{\beta^n}{2^n n!}$
- επίσης

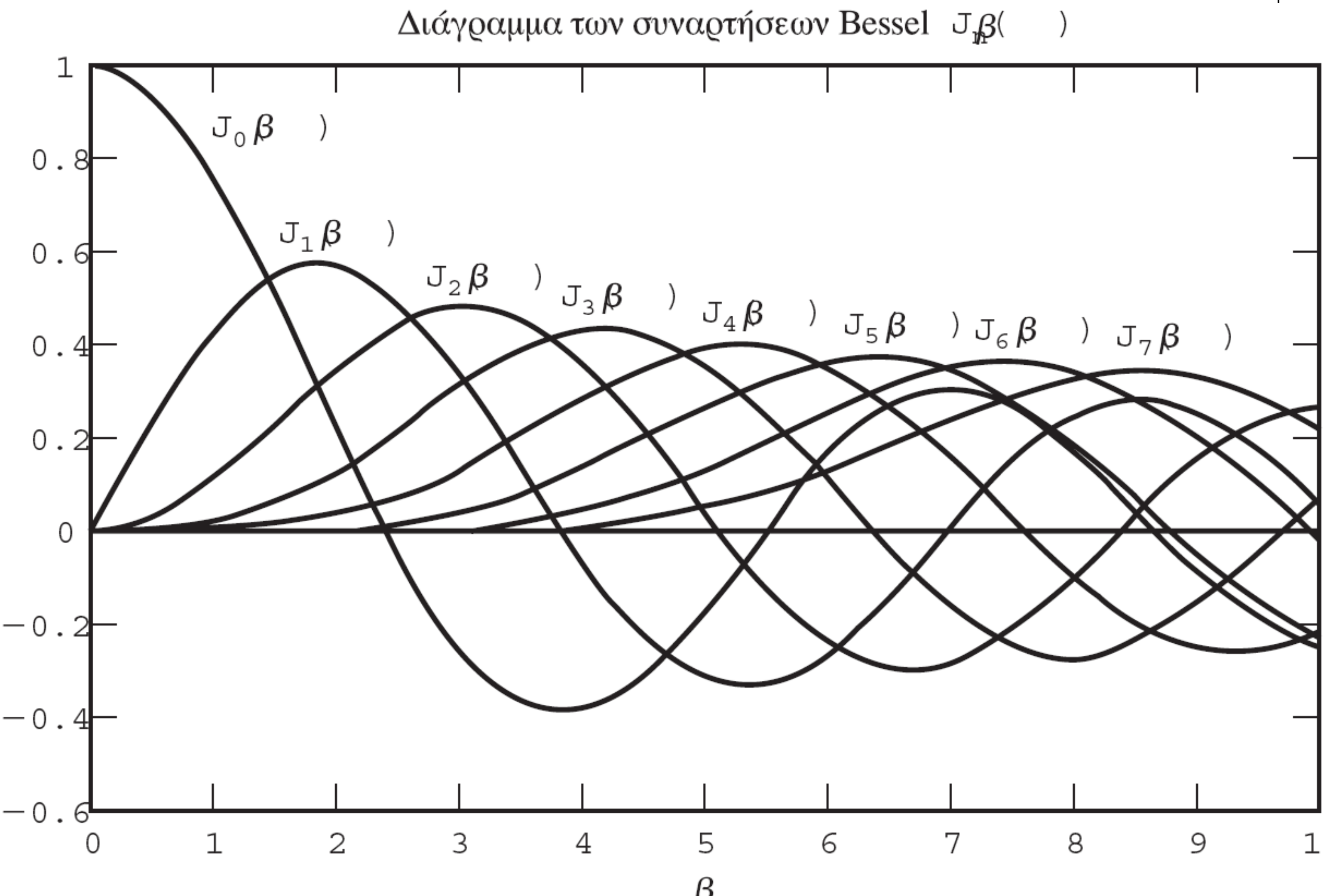
$$J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta) & \text{n} \quad \text{άρτιος} \\ -J_n(\beta) & \text{n} \quad \text{περιττός} \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

