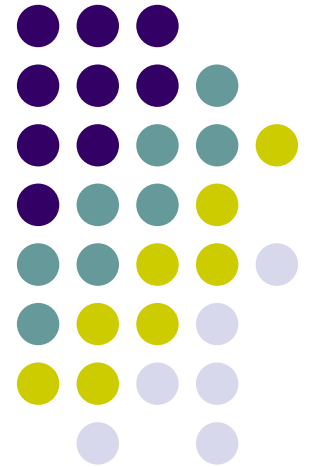


# Διαμόρφωση Συχνότητας

Frequency Modulation (FM)



# Τι συμβαίνει με τις γραμμικές διαμορφώσεις;



- Στη **γραμμική διαμόρφωση** CW (Carrier Wave) δηλαδή, AM, DSB, SSB, VSB
  - Το πλάτος ενός ημιτονικού φέροντος μεταβάλλεται σύμφωνα με την πληροφορία
  - Το διαμορφωμένο σήμα είναι μια μετατοπισμένη σε συχνότητα εκδοχή του διαμορφώνοντα σήματος
    - τα φάσματα μοιάζουν
  - Το εύρος ζώνης μετάδοσης είναι δεν υπερβαίνει το διπλάσιο του εύρους ζώνης του σήματος  $B \leq 2W$

# Όλες οι περιπτώσεις γραμμικών διαμορφώσεων



$$s(t) = A_c \left[ s_c(t) \cos(2\pi f_c t) - s_s(t) \sin(2\pi f_c t) \right]$$

- AM  $s_c(t) = 1 + k_a m(t), \quad s_s(t) = 0$
- DSB  $s_c(t) = m(t), \quad s_s(t) = 0$
- SSB  $s_c(t) = \frac{1}{2} m(t), \quad s_s(t) = \pm \frac{1}{2} \hat{m}(t)$
- VSB  $s_c(t) = \frac{1}{2} m(t), \quad s_s(t) = \pm \frac{1}{2} m_s(t)$

# Γραμμικές διαμορφώσεις και θόρυβος



- Όπως θα δούμε στη συνέχεια, δεν υπάρχει βελτίωση σηματοθορυβικής σχέσης
  - Η σηματοθορυβική σχέση δεν μπορεί να είναι καλύτερη από αυτή της μετάδοσης στη βασική ζώνη
  - Για να βελτιωθεί η σηματοθορυβική σχέση πρέπει να αυξηθεί η ισχύς εκπομπής



# Τι είναι διαμόρφωση γωνίας;

- Στις **διαμορφώσεις γωνίας** (FM, PM) το πλάτος του φέροντος διατηρείται σταθερό
  - Το σήμα μεταβάλλει τη συχνότητα ή φάση το φέροντος
- Είναι μη γραμμικές
  - Δεν υπάρχει απλή σχέση μεταξύ φάσματος μετάδοσης και φάσματος σήματος
  - Δημιουργούνται νέες συχνότητες
- Προκύπτει **βελτίωση** της επίδοσης σε σχέση με το θόρυβο και τις παρεμβολές



# Διαμόρφωση γωνίας και θόρυβος

- Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η σηματοθορυβική σχέση στην έξοδο γίνεται πολύ καλύτερη όταν αυξάνει το εύρος ζώνης
  - Το εύρος ζώνης είναι, εν γένει, μεγαλύτερο του διπλάσιου του εύρους ζώνης του σήματος  $B > 2W$
- Στις διαμορφώσεις γωνίας μπορούμε να ανταλλάξουμε εύρος ζώνης με σηματοθορυβική σχέση
  - διατηρώντας την ισχύ σταθερή

# Τι χρειάζεται η διαμόρφωση γωνίας;



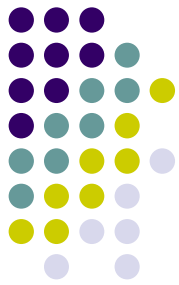
- Καλύτερη απαλοιφή θορύβου
  - Βελτίωση της πιστότητας του σήματος
- Εφαρμογές
  - Ραδιοφωνία FM
  - Ήχος τηλεοπτικού σήματος
  - Ασύρματη (κινητή) επικοινωνία
  - Συνθεσάιζερ – Yamaha, κάρτες ήχου PC (γιατί;)
  - Εγγραφή αναλογικού βίντεο σε ταινία (VCR)
    - Π.χ. το σήμα φωτεινότητας στο VHS (γιατί;)
  - UWB-FM

# Ιστορικά στοιχεία

- Η διαμόρφωση FM αποτελεί εφεύρεση του E. Armstrong (1933)
  - Έχει εφεύρει και τον υπερ-ετερόδουνο δέκτη
- Η εισαγωγή και κυριάρχηση της ραδιοφωνίας FM καθυστέρησε πολύ
  - Απειλήσε με εξαφάνιση τη ραδιοφωνία AM
    - Disruptive technology
  - Η FCC μετέφερε τη μπάντα των FM από την περιοχή 42 μέχρι 50 MHz στην περιοχή 88 μέχρι 108 MHz ώστε να υπάρξει χώρος για κανάλια TV



EDWIN H. ARMSTRONG  
1890 - 1954







# Ορισμοί

- Φέρον  $c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi_c] = A_c \cos[\theta_c(t)]$
- Διαμορφωμένο σήμα

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] = A_c \operatorname{Re}\{\exp(j\theta_i(t))\}$$

