Εργαστηριακή Άσκηση 2
Φασματική ανάλυση με το MATLAB®

Σκοπός της δεύτερης σειράς ασκήσεων είναι η περαιτέρω εξοικείωση με το προγραμματιστικό περιβάλλον της εφαρμογής MATLAB. Το MATLAB (www.mathworks.com) είναι ένα διαδραστικό εμπορικό πρόγραμμα (Windows, Linux, Unix) με το οποίο μπορείτε να κάνετε εύκολα αριθμητικές πράξεις με πίνακες. Στο Εργαστήριο Προσωπικών Υπολογιστών (ΕΠΥ) της Σχολής θα βρείτε εγκατεστημένη την έκδοση R2012b. Μπορείτε επίσης να έχετε πρόσβαση στο MATLAB μέσω της ιστοσελίδας https://cloudfront0.central.ntua.gr/sgd/hierarchy.jsp του Κέντρου Υπολογιστών (ΚΗΥ) του ΕΜΠ (αφού περάσετε έλεγχο ταυτότητας με το όνομα χρήστη και συνθηματικό που σας έχει δοθεί από το ΚΗΥ). Εκεί είναι εγκατεστημένη η έκδοση R2011b όμως το περιβάλλον είναι Linux. Η πρόσβαση μέσω του ΚΗΥ θα σας είναι χρήσιμη για να προετοιμαστείτε από το σπίτι.

Για να εισέλθετε στο σταθμό εργασίας του ΕΠΥ, χρησιμοποιείστε **το όνομα χρήστη και συνθηματικό για πρόσβαση στις ηλεκτρονικές υπηρεσίες του Ιδρύματος** (που σας έχει δοθεί από το ΚΗΥ). Μετά από επιτυχή ταυτοποίησή σας από τον εξυπηρετητή LDAP, θα αποκτήσετε πρόσβαση στον τοπικό υπολογιστή με όνομα χρήστη `labuser`. Εάν στην οθόνη δεν εμφανίζεται σχετικό παράθυρο διαλόγου για την εισαγωγή στο σύστημα, πιέστε ταυτόχρονα τα πλήκτρα *`Alt+Ctrl+Del`*. Στις συγκεκριμένες ασκήσεις, το λειτουργικό σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί είναι τα Windows XP.

Μέρος 1: Φασματική ανάλυση

Το αντικείμενο της φασματικής ανάλυσης μπορεί να περιγραφεί σε συντομία ως εξής: δοθέντος ενός πεπερασμένου πλήθους δειγμάτων κάποιου σήματος, θέλουμε να εκτιμήσουμε το φάσμα του άπειρης διάρκειας σήματος. Συγκεκριμένα, θέλουμε να βρούμε το φασματικό περιεχόμενο του σήματος με τη βοήθεια του DFT, να εντοπίσουμε την παρουσία ημιτονοειδών και προσδιορίσουμε τη συχνότητά τους. Η κύρια δυσκολία προκύπτει διότι στην πράξη το διαθέσιμο σήμα μπορεί να είναι βραχύ (π.χ. το σήμα ραντάρ). Επίσης, ακόμη και εάν το σήμα έχει μεγάλη διάρκεια, το φασματικό του περιεχόμενο μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο (π.χ. το φάσμα σε σήμα μουσικής). Το φάσμα επομένως μπορεί να θεωρηθεί σταθερό μόνο για μικρές περιόδους.

Για τη μαθηματική περιγραφή του προβλήματος πρέπει να συσχετίσουμε το φάσμα του άπειρης διάρκειας σήματος με αυτό του χρονικά περιορισμένου. Εάν $y[n]$ είναι τα δείγματα του άπειρης διάρκειας σήματος $y(t)$, το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο για την περιγραφή του πεπερασμένης διάρκειας σήματος $x[n]$, $0 \le n \le N-1$ είναι $x[n]=y[n]w_r[n]$, όπου

$$w_r[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι μια συνάρτηση ορθογωνικού παραθύρου.

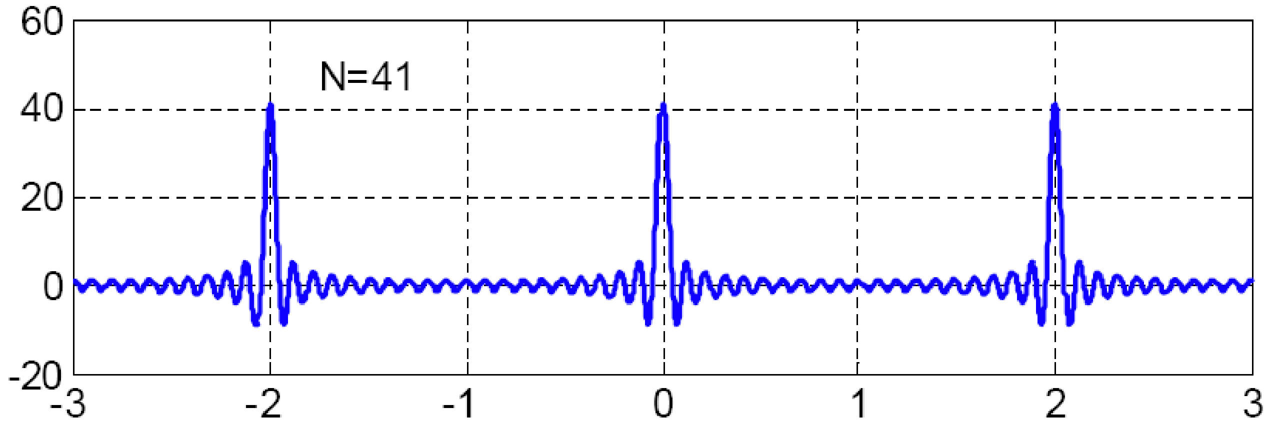
Γνωρίζετε ήδη ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου $Y(\phi)$ του $y(t)$ είναι μια υπό κλίμακα περιοδική επανάληψη του μετασχηματισμού Fourier $Y(f)$ του σήματος. Ο DTFT του πεπερασμένης διάρκειας σήματος $X(\phi)$ μπορεί να υπολογισθεί από τον DTFT του άπειρης διάρκειας σήματος $Y(\phi)$ ως συνέλιξη στο πεδίο συχνότητας $X(\phi) = Y(\phi) * W_r(\phi)$, όπου $W_r(\phi)$ είναι ο DTFT του ορθογωνικού παραθύρου $w_r[n]$, δηλαδή,

$$W_r(\phi) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot \exp(-j2\pi n\phi) = \frac{1-\exp(jN\phi)}{1-\exp(j\phi)} = \exp\left(j\phi\frac{N-1}{2}\right) D(N,\phi)$$