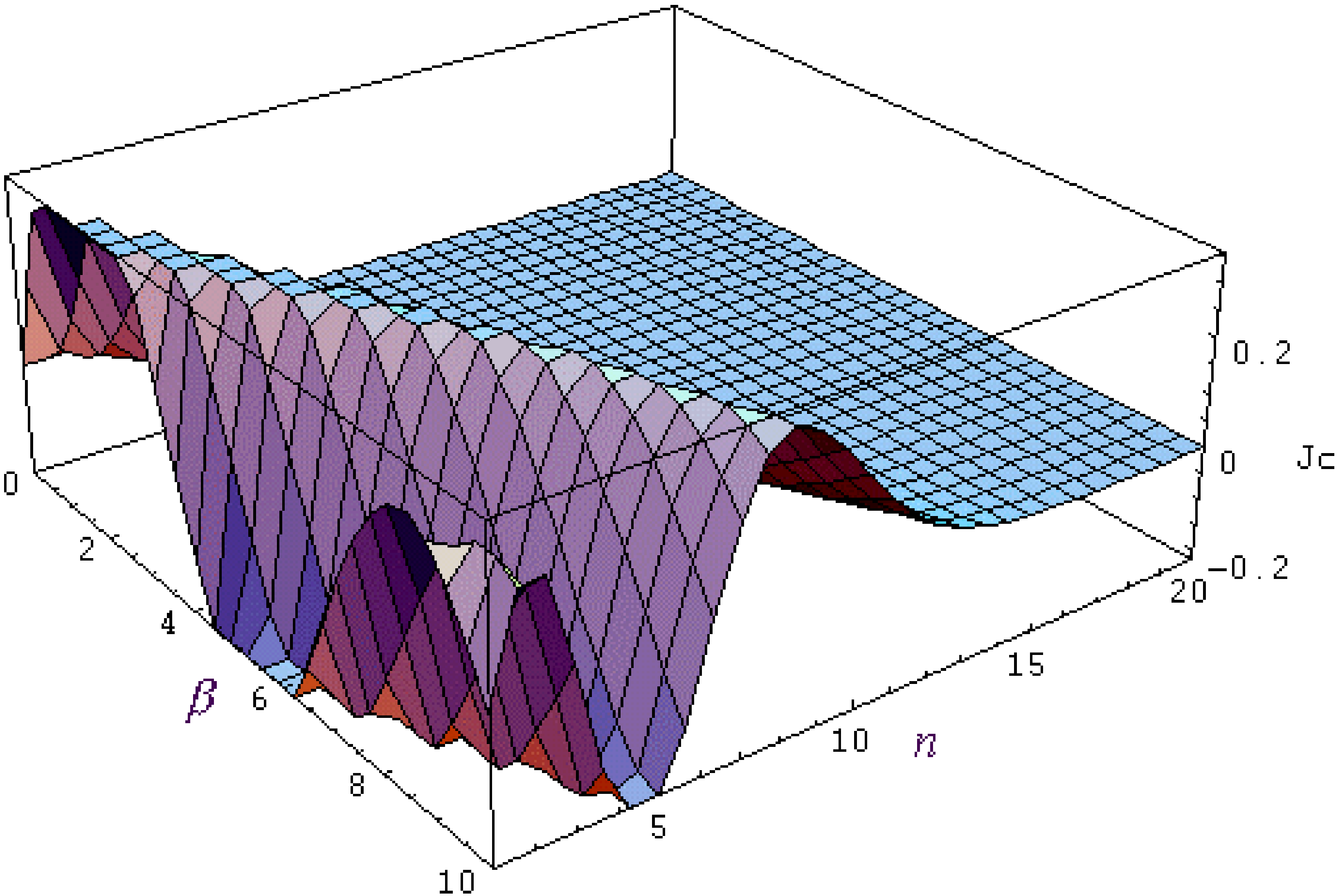
Ισχύς σήματος FM ευρείας ζώνης

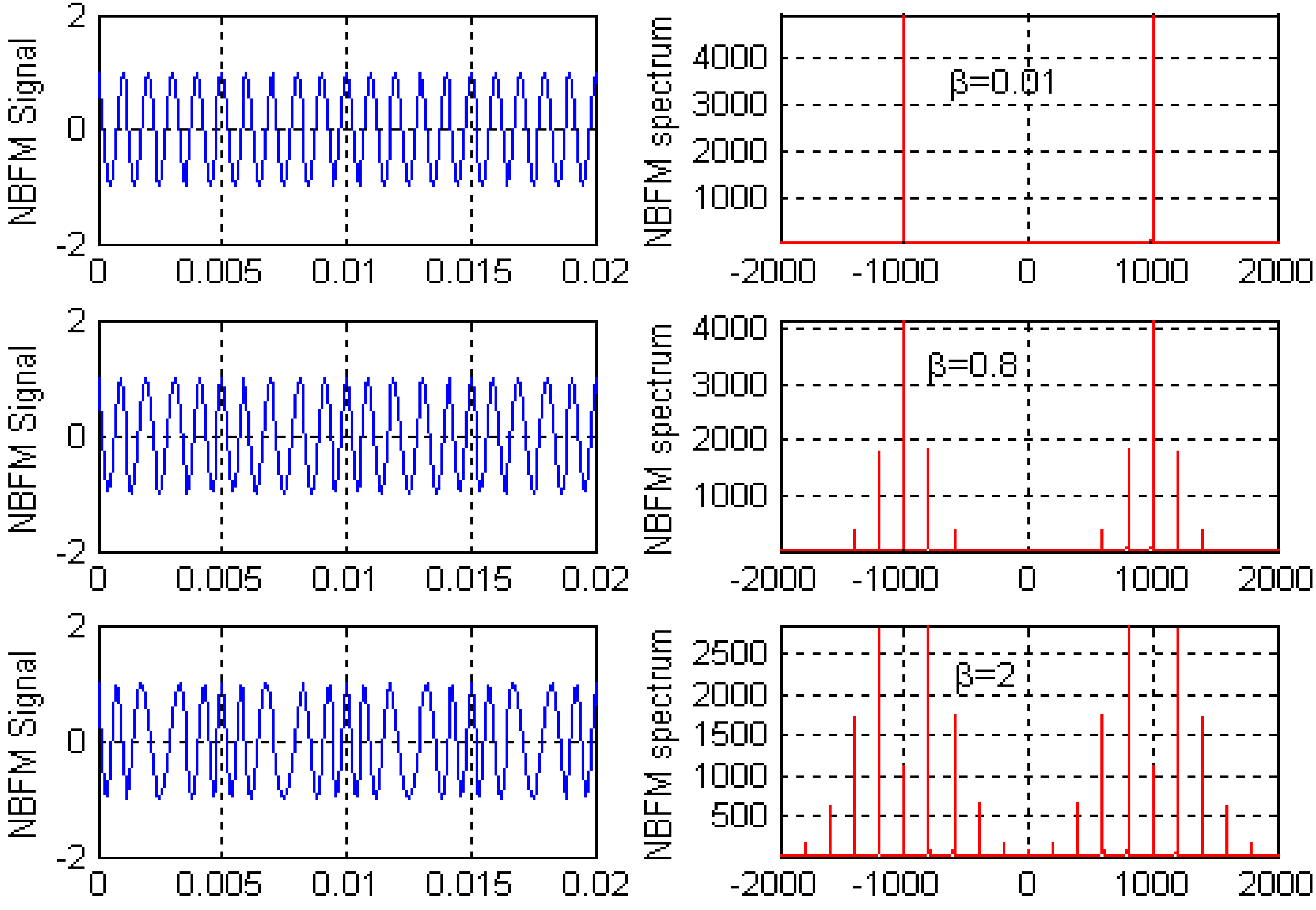
- Αφού $$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos\left[2\pi(f_c + nf_m)t\right]$$
- επομένως $$P = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)$$ $$= \frac{A_c^2}{2}$$