- Η διαμόρφωση γίνεται **στον εκθέτη ή στη γωνία**



# Ορισμοί (συν)

- Μέση συχνότητα για αύξουσα  $\theta_i(t)$  είναι

$$f_{\Delta t}(t) = \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t}$$

- Στιγμιαία συχνότητα

$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

- Η στιγμιαία γωνία στην περίπτωση του φέροντος

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c$$

# Διαμόρφωση φάσης

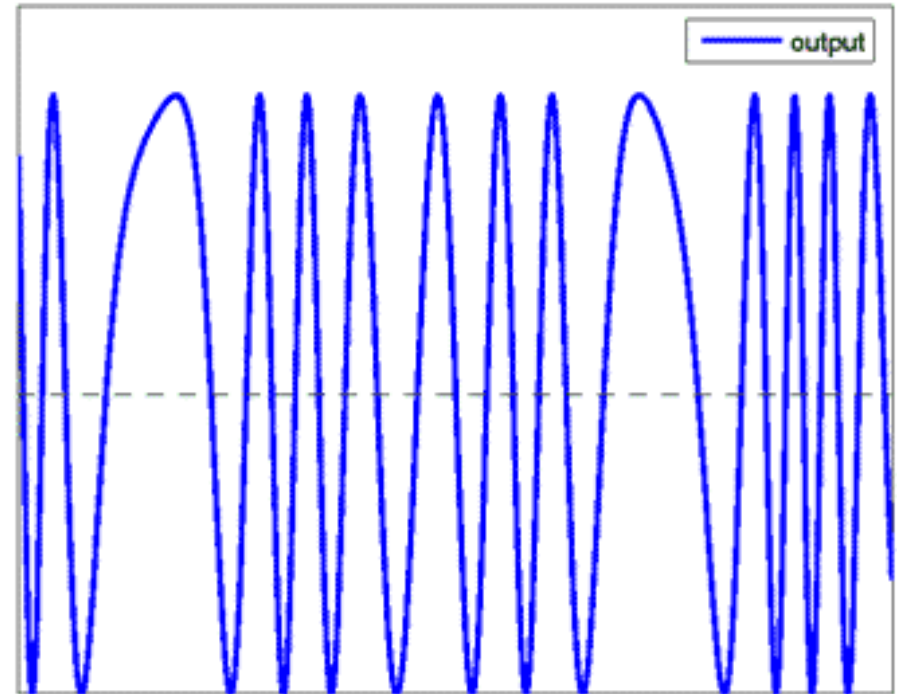
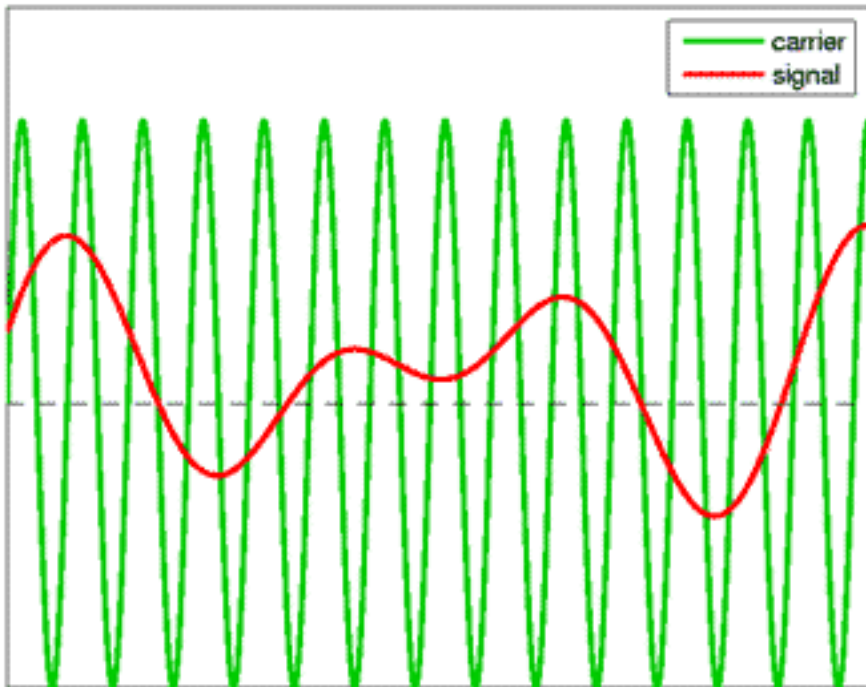
## Phase Modulation (PM)



- Η φάση του διαμορφωμένου σήματος είναι ανάλογη του προς διαμόρφωση σήματος
$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$
- Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο αδιαμόρφωτο φέρον
- Η σταθερά  $k_p$  είναι η ευαισθησία φάσης
- Το διαμορφωμένο σήμα PM είναι

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + k_p m(t) \right]$$

# Διαμόρφωση φάσης (PM)



# Διαμόρφωση συχνότητας

## Frequency Modulation (FM)



- Η στιγμιαία συχνότητα είναι ανάλογη του προς διαμόρφωση σήματος

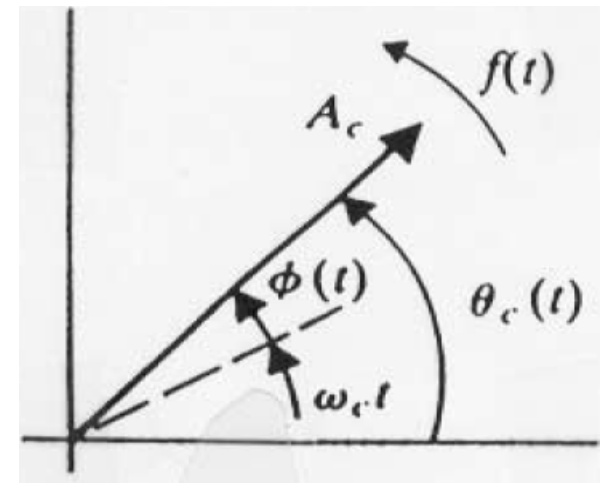
$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

- Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο αδιαμόρφωτο φέρον
- Η σταθερά  $k_f$  είναι η **ευαισθησία συχνότητας**
- Η στιγμιαία γωνία είναι

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

- Το διαμορφωμένο σήμα FM είναι

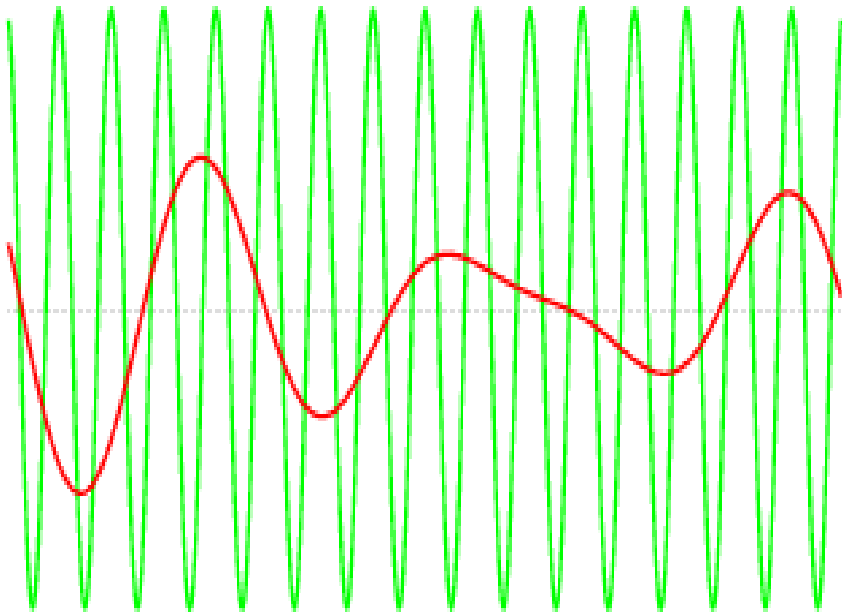
$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right]$$