όπου

$$D(N,\phi) \triangleq \frac{\sin(\phi N/2)}{\sin(\phi/2)}$$

είναι γνωστό ως πυρήνας Dirichlet (Dirichlet kernel). Ο πυρήνας Dirichlet $D(L,\phi)$ είναι παρόμοιος με τη συνάρτηση sinc, αλλά είναι περιοδική συνάρτηση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρείστε ότι ο κύριος λοβός έχει ύψος N και οι πλησιέστεροι μηδενισμοί απέχουν $1/N$ από το μέγιστο, οπότε το εύρος του είναι $2/N$. Εκ των πλευρικών λοβών, ο μεγαλύτερος έχει πλάτος μικρότερο κατά 13 dB σε σχέση με τον κύριο (ανεξάρτητα του N). Ο κύριος λοβός στενεύει όσο το N μεγαλώνει και ο πυρήνας ομοιάζει με τη συνάρτηση δέλτα.

Από τη μορφή του πυρήνα Dirichlet είναι εμφανής η επίδραση του ορθογωνικού παραθύρου, δηλαδή, του περιορισμού της χρονικής διάρκειας του σήματος. Ο περιορισμός της χρονικής διάρκειας, εμφανίζεται στο πεδίο συχνότητας (στον DTFT) ως *εξομάλυνση* (smearing) ακμών του φάσματος του σήματος, που οφείλεται στη συνέλιξη με τον κύριο λοβό, και ως φασματική *διαρροή* (leakage), που οφείλεται στους πλευρικούς λοβούς. Αποτέλεσμα των δύο αυτών φαινομένων είναι η απώλεια διακριτικής ικανότητας, μιας και γειτονικές συχνότητες συγχέονται, καθώς και απόκρυψη ασθενών φασματικών συνιστωσών από τους σχετικά υψηλούς πλευρικούς λοβούς.

1.1 Παράδειγμα ενός απλού ημιτονοειδούς σήματος

Δοκιμάστε στη συνέχεια τις παρακάτω εντολές στο παράθυρο εντολών του MATLAB προκειμένου να διαπιστώσετε την επίδραση του ορθογωνικού παραθύρου στην περίπτωση ενός απλού ημιτονικού σήματος. Στην προτροπή >> πληκτρολογείστε τις εντολές που ακολουθούν.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Παράδειγμα 1 - DFT ενός ημιτονικού σήματος
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Διαγράψτε το παρελθόν
%
clear all             % διαγραφή του χώρου εργασίας
close all             % κλείσιμο όλων των γραφικών παραστάσεων
clc                   % εκκαθάριση του παραθύρου εντολών
%
% Δημιουργήστε ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 0.25 Hz
%
L=32;                 % μήκος σήματος
Fs=1;                 % συχνότητα δειγματοληψίας 1 Hz
Ts=1/Fs;              % περίοδος δειγματοληψίας
T=L*Ts;               % διάρκεια του σήματος 32 sec
n=[0:Ts:T-Ts];        % διακριτός άξονας χρόνου
A=1;                  % πλάτος σήματος
```

```
phi=0;                % φάση σήματος
f=0.25;               % συχνότητα (κύκλοι/δείγμα)
x=A*cos(2*pi*n*f ...% δειγματοληπτημένο
            +phi);   % ανά 1 sec σήμα
X=fft(x);             % φάσμα
%
% Χρονική αναπαράσταση σήματος
%
figure(1);        % άνοιγμα παραθύρου για γραφική παράσταση
subplot(3,1,1);  % χωρισμός του παραθύρου σε 3x1 μέρη και επιλογή
                  % του 1ου για το επόμενο διάγραμμα
plot(n,x,'*k');  % απεικόνιση των δειγμάτων με αστεράκια (*) μαύρου χρώματος (k)
                  % δείτε help plot για τη χρήση σειράς τριών χαρακτήρων ‘xyz’
                  % ώστε να δηλωθεί το χρώμα, το σύμβολο και το είδος
                  % της γραμμής που θα σχεδιασθεί
pause             % αναμονή για να δείτε το σχήμα
                  % πιέστε ένα πλήκτρο για να συνεχίσετε
hold on;          % συγκράτηση ώστε το επόμενο διάγραμμα να εμφανισθεί
                  % στους ίδιους άξονες με το προηγούμενο
t=0:0.1:T;        % άξονας χρόνου με ανάλυση 0.1 sec
plot(t,A*cos(2*pi*f*t+phi),'-b'); % απεικόνιση σήματος με συνεχή γραμμή (-)
                  % μπλε χρώματος (b)
grid off;         % αφαίρεση πλέγματος από τους άξονες
title('Sinusoid at 1/4 the Sampling Rate'); % τίτλος διαγράμματος
xlabel('Time (samples)');                   % λεζάντα στον άξονα x
ylabel('Amplitude');                        % λεζάντα στον άξονα y
hold off;         % απελευθέρωση ώστε το επόμενο διάγραμμα
                  % να εμφανισθεί σε νέους άξονες
pause
%
% Αναπαράσταση σήματος στο πεδίο συχνότητας
%
magX=abs(X);          % πλάτος του φάσματος
N=length(X);          % μήκος FFT (=L εδώ)
fn=[0:1/N:1-1/N];     % άξονας κανονικοποιημένων συχνοτήτων
subplot(3,1,2);       % χωρισμός του παραθύρου σε 3x1 μέρη και επιλογή
                      % του 2ου για το επόμενο διάγραμμα
stem(fn,magX,'ok'); % απεικόνιση των τιμών ως μίσχων, γραμμών που αρχίζουν
                      % από τον άξονα x και τερματίζουν σε μικρό κύκλο
grid on;              % εμφάνιση πλέγματος στους άξονες
xlabel('Normalized Frequency (cycles per sample))');
ylabel('Magnitude (Linear)');
pause
%
% το ίδιο σε λογαριθμική κλίμακα (dB):
%
spec=20*log10(magX);     % πλάτος του φάσματος σε dB
subplot(3,1,3);          % χωρισμός του παραθύρου σε 3x1 μέρη και επιλογή
                         % του 3ου για το επόμενο διάγραμμα
plot(fn,spec,'--sr');    % απεικόνιση ως μικρά τετράγωνα (s) συνδεδεμένα
                         % με διακεκομμένη γραμμή (--) κόκκινου χρώματος (r)
axis([0 1 -300 30]);     % εμφάνιση σε κλίμακα από -300 έως 30 dB
grid on;                 % εμφάνιση πλέγματος στους άξονες
xlabel('Normalized Frequency (cycles per sample))');
ylabel('Magnitude (dB)');
```

Αποθηκεύστε τον κώδικα ως αρχείο M-file στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα lab2_1_nnnnn.m, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας.

Ερώτηση 1: Γιατί στην πρώτη γραφική παράσταση αντί της εντολής `plot(n,x,'-b')` χρησιμοποιήθηκε η εντολή `plot(t,A*cos(2*pi*f*t+phi),'-b')`; Γράψτε την απάντησή σας σε ένα αρχείο κειμένου lab2_nnnnn.txt, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας, χρησιμοποιώντας το Notepad από το μενού των Windows (*Start → Programs → Accessories → Notepad*) και αποθηκεύστε το στον φάκελο My Documents. Θα υποβάλετε το αρχείο αυτό ηλεκτρονικά στο τέλος, αφού απαντήσετε και τις επόμενες ερωτήσεις, οπότε μπορείτε να τα αφήσετε ανοικτό.

1.2 Το προηγούμενο παράδειγμα με ελαφρά διαφορετική συχνότητα

Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση με ελαφρά διαφοροποιημένη συχνότητα κάνοντας τις ακόλουθες αλλαγές στον κώδικα του παραδείγματος 1.1 και συγκρίνατε τα αποτελέσματα με αυτά του πρώτου παραδείγματος.