Τιμές συναρτήσεων Bessel

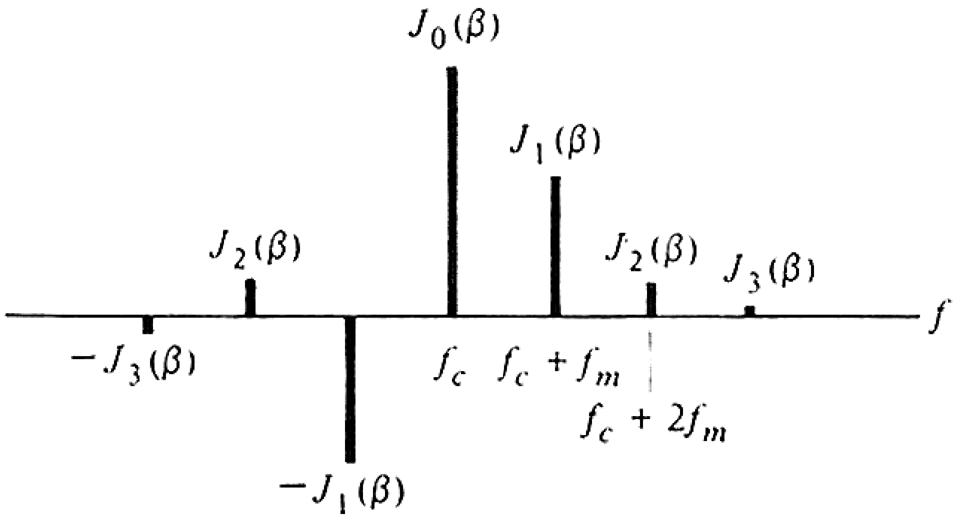


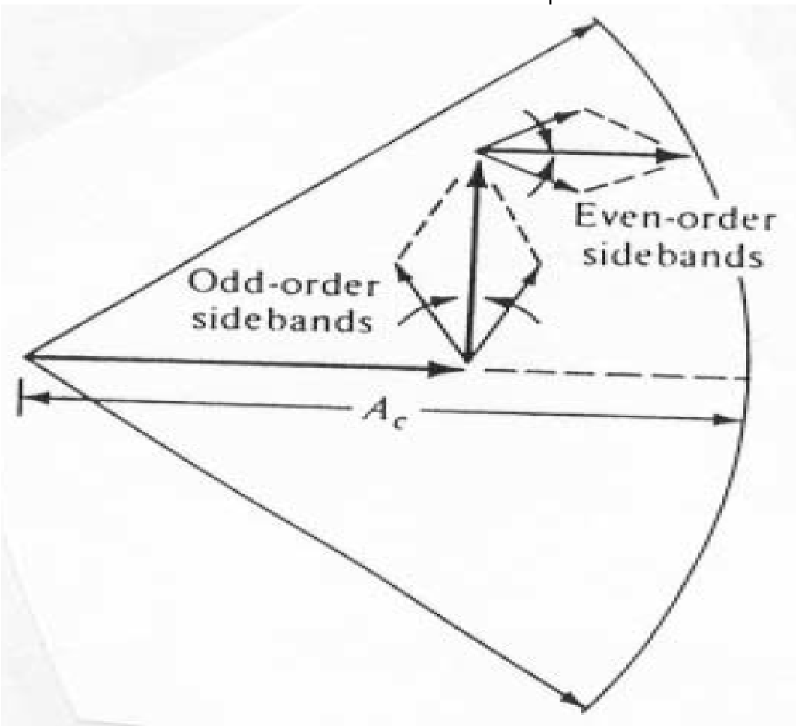
Τιμές συναρτήσεων Bessel




NBFM Signal
NBFM spectrum
β=0.01
β=0.8
β=2
2
0
-2
0
0.005
0.01
0.015
0.02
4000
3000
2000
1000
2500
1500
500
-2000
-1000
0
1000
2000

Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης





- Οι περιττές συνιστώσες είναι ορθογώνιες προς το φέρον και προκαλούν την επιθυμητή διαμόρφωση συχνότητας και κάποια ανεπιθύμητη παραμόρφωση πλάτους
- Οι άρτιες συνιστώσες είναι συμφασικές με το φέρον και διορθώνουν την παραμόρφωση πλάτους

Διαμόρφωση από πολλούς τόνους

- Έστω ότι

$$m(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

- και οι συχνότητες f_1 και f_2 δεν σχετίζονται αρμονικά (πολλαπλάσιο η μία της άλλης), τότε

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta_1 \sin(2\pi f_1 t) + \beta_2 \sin(2\pi f_2 t)\right]$$

- όπου

$$\beta_1 = \frac{k_f A_1}{f_1} = \frac{\Delta f_1}{f_1}, \qquad \beta_2 = \frac{k_f A_2}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2}$$

Διαμόρφωση από πολλούς τόνους

- Μετά από πολλές (προφανείς) πράξεις

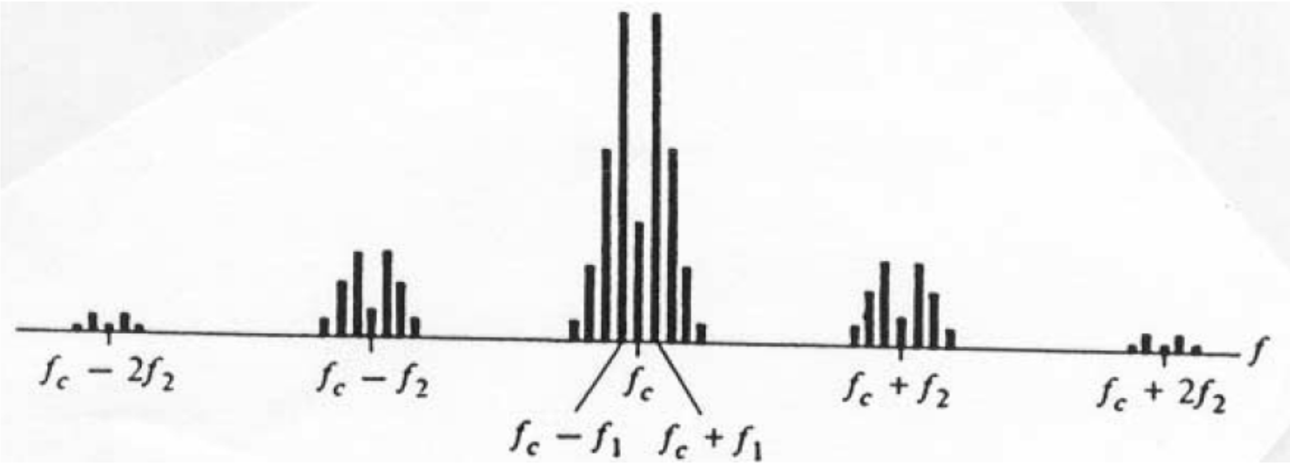
$$s(t) = A_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2) \cos\left[2\pi(f_c + mf_1 + nf_2)t\right]$$