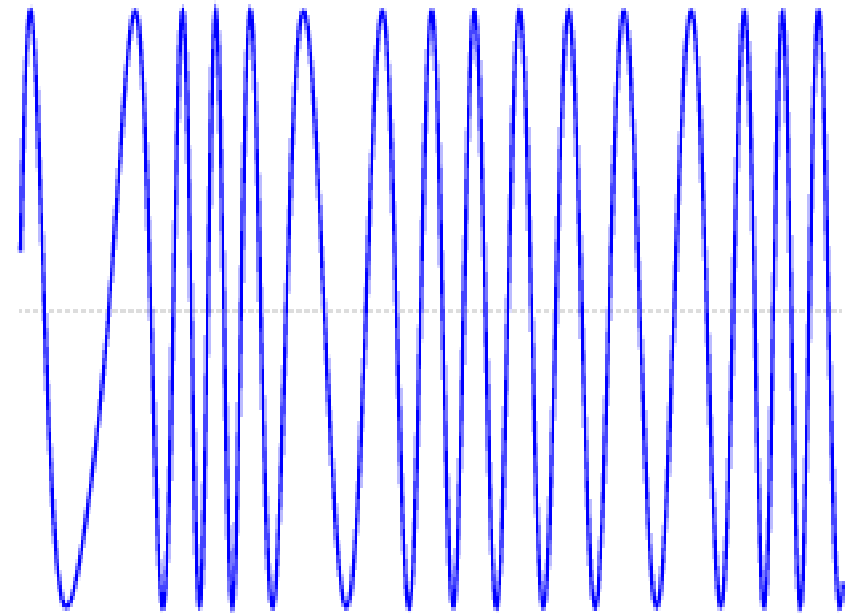
# Διαμόρφωση συχνότητας (FM)



carrier ———  
signal ———



output ———



# Χαρακτηριστικά διαμορφώσεων γωνίας (FM, PM)



- Τα σήματα FM και PM είναι παρόμοια
- Οι μηδενισμοί δεν ισαπέχουν
- Το πλάτος του διαμορφωμένου σήματος είναι σταθερό
  - Σταθερή ισχύς ανεξάρτητα από το σήμα προς διαμόρφωση

$$P = \frac{A_c^2}{2}$$



# Μηδενισμοί

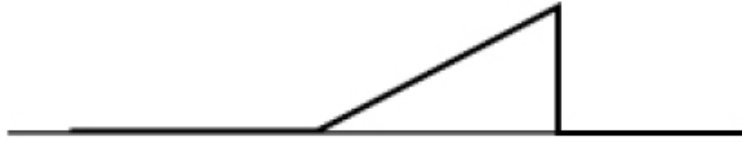
- Στη διαμόρφωση γωνίας (FM, PM) η πληροφορία του σήματος μεταφέρεται στους **μηδενισμούς (zero crossings)** του διαμορφωμένου σήματος
- Βλέποντας σε παλμογράφο το διαμορφωμένο σήμα, δεν είναι εύκολο να μαντέψουμε το είδος διαμόρφωσης
  - Το πλάτος είναι σταθερό
  - Στη συχνότητα εμφανίζονται πυκνώματα και αραιώματα



# Μηδενισμοί



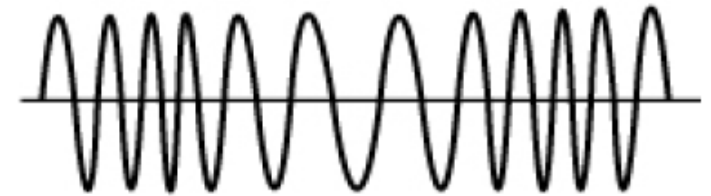
Modulating  
signal



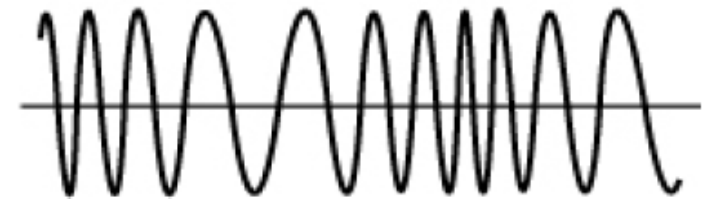
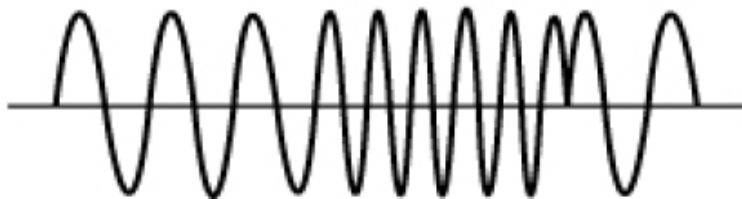
AM



FM



PM





# Στιγμιαία φάση/συχνότητα

$$\phi_i(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

Μπορούμε να αγνοήσουμε την αρχική τιμή της φάσης και να χρησιμοποιήσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

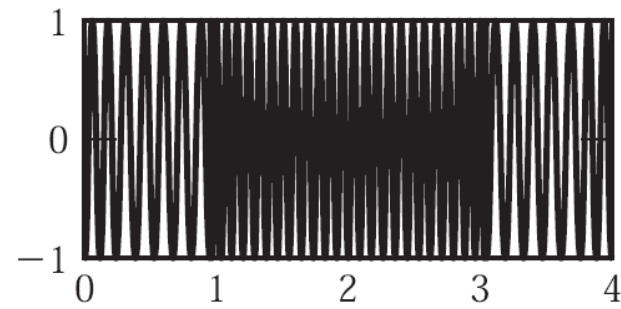
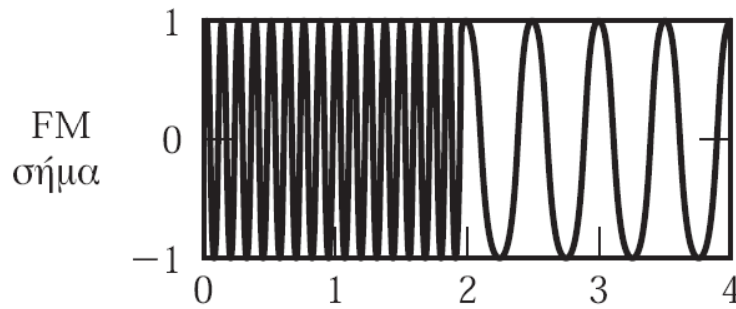
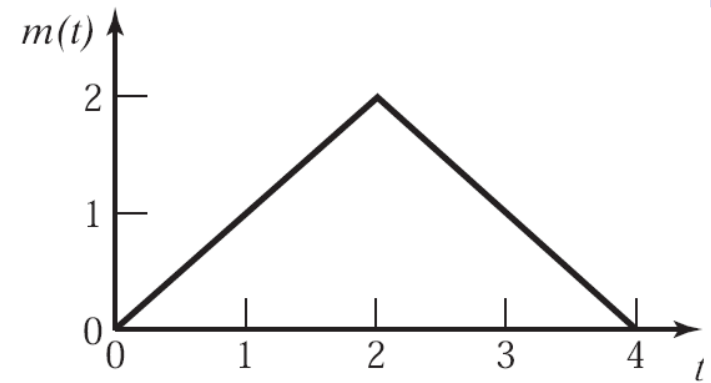
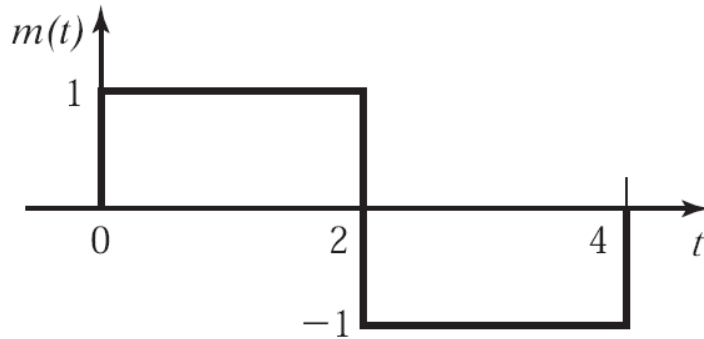
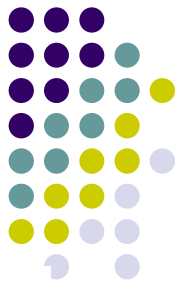
$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta_i(t) = \begin{cases} f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} & \text{PM} \\ f_c + k_f m(t) & \text{FM} \end{cases}$$