```
…
f=0.25+0.5/L;    % συχνότητα περίπου 0.25 (κύκλοι/δείγμα)
…
figure(2);       % άνοιγμα παραθύρου για γραφική παράσταση
…
title('Sinusoid NEAR 1/4 the Sampling Rate'); % τίτλος διαγράμματος
…
axis([0 1 0 30]);     % εμφάνιση σε κλίμακα από 0 έως 30 dB
…
```

Αποθηκεύστε τον κώδικά σας ως αρχείο M-file στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα lab2_2_nnnnn.m, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας.

1.3 Δείτε όλο το φάσμα

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων περιπτώσεων βλέπετε σημαντική διαφορά στο διάγραμμα πλάτους του φάσματος του δευτέρου παραδείγματος λόγω της έντονης φασματικής διαρροής. Η φασματική διαρροή όμως δεν ήταν εμφανής στην περίπτωση του σήματος του πρώτου παραδείγματος. Για να γίνει κατανοητός ο λόγος θα πρέπει να δείτε την πραγματική μορφή του φάσματος του σήματος. Προς τούτο θα πρέπει να υπολογίσετε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) του σήματος σε περισσότερα σημεία. Όπως είδατε στην "Εργαστηριακή Άσκηση 1" αυτό γίνεται πολύ εύκολα παραγεμίζοντας με μηδενικά το πεπερασμένης χρονικής διάρκειας σήμα.

Για τη συνέχεια τροποποιείστε τον κώδικα του παραδείγματος 1.1 ως εξής και παρατηρείστε την μορφή του φάσματος.