Φάσμα σήματος FM από πολλούς τόνους

- Το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος FM από πολλούς τόνους περιλαμβάνει
  - όλες τις πλευρικές συχνότητες που προκύπτουν από την f_1, δηλαδή, $f_c \pm mf_1$
  - όλες τις πλευρικές συχνότητες που προκύπτουν από την f_2, δηλαδή, $f_c \pm nf_2$
  - όλες τις συχνότητες ενδοδιαμόρφωσης, δηλαδή, $f_c \pm mf_1 \pm nf_2$

Φάσμα σήματος FM από πολλούς τόνους

- Έστω $f_1 < f_2$ και $\beta_1 > \beta_2$



Διαμόρφωση από περιοδικό σήμα

- Έστω ότι *m(t)* είναι περιοδικό σήμα, τότε η μιγαδική περιβάλλουσα του *s(t)* θα είναι και αυτή περιοδικό σήμα

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp\left[j\beta m(t) \right]$$

- οπότε μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_m t)$$

- με συντελεστές

$$c_n = \int_0^{T_m} \exp\left[j\beta m(f_m) - j2\pi n f_m t \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[j\left(\beta m\left(\frac{x}{2\pi f_m} \right) - nx) \right) \right] dx$$

Φάσμα σήματος FM από περιοδικό σήμα

- Άρα

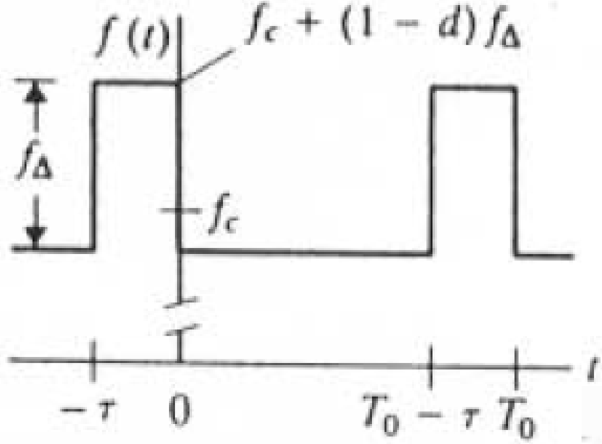
$$s(t) = A_c \operatorname{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left[j2\pi(f_c + nf_m)t\right]\right]$$

$$= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \cos\left[2\pi(f_c + nf_m)t + \angle c_n\right]$$

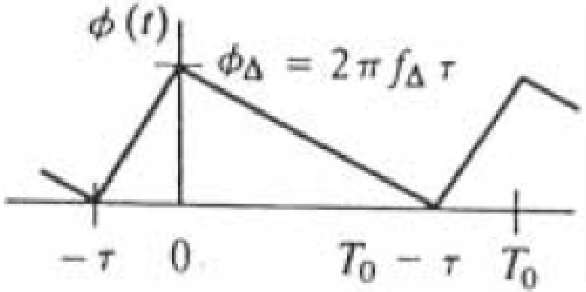
- οπότε το φάσμα σήματος FM που προκύπτει από διαμόρφωση με περιοδικό σήμα περιέχει μόνο τις αρμονικές $f_c \pm nf_m$ που προκαλούνται από την f_m

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \left[\delta(f - f_c - nf_m)\exp(j\angle c_n) + \delta(f + f_c + nf_m)\exp(-j\angle c_n)\right]$$

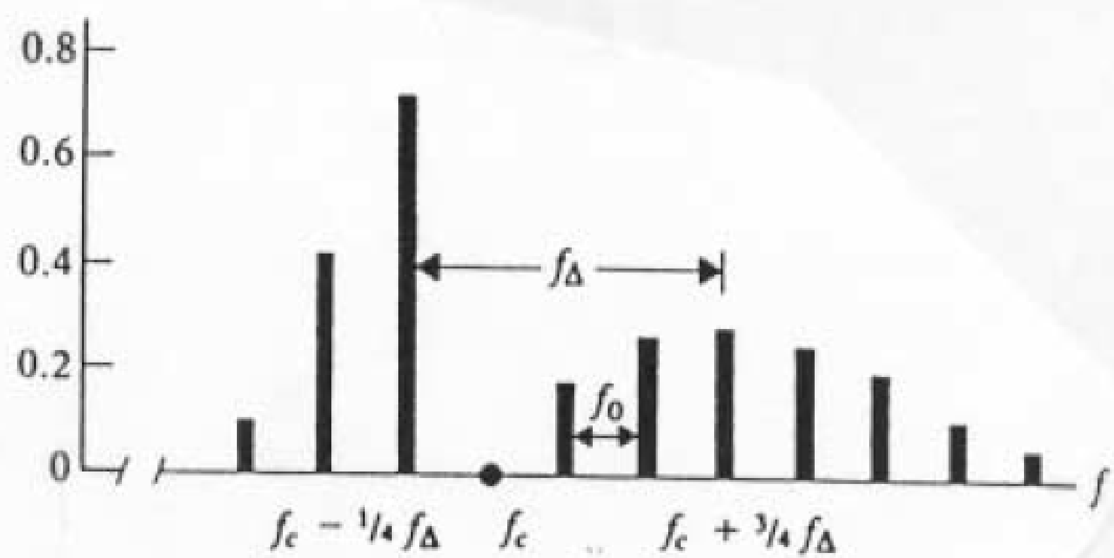
Φάσμα σήματος FM από περιοδικό σήμα



(a)