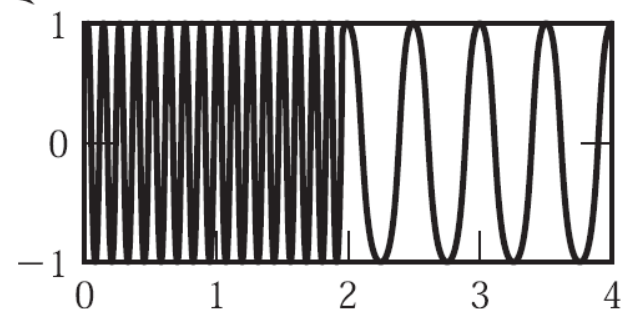
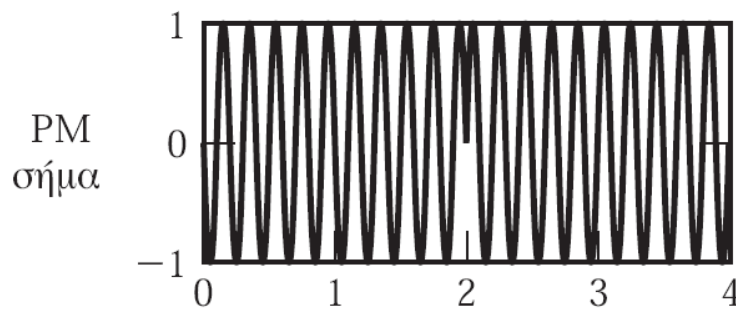
# Ισοδυναμία FM και PM

- Το διαμορφωμένο σήμα FM που προκύπτει από την **παράγωγο** του προς διαμόρφωση σήματος αντιστοιχεί σε διαμορφωμένο σήμα PM
- Το διαμορφωμένο σήμα PM που προκύπτει από το **ολοκλήρωμα** του προς διαμόρφωση σήματος αντιστοιχεί σε διαμορφωμένο σήμα FM

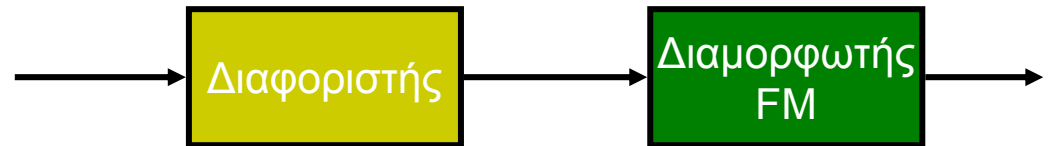
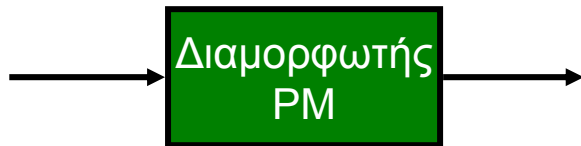
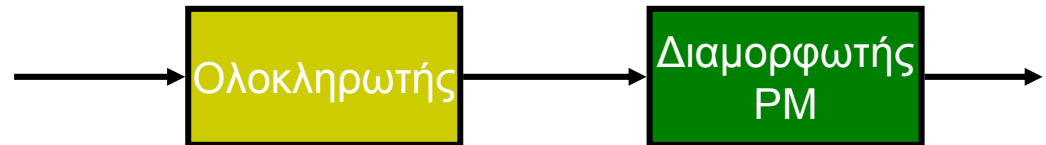
# Ισοδυναμία FM και PM



Ισοδύναμα



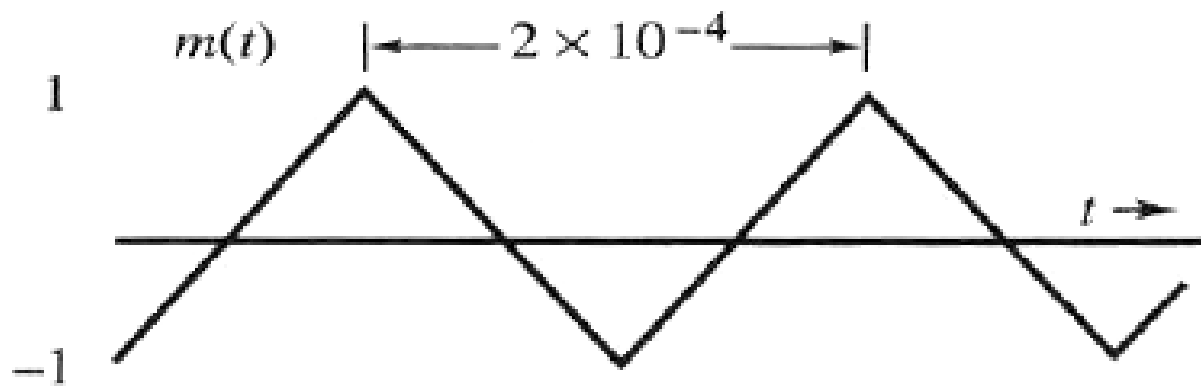
# Ισοδυναμία FM και PM





# Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

- Ποια είναι τα σήματα FM και PM που παράγονται από το αναλογικό σήμα  $m(t)$  όταν  $k_f=10^5$ ,  $k_p=10\pi$  και  $f_c=100$  MHz;





# Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

- Περίπτωση FM

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) = 10^8 + 10^5 m(t)$$

$$f_i|_{\min} = 99,9 \text{ MHz}, \quad f_i|_{\max} = 100,1 \text{ MHz}$$

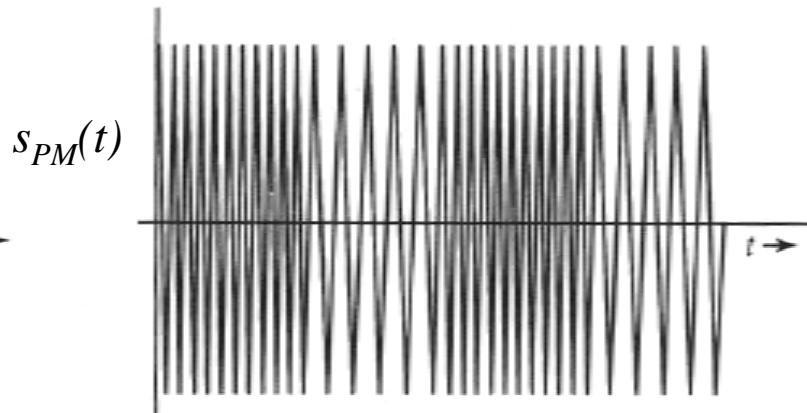
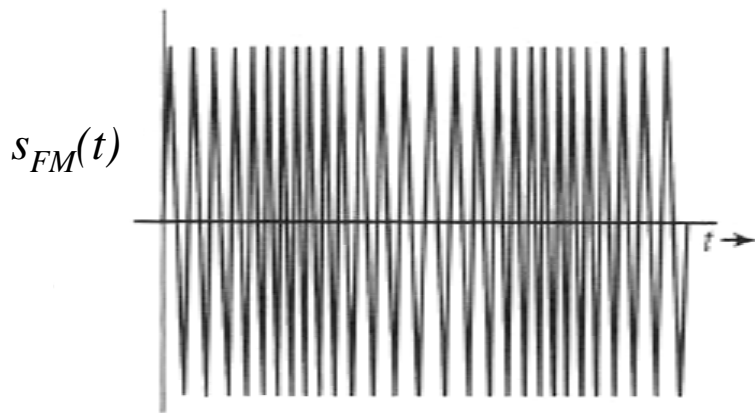
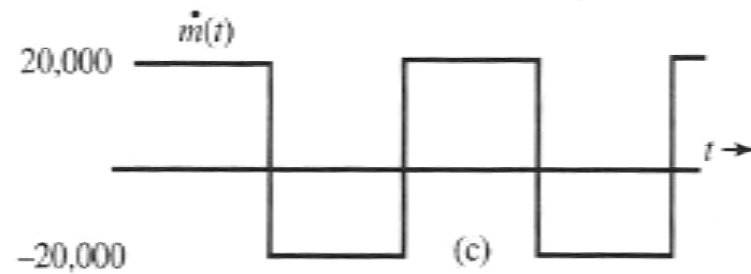
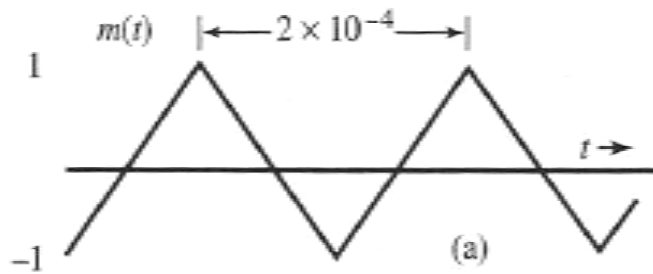
- Περίπτωση PM

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} = 10^8 + 5\dot{m}(t)$$

$$f_i|_{\min} = 99,9 \text{ MHz}, \quad f_i|_{\max} = 100,1 \text{ MHz}$$



# Σήμα FM και PM



Αύξηση συχνότητας

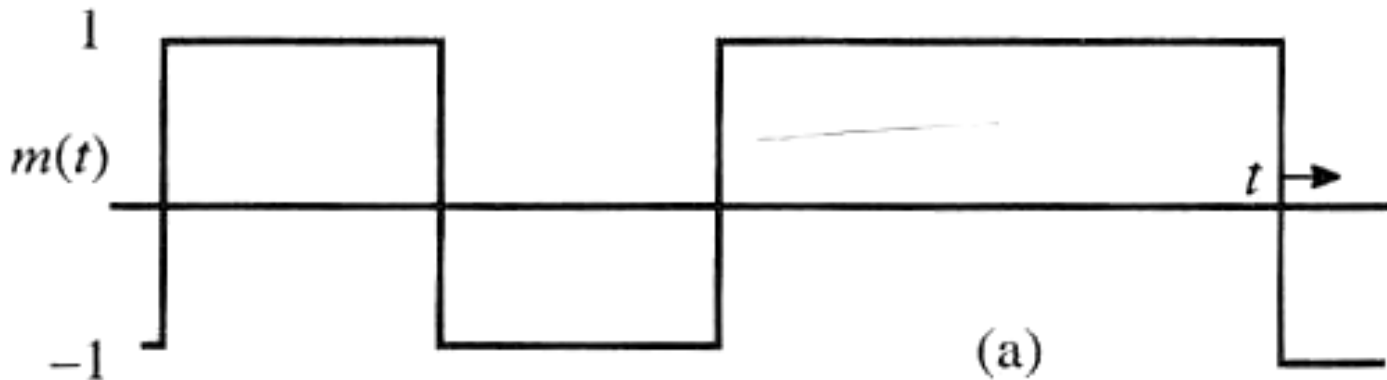
Μείωση συχνότητας





# Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

- Ποια είναι τα σήματα FM και PM που παράγονται από το ψηφιακό σήμα  $m(t)$  όταν  $k_f=10^5$ ,  $k_p=\pi/2$  και  $f_c=100$  MHz;





# Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

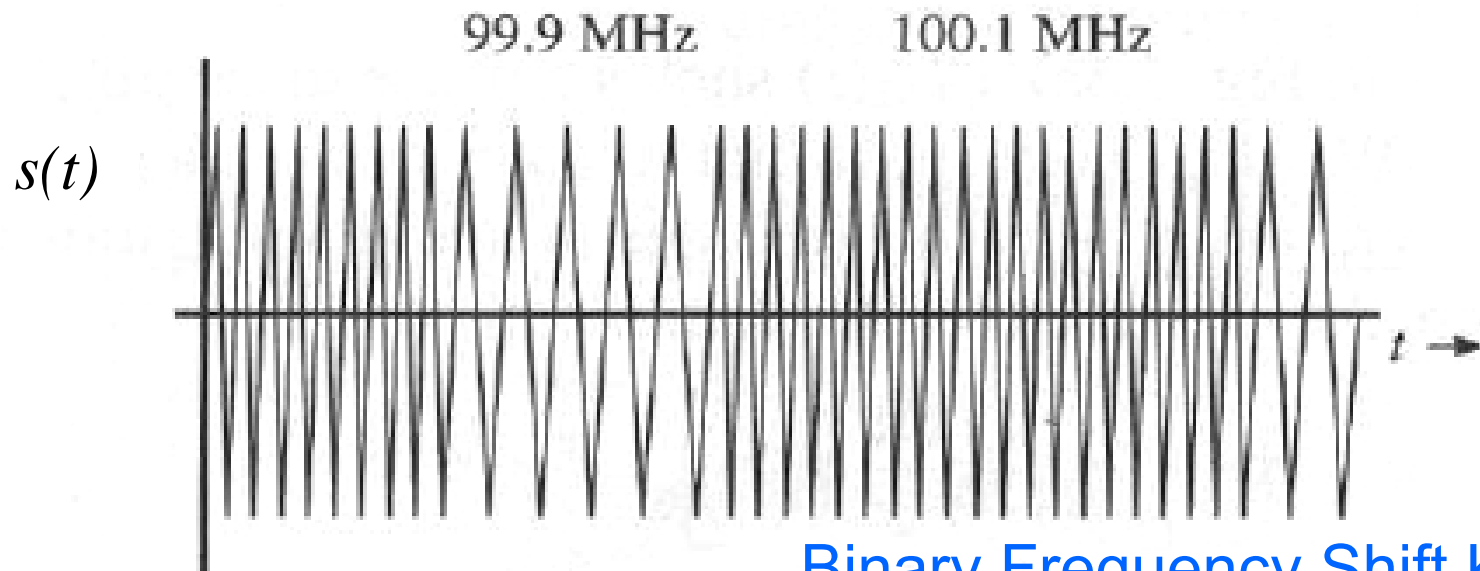
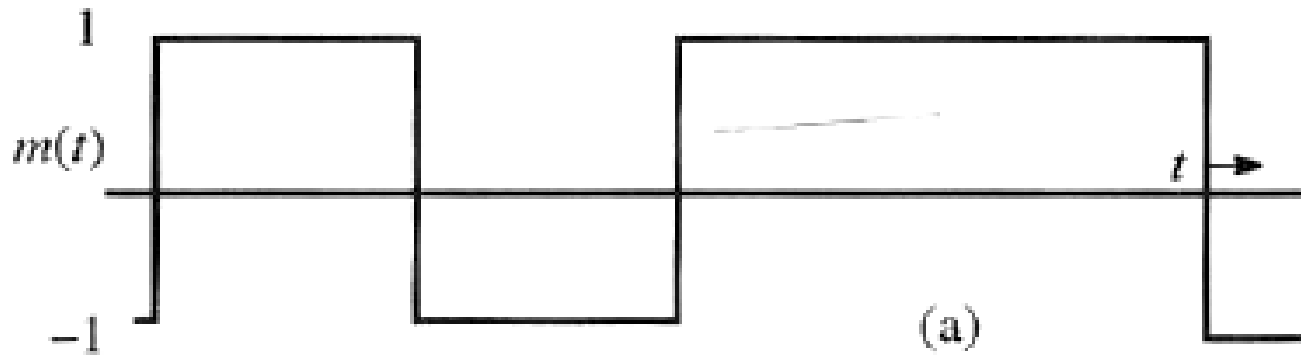
- Περίπτωση FM

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) = 10^8 + 10^5 m(t)$$

- Περίπτωση PM

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} = 10^8 + \frac{1}{4} \dot{m}(t)$$

# Σήμα FM

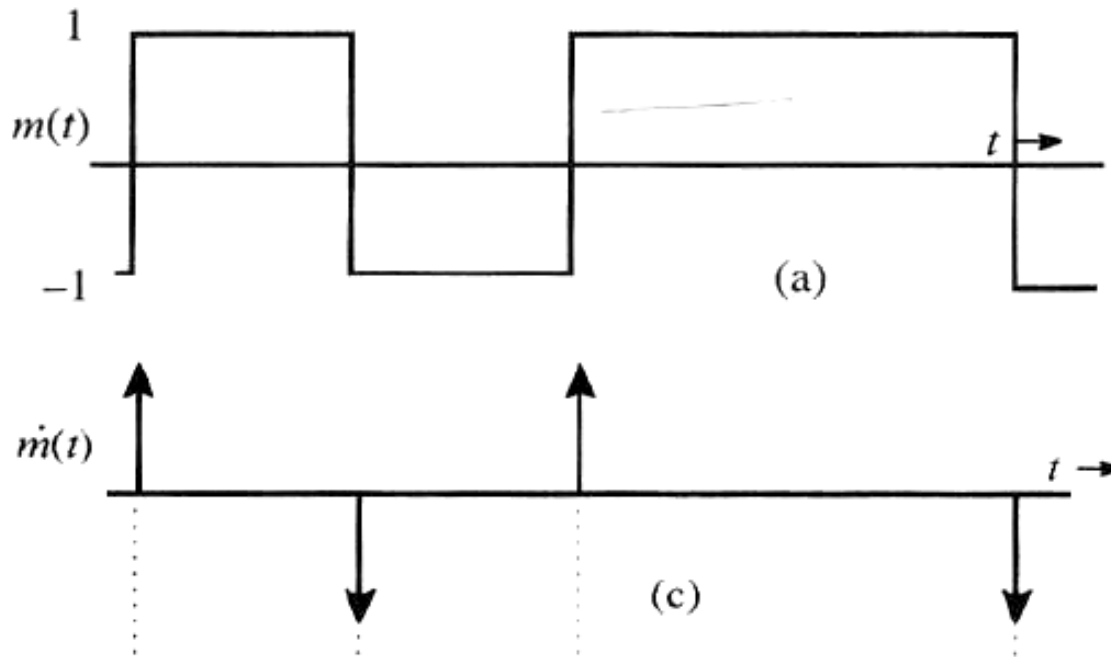


Binary Frequency Shift Keying



# Σήμα PM

- Οι ασυνέχειες του σήματος δημιουργούν συναρτήσεις δέλτα στην παράγωγό του



- Τι συμβαίνει τότε;