```
…
zpf=10;            % συντελεστής παραγεμίσματος
X=fft(x,zpf*L);    % φάσμα παραγεμισμένου με μηδενικά σήματος
…
plot(fn,magX,'-k'); % απεικόνιση με συνεχή γραμμή μαύρου χρώματος
…
spec = max(spec,-30*ones(1,length(spec))); % ψαλίδισμα αρνητικών στα -30 dB
…
plot(fn,spec,'-r');     % απεικόνιση με συνεχή γραμμή κόκκινου χρώματος
grid on;                % εμφάνιση πλέγματος στους άξονες
…
axis([0 1 -30 30]);     % εμφάνιση σε κλίμακα από -30 έως 30 dB
```

Αποθηκεύστε τον κώδικά σας ως αρχείο M-file στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα lab2_3_nnnnn.m, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας.

1.4 Εξηγείστε τις διαφορές

Χρησιμοποιώντας τμήματα του κώδικα που έχετε ήδη αποθηκεύσει, γράψτε νέο κώδικα για να σχεδιάσετε το φάσμα που υπολογίσατε στο παράδειγμα 1.1 ως μίσχο κόκκινου χρώματος και υπερθέστε στο ίδιο διάγραμμα το φάσμα όπως το υπολογίσατε στο 1.3. Στη συνέχεια, επαναλάβατε τη σχεδίαση χρησιμοποιώντας τώρα το σήμα του παραδείγματος 1.2 και το αντίστοιχο φάσμα. Παρατηρείστε με προσοχή τα αποτελέσματα.

Ερώτηση 2: Πώς εξηγούνται οι διαφορές που παρατηρήσατε στα διαγράμματα πλάτους του φάσματος των παραδειγμάτων 1.1 και 1.2; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου lab2_nnnnn.txt.

1.5 Υποβάλατε την εργασία σας

Αποθηκεύσατε τον κώδικα σας ως αρχείο M-file στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα lab2_4_nnnnn.m, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας και υποβάλετε την εργασία σας για βαθμολόγηση ως εξής:

1. Επιλέξτε από την ιστοθέση του μαθήματος την Εργαστηριακή Άσκηση 2 στην ενότητα "Υποβολή αναφορών".
2. Στη σελίδα που θα εμφανισθεί κάντε κλικ στο κουμπί "Browse".
3. Αναζητήστε το αρχείο σας στο φάκελο εργασίας (My Documents\MATLAB) και επιλέξτε το.
4. Κάντε κλικ στο κουμπί "Αποστολή του αρχείου" για να ανεβάσετε την εργασία σας στον εξυπηρετητή.
5. Εάν θέλετε να κάνετε κάποια διόρθωση, ακολουθήστε την ίδια διαδικασία ανεβάσματος.
6. Μην οριστικοποιήσετε την υποβολή γιατί μετά δε θα μπορέσετε να υποβάλετε την απάντηση του επόμενου μέρους της άσκησης.

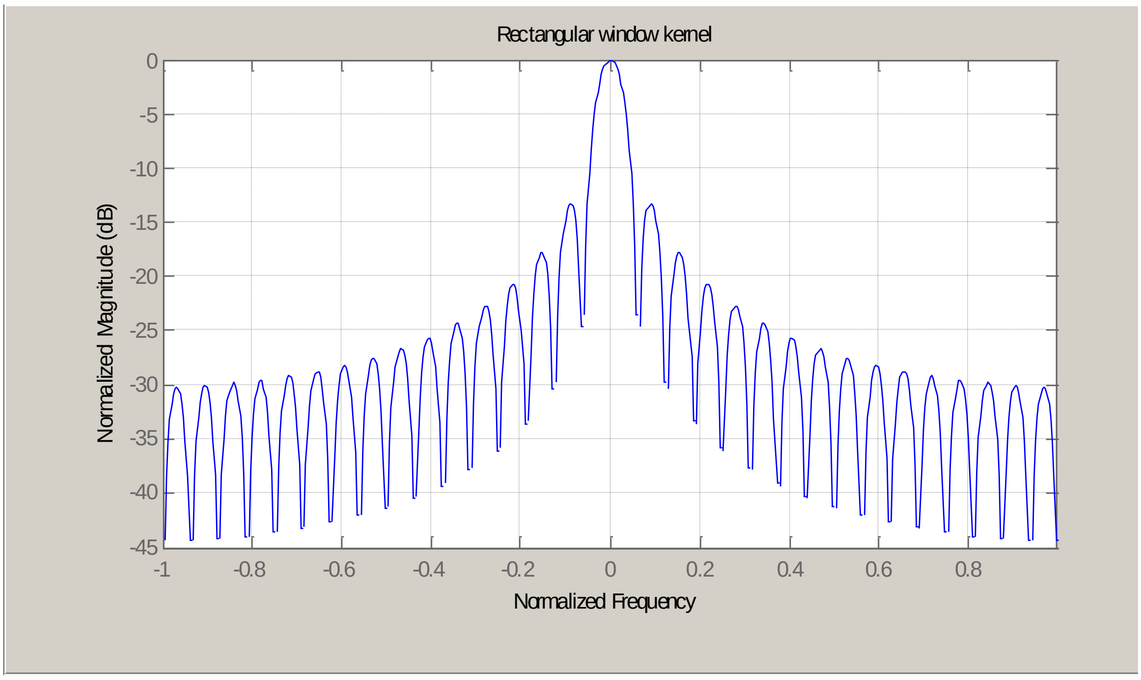
Μέρος 2: Περισσότερα για τα παράθυρα