(b)



Εύρος ζώνης για μετάδοση FM

Εύρος ζώνης σήματος FM

Εύρος ζώνης σήματος FM στενής ζώνης

- Για μικρές τιμές του δείκτη διαμόρφωσης β

$$J_0(\beta) \simeq 1$$

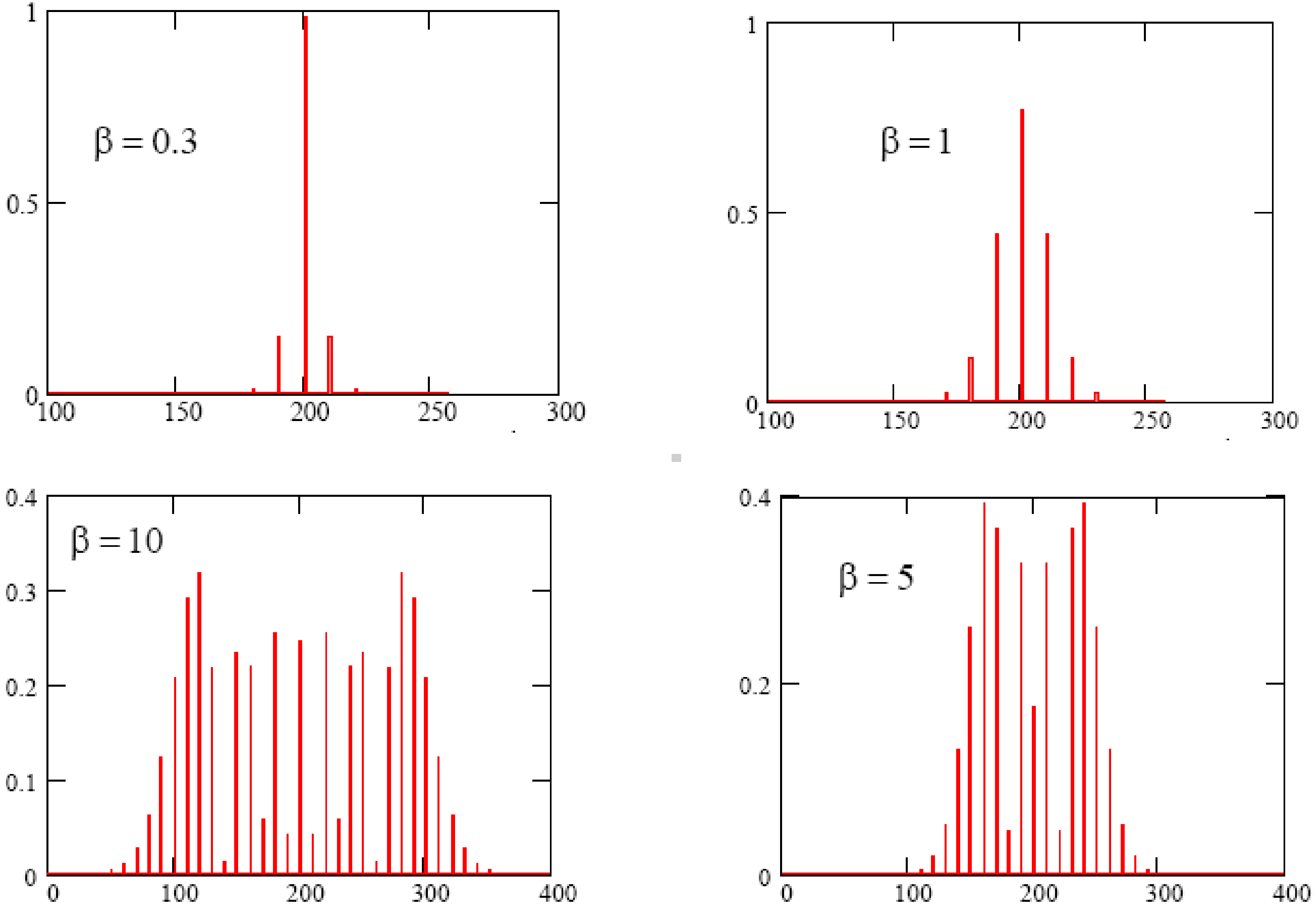
$$J_1(\beta) \simeq \frac{\beta}{2}, \qquad J_{-1}(\beta) \simeq -\frac{\beta}{2}$$

$$J_n(\beta) \simeq 0, \qquad n > 1$$

- και επομένως μόνο η πρώτη πλευρική του διαμορφωμένου σήματος FM έχει σημασία (FM στενής ζώνης)
- οπότε