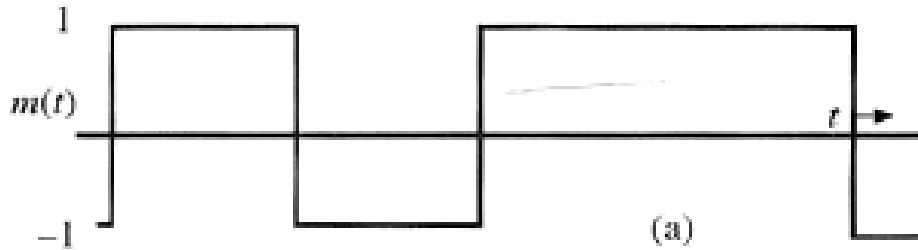
# Σήμα PM

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + \frac{\pi}{2} m(t) \right]$$
$$= \begin{cases} A_c \sin [2\pi f_c t] & \text{όταν } m(t) = -1 \\ -A_c \sin [2\pi f_c t] & \text{όταν } m(t) = 1 \end{cases}$$

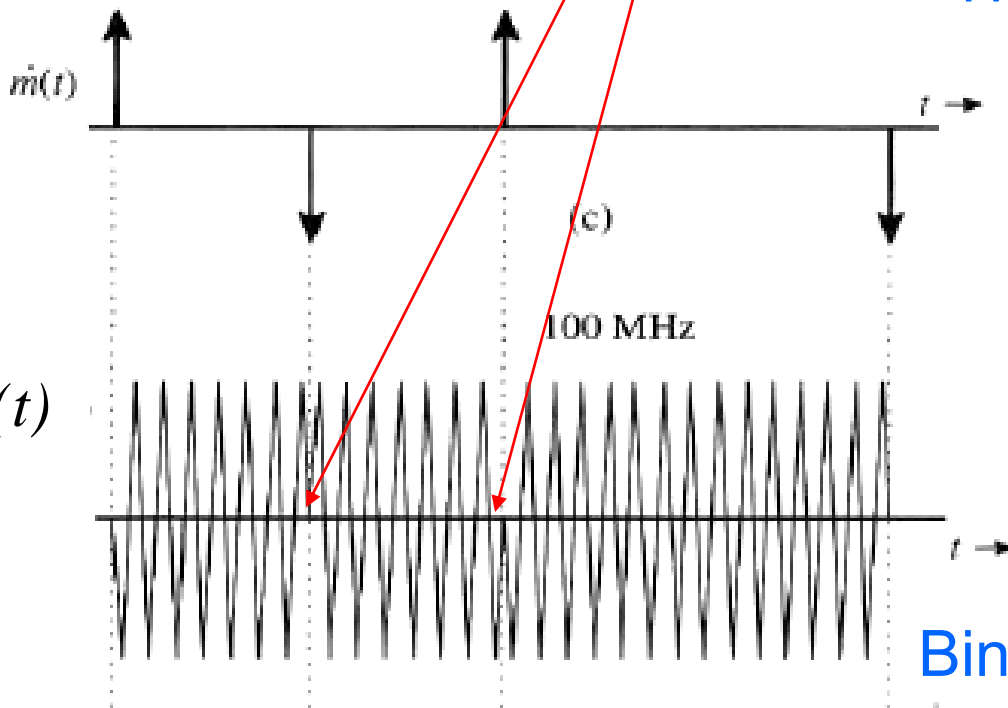
- Το διαμορφωμένο σήμα αντιστρέφει το πρόσημο (+sin σε -sin) όπου το  $m(t)$  παρουσιάζει ασυνέχεια
- Αυτό μπορεί να συμβεί οποτεδήποτε, αλλά για ευκολία το σημειώνουμε στους μηδενισμούς του φέροντος



# Σήμα ΡΜ



- Η συχνότητα είναι παντού η ίδια
- Η φάση αλλάζει κατά  $\pm\pi/2$

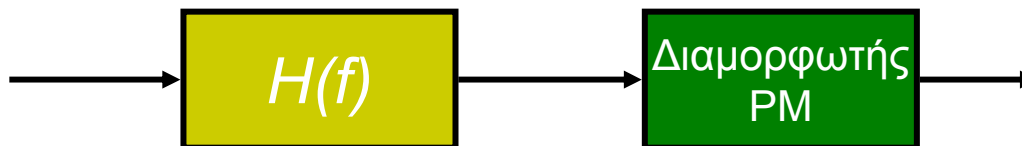


Binary Phase Shift Keying

# Γενικευμένη διαμόρφωση γωνίας



- Ο διαμορφωτής φάσης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γενικό εργαλείο
  - Εάν προηγηθεί ένας ολοκληρωτής παράγει διαμόρφωση FM
  - Εάν προηγηθεί κάποιο γραμμικό σύστημα παράγεται μια μείξη FM/PM
    - Το σήμα που εκπέμπουν οι σταθμοί FM είναι μια τέτοια περίπτωση





# Απόκλιση φάσης

- **Απόκλιση φάσης** (phase deviation) είναι η μέγιστη διαφορά της φάσης του διαμορφωμένου σήματος σε σχέση με τη φάση του αδιαμόρφωτου

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \max \{|\phi_i(t)|\} \\ &= \max \{|\theta_i(t) - 2\pi f_c t|\} \\ &= \max \{|k_p m(t)|\} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Delta\phi = A_m k_p, A_m = \max \{|m(t)|\}$$





# Απόκλιση συχνότητας

- **Απόκλιση συχνότητας** (frequency deviation) είναι η μέγιστη διαφορά της στιγμιαίας συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος σε σχέση με τη συχνότητα του αδιαμόρφωτου

$$\Delta f = \max \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta_i(t) - f_c \right| \right\}$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi_i(t) \right| \right\}$$

$$= \max \left\{ |k_f m(t)| \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta f = A_m k_f, A_m = \max \left\{ |m(t)| \right\}$$

# Κανονικοποιημένο σήμα προς διαμόρφωση



- Διαμόρφωση φάσης

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \Delta\phi x(t)]$$

- Διαμόρφωση συχνότητας

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right]$$

- όπου  $x(t)$  το κανονικοποιημένο προς διαμόρφωση σήμα

$$x(t) = \frac{m(t)}{\max\{|m(t)|\}}$$

# Κανονικοποιημένο σήμα προς διαμόρφωση



	Στιγμιαία φάση	Στιγμιαία συχνότητα
PM	$\Delta\phi x(t)$	$f_c + \frac{\Delta\phi}{2\pi} \dot{x}(t)$
FM	$2\pi\Delta f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$f_c + \Delta f x(t)$



# Διαμόρφωση από απλό τόνο

- Έστω  $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

- Διαμόρφωση φάσης

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \Delta\phi \cos(2\pi f_m t)] = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_p \cos(2\pi f_m t)]$$

- Διαμόρφωση συχνότητας

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t)\right] = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)]$$

- ΟΠΟΥ Ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta$  είναι

$$\beta = \begin{cases} \Delta\phi = k_p A_m & \text{PM} \\ \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m} & \text{FM} \end{cases}$$