Για να ελαχιστοποιηθούν οι επιπτώσεις του DTFT ενός παραθύρου $W(\phi)$ πρέπει αυτό έχει στενό κύριο λοβό και χαμηλές στάθμες πλευρικών λοβών. Το εύρος του κυρίου λοβού μετριέται συνήθως από μηδενισμό σε μηδενισμό. Η στάθμη των πλευρικών λοβών μετριέται σε dB σε σχέση με αυτή του κύριου λοβού. Ενδιαφερόμαστε τόσο για τον υψηλότερο εκ των πλευρικών λοβών όσο και για το ρυθμό μείωσής τους (drop-off rate). Θα δούμε όμως ότι υπάρχει εγγενώς μια σχέση ανταλλαγής μεταξύ της εξασθένισης των πλευρικών λοβών και της διεύρυνσης του κυρίου λοβού.

Στο Matlab υπάρχουν πολλές έτοιμες συναρτήσεις για τη δημιουργία παραθύρων. Εκτελέστε την εντολή `doc signal/window` για να δείτε τη λίστα των διαθέσιμων παραθύρων. Στη συνέχεια θα περιγραφτούν σε συντομία μερικά από αυτά.

Ορθογωνικό παράθυρο

Όταν δεν εφαρμόζουμε ρητά κάποιο άλλο είδος παραθύρου, λαμβάνουμε τα αποτελέσματα που περιγράφθηκαν πριν εξ αιτίας του περιορισμένου πλήθους L τιμών του σήματος. Ο πυρήνας του ορθογωνικού παραθύρου (DTFT) φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Το εύρος του κύριου λοβού είναι $2/L$. Η στάθμη του υψηλότερου πλευρικού λοβού είναι -13 dB και ο ρυθμός μείωσης -6 dB ανά οκτάβα.

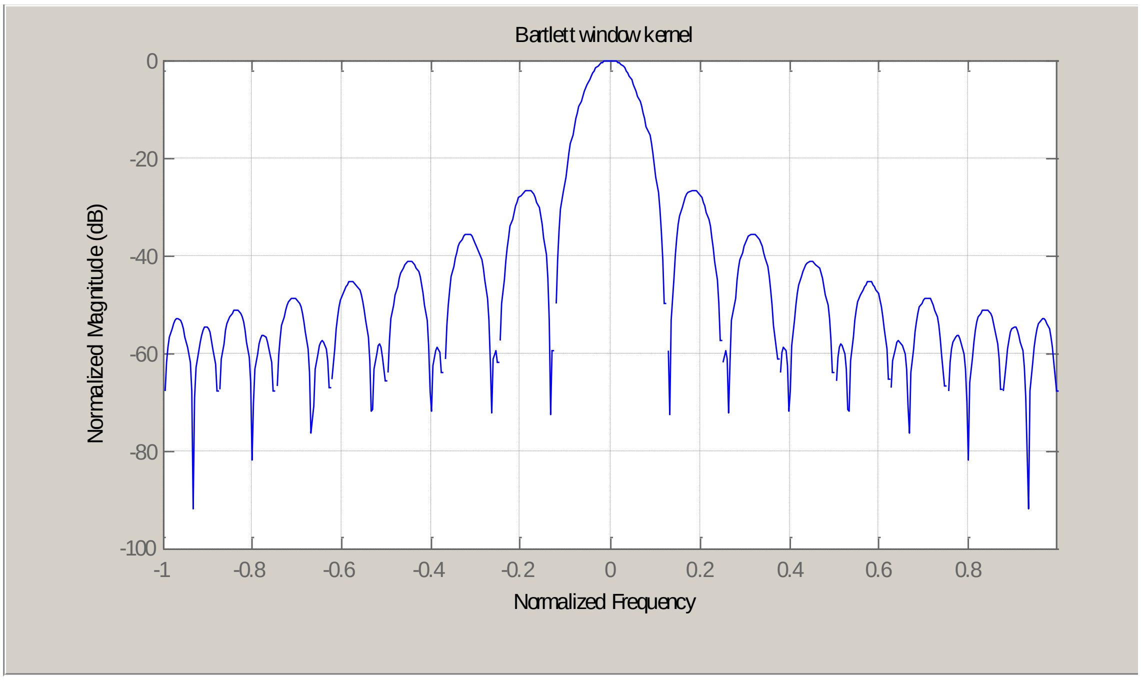


<u>Παράθυρο Bartlett</u>

Τριγωνικής μορφής παράθυρο που προκύπτει από τη συνέλιξη δύο ορθογωνικών παραθύρων. Για μήκος παραθύρου L, ορίζεται ως

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{2n}{N} & 0\le n\le N/2\\ 2-\dfrac{2n}{N} & N/2\le n\le N\end{cases}$$

όπου N=L-1. Ο πυρήνας του παραθύρου Bartlett φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Το εύρος του κύριου λοβού είναι 4/(L+1), δηλαδή, περίπου διπλάσιο του ορθογωνικού. Η στάθμη του υψηλότερου πλευρικού λοβού είναι -27 dB και ο ρυθμός μείωσης -12 dB ανά οκτάβα (αμφότερα πολύ καλύτερα από το ορθογωνικό παράθυρο).

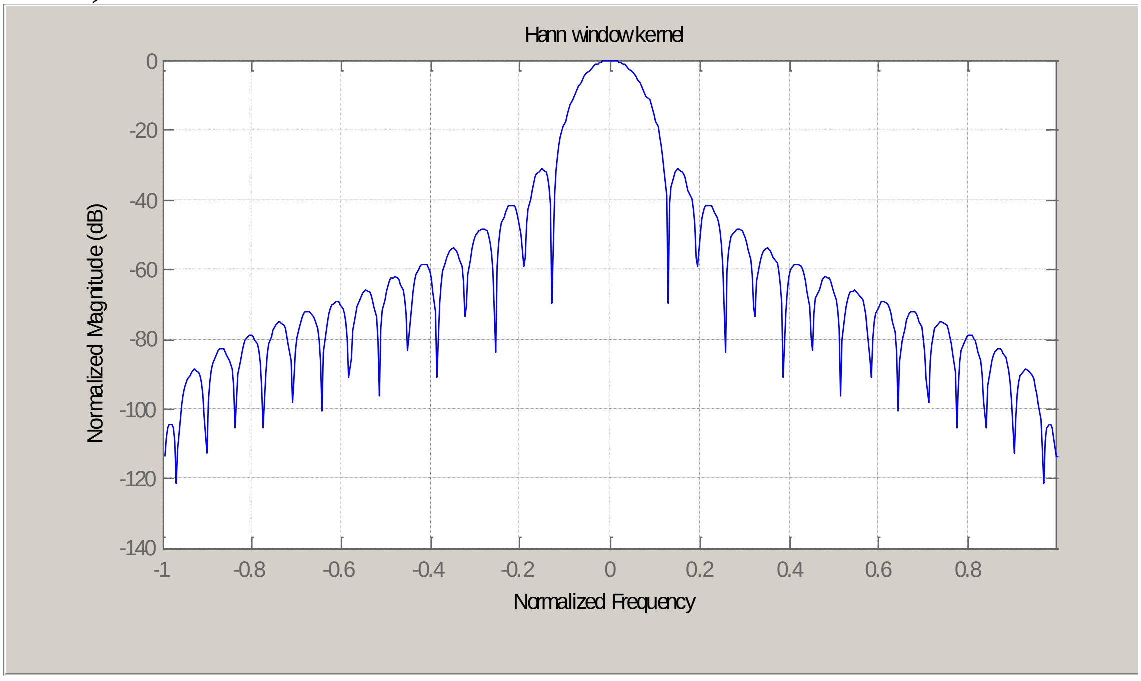


Παράθυρο Hann ή Hanning

Προκύπτει ως το αποτέλεσμα της υπέρθεσης των πυρήνων τριών ορθογωνικών παραθύρων που έχουν ολισθήσει ώστε οι πλευρικοί λοβοί να αλληλοαναιρούνται. Στο πεδίο του χρόνου για μήκος παραθύρου L, ορίζεται ως

$$w[n] = 0.5\left(1 - \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right)\right), \quad 0 \le n \le N$$