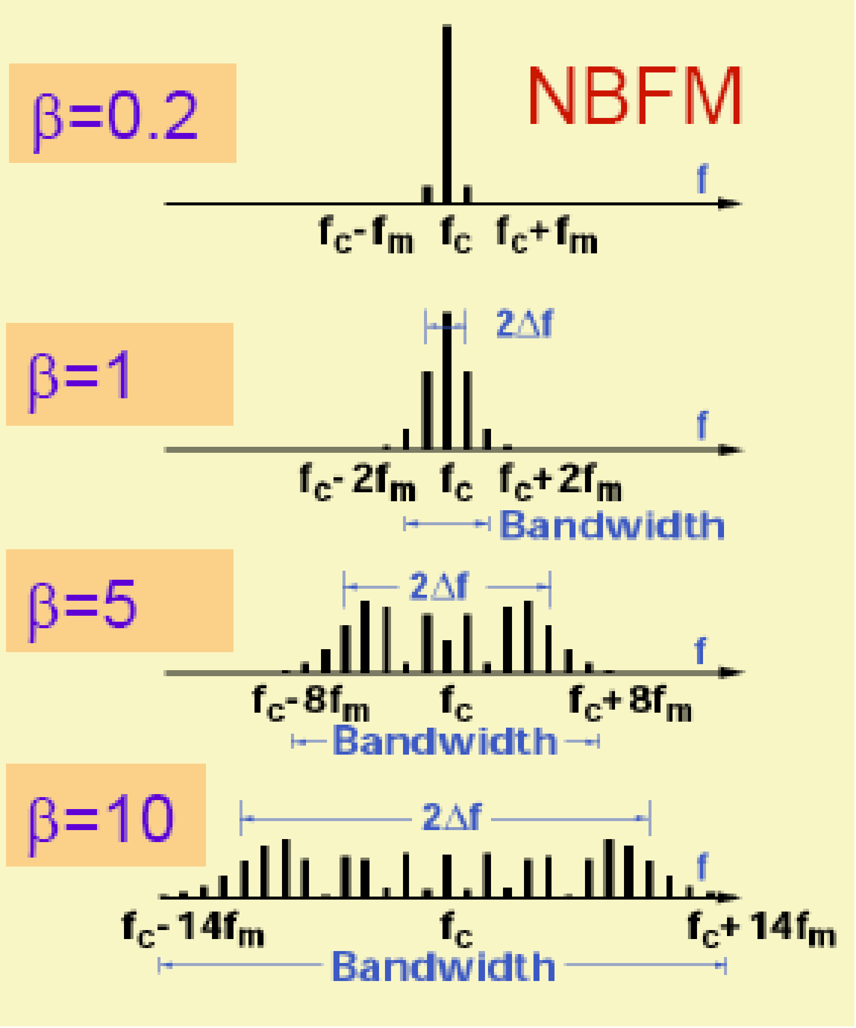
$$B_T = 2f_m = 2W$$

Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης



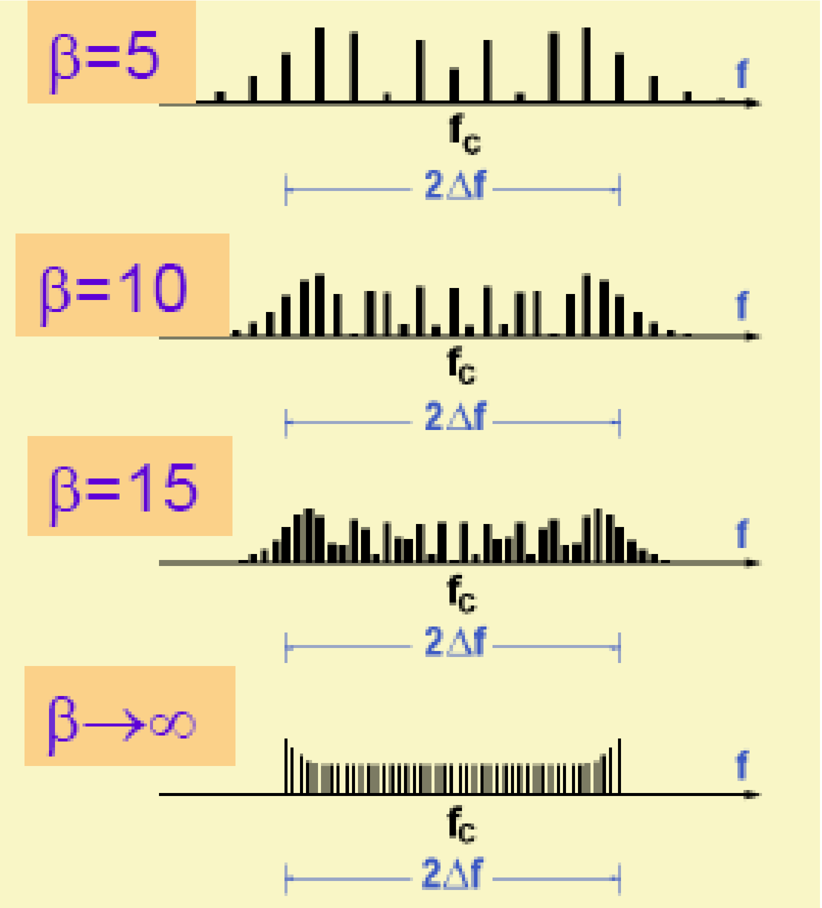
Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης

- Έστω ότι διατηρούμε το *W* σταθερό
- Μεταβάλλουμε το *β* αυξάνοντας την απόκλιση συχνότητας Δf
- Η απόσταση των γραμμών σταθερή στο f_m
- Το εύρος ζώνης μεγαλώνει



Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης

- Έστω ότι διατηρούμε την Δ*f* σταθερή
- Αυξάνουμε το *β*
- Μειώνεται η απόσταση των γραμμών (f_m)
- Μειώνεται το *W*
- Το εύρος ζώνης παραμένει περίπου σταθερό 2Δ*f*



Εύρος ζώνης σήματος FM ευρείας ζώνης

- Το φάσμα του σήματος FM ευρείας ζώνης περιέχει άπειρες συνιστώσες
  - Το πλάτος των υψηλής τάξης συνιστωσών είναι αμελητέο
  - Πρακτικά το φάσμα είναι πεπερασμένο!

Εύρος ζώνης σήματος FM ευρείας ζώνης

- Μπορεί να ορισθεί ένα ενεργό εύρος ζώνης που να περιλαμβάνει μόνο τις σημαντικές συνιστώσες
- Για μεγάλες τιμές του β μπορούμε να διατηρήσουμε μόνο τις M πρώτες συνιστώσες που περιλαμβάνουν π.χ. το 99% της ολικής ισχύος

$$\sum_{n=-M+1}^{M-1} J_n^2(\beta) < 0,99, \qquad \sum_{n=-M}^{M} J_n^2(\beta) \geq 0,99$$

$$B_T = 2M(\beta) f_m = 2M(\beta) W$$

Εύρος ζώνης σήματος FM ευρείας ζώνης

- Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να κρατήσουμε μόνο τους όρους του αναπτύγματος Fourier που θεωρούμε σημαντικούς
  - Π.χ. μόνο αυτούς για τους οποίους (με τιμές του ε στην περιοχή 0,01 με 0,1)

$$\left|J_M(\beta)\right| > \varepsilon, \quad \left|J_{M+1}(\beta)\right| < \varepsilon$$