# Λόγος διαμόρφωσης

- Ο προηγούμενος ορισμός του δείκτη διαμόρφωσης μπορεί να γενικευθεί για αυθαίρετο σήμα προς διαμόρφωση ως εξής

$$D = \begin{cases} \Delta\phi_{\max} = k_p \max \{|m(t)|\} & \text{PM} \\ \frac{\Delta f_{\max}}{W} = \frac{k_f \max \{|m(t)|\}}{W} & \text{FM} \end{cases}$$

- όπου  $W$  είναι το εύρος ζώνης του σήματος προς διαμόρφωση



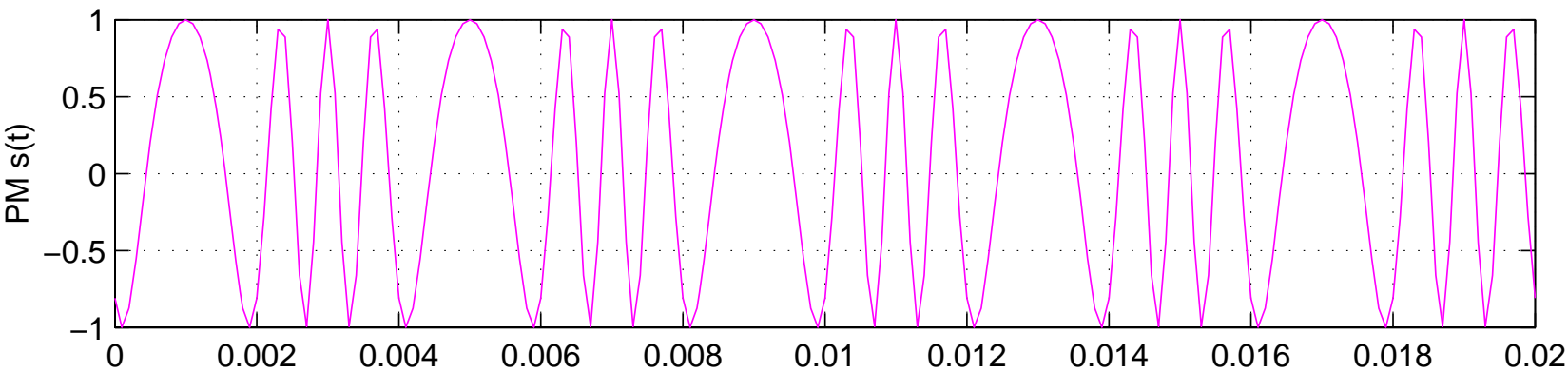
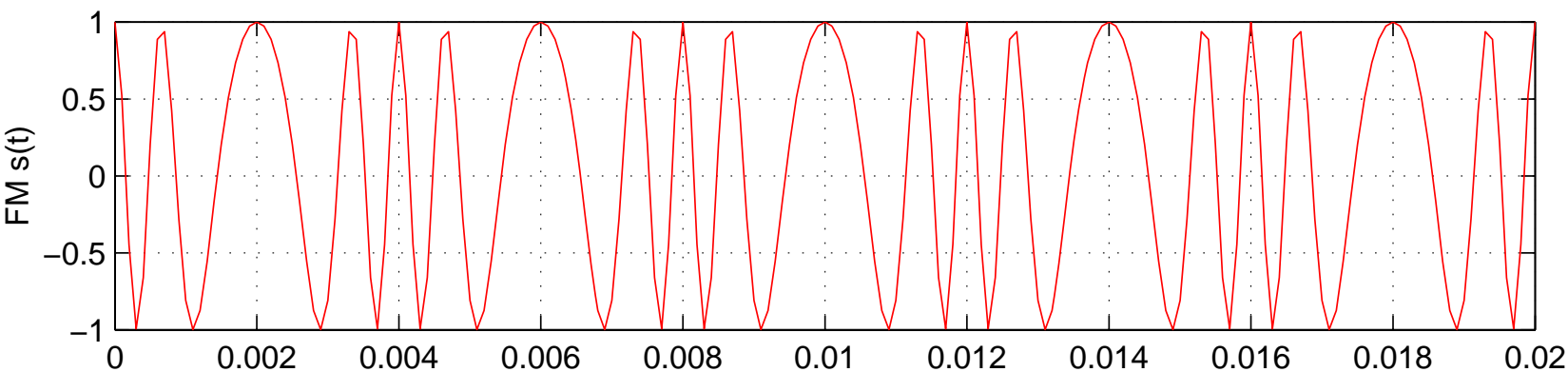
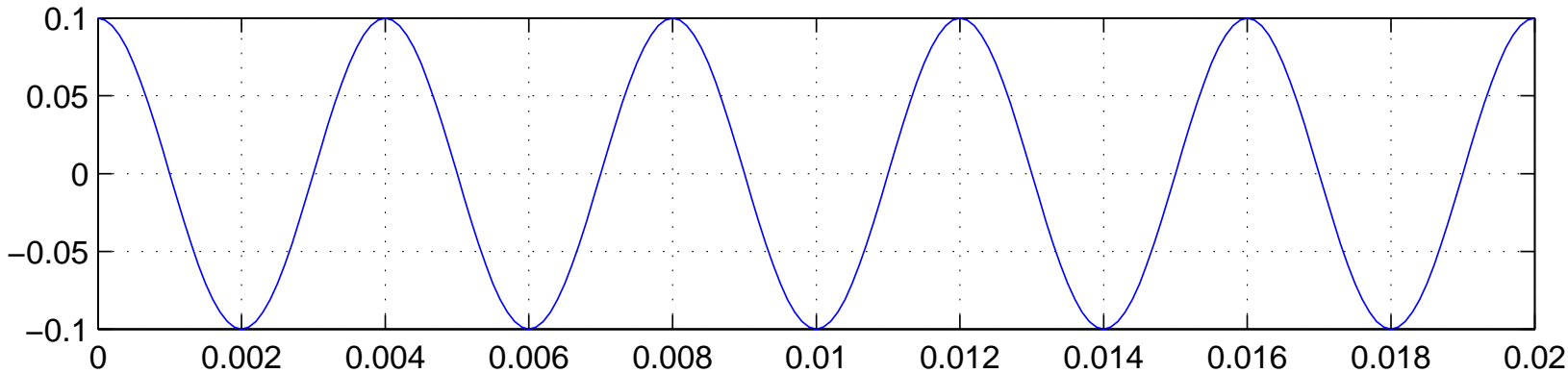
# Φάσμα σήματος FM

- Είναι το εύρος ζώνης του σήματος FM το διπλάσιο της απόκλισης συχνότητας;

$$f_c - \Delta f \leq f_i \leq f_c + \Delta f$$

- **ΟΧΙ**
- Η στιγμιαία συχνότητα δεν είναι ισοδύναμη με το φάσμα

message  $m(t)$



message spectrum  $M(f)$