όπου N=L-1. Ο πυρήνας του παραθύρου Hann φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Το εύρος του κύριου λοβού είναι 4/L, δηλαδή, διπλάσιο του ορθογωνικού. Η στάθμη του υψηλότερου πλευρικού λοβού είναι -32 dB και ο ρυθμός μείωσης -18 dB ανά οκτάβα (αμφότερα καλύτερα από το παράθυρο Bartlett).

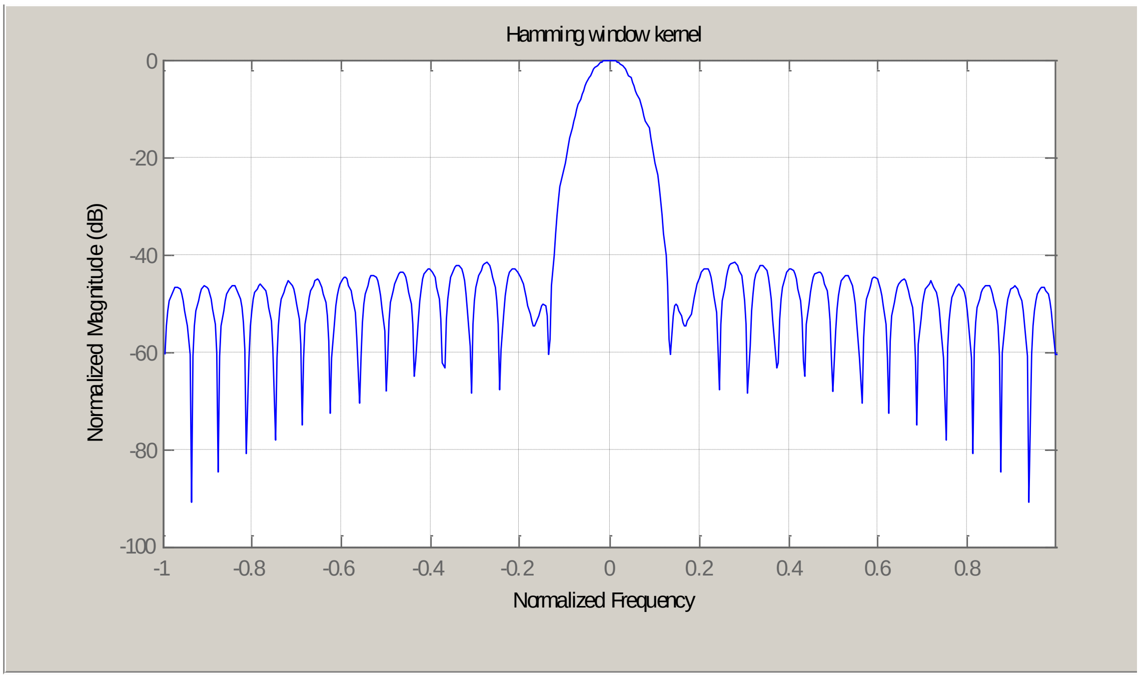


Παράθυρο Hamming

Παραλλαγή του παραθύρου Hann για περαιτέρω μείωση του ύψους των πλευρικών. Στο πεδίο του χρόνου για μήκος παραθύρου L, ορίζεται ως

$$w[n] = 0.54 - 0.46\cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right), \quad 0 \le n \le N$$

όπου N=L-1. Ο πυρήνας του παραθύρου Hamming φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Το εύρος του κύριου λοβού είναι 4/L, δηλαδή, διπλάσιο του ορθογωνικού. Η στάθμη του υψηλότερου πλευρικού λοβού είναι -43 dB (καλύτερη από το παράθυρο Hann) και ο ρυθμός μείωσης -6 dB ανά οκτάβα (ίδιος με το ορθογωνικό παράθυρο).

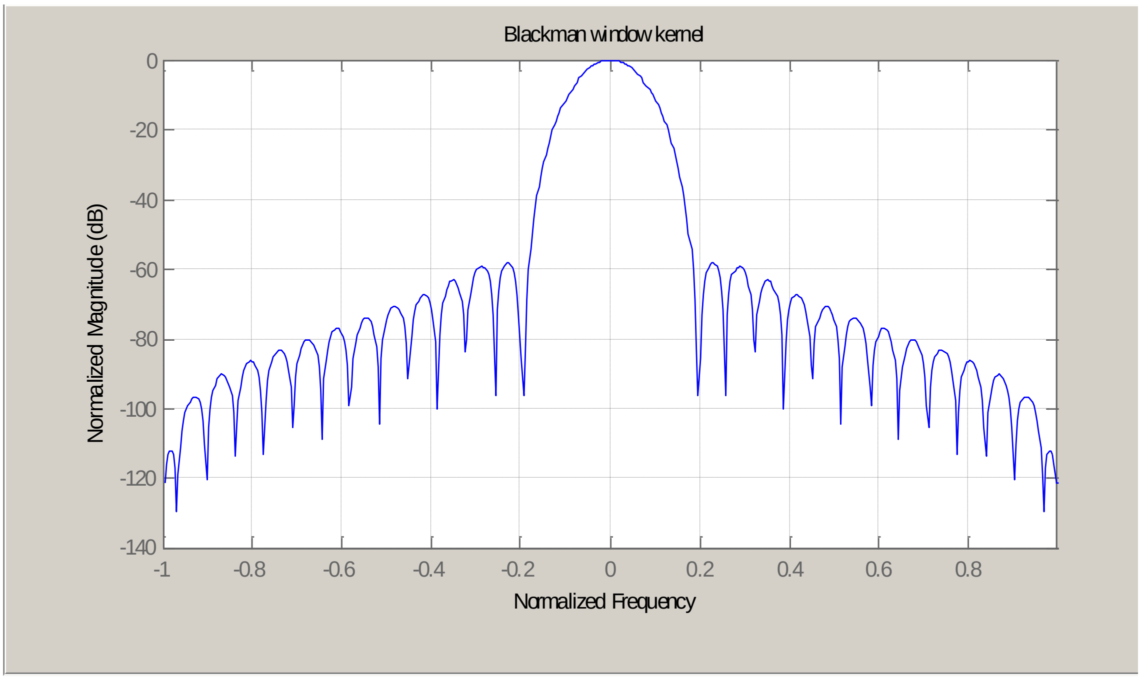


Παράθυρο Blackman

Παραλλαγή του παραθύρου Hann για περαιτέρω μείωση του ύψους των πλευρικών που προκύπτει ως το αποτέλεσμα της υπέρθεσης των πυρήνων πέντε ορθογωνικών παραθύρων που έχουν ολισθήσει ώστε οι πλευρικοί λοβοί να αλληλοαναιρούνται. Στο πεδίο του χρόνου για μήκος παραθύρου L, ορίζεται ως

$$w[n] = 0.42 - 0.5\cos\left(2\pi\frac{n}{N}\right) + 0.08\cos\left(2\pi\frac{n}{N}\right), \quad 0 \le n \le N$$

όπου N=L-1. Ο πυρήνας του παραθύρου Blackman φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Το εύρος του κύριου λοβού είναι 6/L, δηλαδή, τριπλάσιο του ορθογωνικού. Η στάθμη του υψηλότερου πλευρικού λοβού είναι -57 dB και ο ρυθμός μείωσης -18 dB ανά οκτάβα (αμφότερα καλύτερα από το παράθυρο Hamming).



Οι συναρτήσεις του Matlab για τα προαναφερθέντα παράθυρα είναι `rectwin`, `bartlett`, `hann`, `hamming` και `blackman`, αντίστοιχα. Επίσης, υπάρχει το εργαλείο *Window Design & Analysis Tool (wintool)* με το οποίο μπορείτε να δείτε στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας τα διαθέσιμα παράθυρα καθώς και να σχεδιάσετε δικά σας[1]. Μπορείτε να το ενεργοποιήσετε εκτελώντας την εντολή `window`.

2.1 Ξανασχεδιάστε το φάσμα

Επαναλάβατε τα παραδείγματα 1.1 και 1.2 χρησιμοποιώντας παράθυρο Blackman αντί του ορθογωνικού και παρατηρείστε με προσοχή τις διαφορές στο φάσμα των δύο σημάτων. Χρησιμοποιείστε τον κώδικα που έχετε αποθηκεύσει κάνοντας τις ακόλουθες αλλαγές:

```
…
w=blackman(L);           % παράθυρο Blackman στο πεδίο του χρόνου
…
X=fft(x.*w');            % φάσμα του σήματος πολλαπλασιασμένου με το παράθυρο
                         % επειδή το w είναι διάνυσμα στήλη πρέπει να
                         % το μετατρέψετε σε διάνυσμα γραμμή
…
axis([0 1 -60 20]);     % εμφάνιση σε κλίμακα από -60 έως 20 dB
```

2.2 Υποβάλατε την εργασία σας

Αποθηκεύστε το αρχείο M-file που κατασκευάσατε ως lab2_5_nnnnn.m, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας και υποβάλετέ το ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο 1.5.

Μέρος 3: Εκτίμηση Φάσματος

Η πυκνότητα φάσματος ισχύος (Power Spectral Density – PSD) για ένα σήμα ορίζεται ως ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Για μια στατική υπό την ευρεία έννοια στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση

$$S_X(f) = \lim_{N\to\infty} E\left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^{N} x[n]\exp(-j2\pi nf) \right|^2 \right\}$$

που προκύπτει από το θεώρημα Wiener-Khinchin. Η προηγούμενη σχέση υποθέτει ότι λαμβάνουμε την αναμενόμενη τιμή στο χώρο όλων των πιθανών εκδοχών (ensemble average). Στην πράξη όμως διαθέτουμε μόνο ένα δείγμα της ανέλιξης. Επίσης, ο εμπλεκόμενος μετασχηματισμός Fourier έχει άπειρο μήκος, ενώ διαθέτουμε πεπερασμένα το πλήθος δείγματα $x[n]$ της ανέλιξης. Επομένως, για την εκτίμηση της PSD μιας στατικής υπό την ευρεία έννοια στοχαστικής ανέλιξης, μπορούμε είτε να υπολογίσουμε τον DFT του σήματος και μετά να λάβουμε κάποια μορφή μέσης τιμής είτε, εναλλακτικά, να εκτιμήσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης χρησιμοποιώντας κάποια μορφή μέσης τιμής και μετά να υπολογίσουμε τον DFT. Αμφότερες οι προσεγγίσεις οδηγούν στους κλασικούς «μη παραμετρικούς» αλγόριθμους εκτίμησης της PSD.

Ο απλούστερος εκτιμητής που ήδη είδατε στην Εργαστηριακή Άσκηση 1 είναι το περιοδόγραμμα (periodogram). Συνίσταται στο να ληφθεί ο DTFT των δειγμάτων του σήματος και μετά να υψωθεί στο τετράγωνο το μέτρο του αποτελέσματος. Το περιοδόγραμμα ενός πεπερασμένου μήκους L σήματος $x[n]$ είναι:

[1] Τα προηγούμενα σχήματα παράχθηκαν με τη βοήθεια του wintool θέτοντας το μήκος παραθύρου ίσο με 32 και σχεδιάζοντας το κανονικοποιημένο πλάτος του αμφίπλευρου φάσματος. Μπορείτε να το δοκιμάσετε και να δείτε την μορφή του πυρήνα για άλλα μήκη παραθύρου π.χ. 41 και 64 (και επιλογές μέσω του *View → Analysis Parameters*).

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{Lf_s}\left|\sum_{n=0}^{L-1} x[n]\exp\left(-j2\pi nf / f_s\right)\right|^2$$

Στην πράξη ο υπολογισμός του περιοδογράμματος γίνεται σε πεπερασμένο πλήθος συχνοτήτων $f_k=kf_s/N$, k=0, 1, … , N με τη βοήθεια του FFT, οπότε

$$P_{xx}(f_k) = \frac{1}{Lf_s}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-j2\pi nk / N\right)\right|^2, \quad k = 0,1,...,N-1$$

Εν γένει επιλέγουμε $N>L$, οπότε ο υπολογισμός του FFT γίνεται αφού προηγουμένως παραγεμίσουμε με μηδενικά την πεπερασμένου μήκους L σειρά δειγμάτων του σήματος. Το περιοδόγραμμα είναι πολωμένος εκτιμητής (biased estimator) της PSD. Η αναμενόμενη τιμή του είναι

$$E\left\{P_{xx}(f)\right\} = \frac{1}{Lf_s}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{\sin^2\left(L\pi(f-f')/f_s\right)}{\sin^2\left(\pi(f-f')/f_s\right)} S_X(f')df'$$

δηλαδή, η συνέλιξη της πραγματικής PSD με το τετράγωνο του πυρήνα Dirichlet. Στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με τη συνέλιξη της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του σήματος με ένα παράθυρο Bartlett. Αυτό οδηγεί στην εμφάνιση διαρροής φάσματος με τη μορφή πλευρικών λοβών περίπου 27 dB χαμηλότερα από τον κύριο λοβό καθώς και εξομάλυνσης απότομων αλλαγών του φάσματος όπως είδατε προηγουμένως. Ασυμπτωτικά, καθώς $L\rightarrow\infty$, το περιοδόγραμμα γίνεται απόλωτος εκτιμητής και τείνει στην πραγματική PSD μιας και το τρίγωνο Bartlett τείνει στη συνάρτηση δέλτα. Όμως, η μεταβλητότητά του δεν τείνει στο μηδέν καθώς το L τείνει στο άπειρο και επομένως δεν είναι ιδιαίτερα συνεπής εκτιμητής παρότι είναι απλός στον υπολογισμό.

Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι <u>η φασματική διαρροή είναι απόρροια του πεπερασμένου μήκους του σήματος και όχι του γεγονότος ότι το περιοδόγραμμα υπολογίζεται σε διακριτές συχνότητες</u>. Η φασματική διαρροή οδηγεί σε απώλεια διακριτικής ικανότητας. Για να μπορέσουμε να ξεχωρίσουμε δυο γειτονικές συχνότητες θα πρέπει η απόστασή τους να είναι μεγαλύτερη από το εύρος του κυρίου λοβού. Στην περίπτωση του περιοδογράμματος αυτή θα πρέπει να είναι περίπου f_s/L.