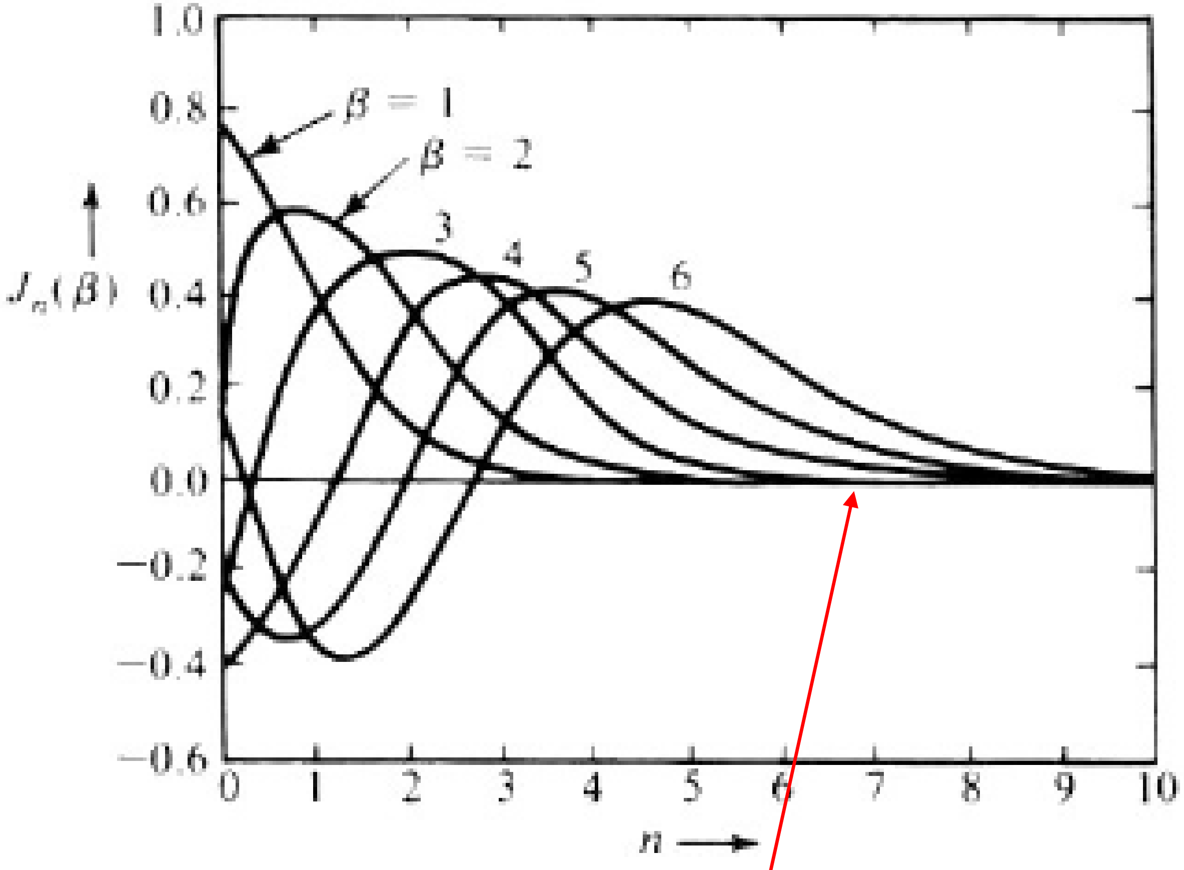
- Η πρώτη προσέγγιση ε=0,01 είναι ιδιαίτερα συντηρητική
- Η δεύτερη ε=0,1 αντιστοιχεί σε μια μικρή παραμόρφωση (και σχεδόν ταυτίζεται με το κριτήριο του 99% της ολικής ισχύος)

Πίνακας τιμών συναρτήσεων Bessel

n	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 8$	$\beta = 10$	n
0	0.998	0.990	0.938	0.765	0.224	-0.178	0.172	-0.246	0
1	0.050	0.100	0.242	0.440	0.577	-0.328	0.235	0.043	1
2	0.001	0.005	0.031	0.115	0.353	0.047	-0.113	0.255	2
3				0.020	0.129	0.365	-0.291	0.058	3
4				0.002	0.034	0.391	-0.105	-0.220	4
5					0.007	0.261	0.186	-0.234	5
6					0.001	0.131	0.338	-0.014	6
7						0.053	0.321	0.217	7
8						0.018	0.223	0.318	8
9						0.006	0.126	0.292	9
10						0.001	0.061	0.207	10
11							0.026	0.123	11
12							0.010	0.063	12
13							0.003	0.029	13
14							0.001	0.012	14
15								0.004	15
16								0.001	16

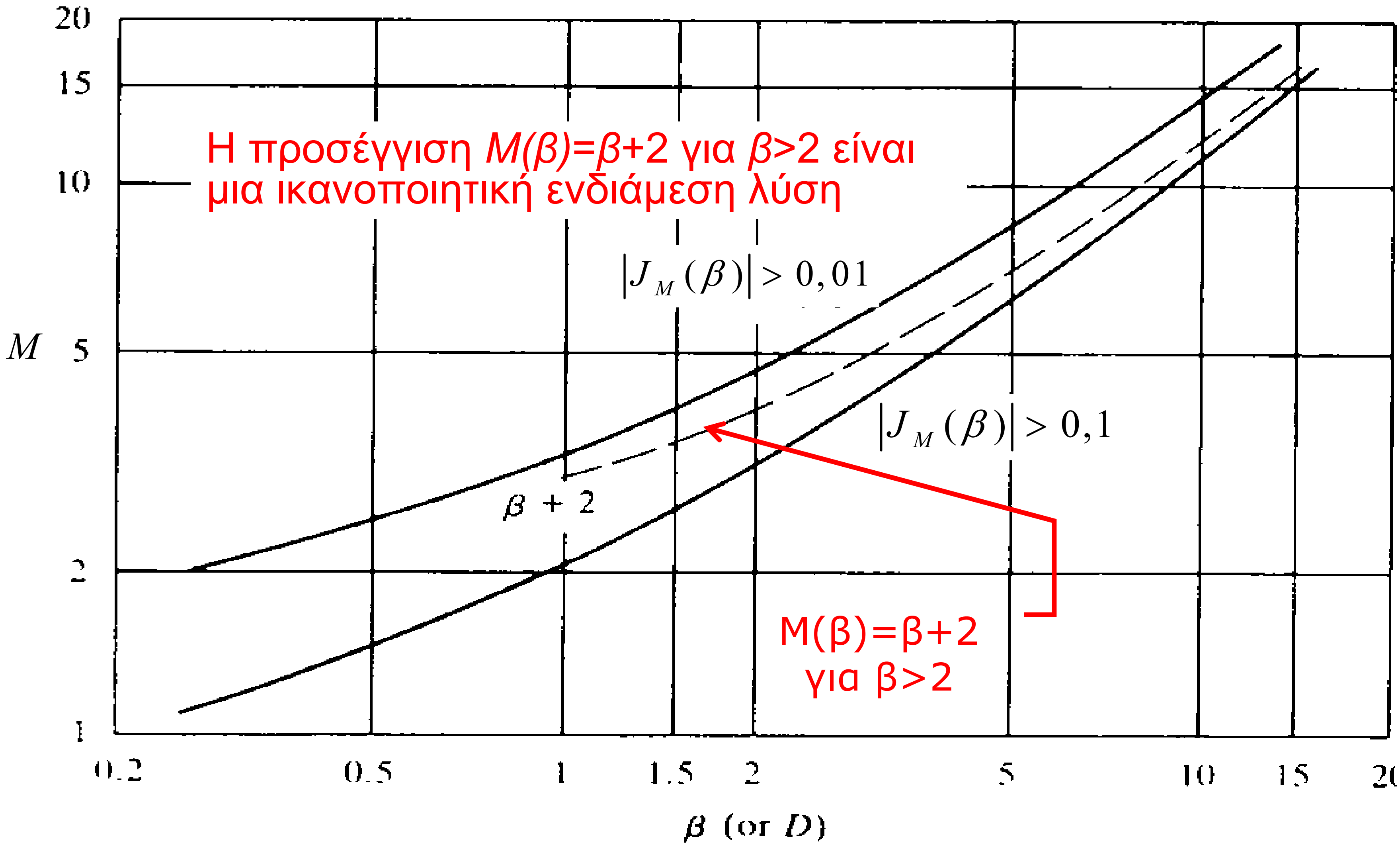
Ο τελευταίος
σημαντικός όρος
$M(\beta)=[\beta+1]$

Μια άλλη άποψη των συναρτήσεων Bessel



Όπως πριν, ο τελευταίος σημαντικός όρος M(β)=[β+1]

Ο αριθμός *M* των σημαντικών όρων ως συνάρτηση του *β*



Κανόνας Carson

- Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για μετάδοση σήματος FM (που προέρχεται από διαμόρφωση απλού τόνου) είναι

Κανόνας Carson

$$B_T = 2(\beta + 1) f_m = \begin{cases} 2\left(\dfrac{\Delta f}{f_m} + 1\right) f_m = 2\Delta f + 2 f_m & \text{FM} \\ 2(\Delta\phi + 1) f_m & \text{PM} \end{cases}$$

- με το αντίστοιχο πλήθος αρμονικών που περιέχονται σε αυτό να είναι

$$M_c = 2\lfloor \beta \rfloor + 3 = \begin{cases} 2\left\lfloor \dfrac{\Delta f}{f_m} \right\rfloor + 3 & \text{FM} \\ 2\lfloor \Delta\phi \rfloor + 3 & \text{PM} \end{cases}$$

Εύρος ζώνης σήματος FM

- Στην περίπτωση αυθαίρετου σήματος *m(t)* ο λόγος απόκλισης *D* παίζει τον ρόλο του δείκτη διαμόρφωσης *β*
- Ο λόγος απόκλισης ορίζεται ως $D = \Delta f / W$
- Η μέγιστη απαίτηση για εύρος ζώνης προκαλείται από το μέγιστο πλάτος της μέγιστης εκ των προς μετάδοση συχνοτήτων
- Το εύρος ζώνης κατ' αναλογία με τη διαμόρφωση από απλό τόνο είναι

$$B_T = 2M(D)W$$

Εύρος ζώνης σήματος FM

- Για διαμόρφωση στενής ζώνης

$$B_T = 2W$$

- Για διαμόρφωση ευρείας ζώνης

$$B_T = 2\Delta f = 2DW$$

- Κανόνας Carson

$$B_T = 2(\Delta f + W) = 2(D+1)W, \qquad \begin{matrix} D \gg 1 \\ D \ll 1 \end{matrix}$$

- Για $2<D<10$ καλύτερη προσέγγιση είναι

$$B_T = 2(\Delta f + 2W) = 2(D+2)W, \qquad D > 2$$

Εύρος ζώνης σήματος PM

- Χρήση κανόνα Carson παρόμοια με το FM
- Η στιγμιαία συχνότητα είναι

$$f_i = f_c + \frac{k_p}{2\pi}\dot{m}(t)$$

- η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι

$$\Delta f = \frac{k_p}{2\pi}\max\left\{\left|\dot{m}(t)\right|\right\}$$

Εύρος ζώνης σήματος PM

- Ο λόγος απόκλισης *D* είναι η μέγιστη απόκλιση φάσης του σήματος FM στην ακραία περίπτωση εύρους ζώνης
- Άρα η ανάλυση FM ισχύει για διαμόρφωση PM αρκεί να αντικατασταθεί το *D* με την *Δφ*
- Κανόνας Carson

$$B_T = 2(\Delta\phi + W)$$

- Όμως, σε αντίθεση με το FM ο όρος *Δφ* δεν εξαρτάται από το *W*