Για να μειωθεί η πόλωση (bias) του εκτιμητή μπορεί να χρησιμοποιηθεί το τροποποιημένο περιοδόγραμμα. Το τροποποιημένο περιοδόγραμμα συνίσταται στην εφαρμογή ενός παραθύρου στο πεδίο του χρόνου πριν τον υπολογισμό του DFT. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της στάθμης των πλευρικών λοβών, δηλαδή, της φασματικής διαρροής. Η μείωση της φασματικής διαρροής μπορεί να εξηγηθεί διαισθητικά εάν θεωρήσει κανείς τους πλευρικούς λοβούς ως κίβδηλες συχνότητες που γεννούνται από την απότομη αποκοπή του σήματος όταν χρησιμοποιούμε ορθογωνικό παράθυρο (δηλαδή, πεπερασμένη διάρκεια σήματος). Στα μη ορθογωνικά παράθυρα τα ακραία σημεία του σήματος εξασθενούν πιο ομαλά και επομένως οι κίβδηλες συχνότητες που παράγονται είναι λιγότερο έντονες. Όμως, τα μη ορθογωνικά παράθυρα διευρύνουν τον κεντρικό λοβό με αποτέλεσμα την απώλεια διακριτικής ικανότητας.

Το τροποποιημένο περιοδόγραμμα είναι και αυτό πολωμένος εκτιμητής αν και λιγότερο σε σχέση με το απλό περιοδόγραμμα. Επιπλέον, πρέπει να γίνει κανονικοποίηση του αποτελέσματος για να ληφθεί υπόψη η απώλεια ισχύος λόγω του παραθύρου. Η σταθερά κανονικοποίησης είναι

$$U = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|w[n]\right|^2$$

και εκτός των άλλων εξασφαλίζει ότι το τροποποιημένο περιοδόγραμμα είναι ασυμπτωτικά απόλωτος εκτιμητής. Η μεταβλητότητα του τροποποιημένου περιοδογράμματος παραμένει περίπου ίδια με αυτή του απλού, οπότε δεν υπάρχει κέρδος ως προς αυτό το σημείο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `periodogram` του Matlab για να υπολογίσετε και σχεδιάσετε το απλό ή τροποποιημένο περιοδόγραμμα. Συμβουλευτείτε το help για τον τρόπο χρήσης και την αντίστοιχη σύνταξη.

Για να μειωθεί η μεταβλητότητα της εκτίμησης θα πρέπει να ληφθεί κάποιου είδους μέσος όρος. Στην περίπτωση εργοδικών σημάτων η χρονική μέση τιμή ισούται με την αναμενόμενη τιμή (ensemble average). Η μέθοδος Bartlett για τη μείωση της μεταβλητότητας συνίσταται στον τεμαχισμό του σήματος σε K μη χρονικά επικαλυπτόμενα διαστήματα μήκους L, στον υπολογισμό του περιοδογράμματος για κάθε τμήμα χωριστά και τέλος στη λήψη της μέσης τιμής των περιοδογραμμάτων ως εκτιμητή της PSD. Η λήψη της μέσης τιμής των τροποποιημένων περιοδογραμμάτων έχει την τάση να μειώσει τη μεταβλητότητα του εκτιμητή σε σχέση με τον υπολογισμό ενός μόνο περιοδογράμματος βάσει όλων των δεδομένων.

Βλέπουμε επομένως ότι η εφαρμογή παραθύρου βοηθά με την πόλωση και ότι η λήψη μέσης τιμής μειώνει τη μεταβλητότητα της εκτίμησης. Ο εκτιμητής Welch για την PSD εφαρμόζει και τις δύο τεχνικές. Η μέθοδος συνίσταται στον χωρισμό των δειγμάτων σε (πιθανώς επικαλυπτόμενα) τμήματα, τον υπολογισμό του τροποποιημένου περιοδογράμματος για κάθε τμήμα και τη λήψη της μέσης τιμής των ως εκτίμηση της PSD. Η συνάρτηση `pwelch` στο Matlab, εάν δεν ορισθούν διαφορετικές παράμετροι, χωρίζει τα δεδομένα σε 8 τμήματα με επικάλυψη 50% μεταξύ τους και εφαρμόζει παράθυρο Hamming για να υπολογίσει το τροποποιημένο περιοδόγραμμα κάθε τμήματος. Παρότι η επικάλυψη των παραθύρων τείνει να εισάγει περιττή πληροφορία, το αποτέλεσμα ελαχιστοποιείται με τη χρήση μη ορθογωνικών παραθύρων που μειώνει τη σημασία των ακραίων δειγμάτων (εκεί που τα τμήμα επικαλύπτονται). Η χρήση μικρότερων σειρών και μη ορθογωνικών παραθύρων βελτιώνει τη μεταβλητότητα της εκτίμησης, όμως η διακριτική ικανότητα μειώνεται. Υπάρχει επομένως μια βασική σχέση ανταλλαγής. Μεγαλώνοντας το μέγεθος του τμήματος βελτιώνουμε τη διακριτική ικανότητα. Μεγαλώνοντας το πλήθος των τμημάτων έχουμε πιο συνεπή εκτίμηση. Ο εκτιμητής Welch παραμένει πολωμένος, όπως το περιοδόγραμμα, και απαιτεί κανονικοποίηση ώστε να είναι ασυμπτωτικά απόλωτος. Για δεδομένο μήκος σήματος, η πόλωση που εισάγει ο εκτιμητής Welch είναι μεγαλύτερη από αυτήν του περιοδογράμματος λόγω του μικρότερου μήκους των τμημάτων σε σχέση με το ολικό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση `pwelch` του Matlab για να υπολογίσετε και σχεδιάσετε την εκτίμηση του φάσματος κατά Welch. Συμβουλευτείτε το help για τον τρόπο χρήσης και την αντίστοιχη σύνταξη.

3.1 Σχεδιάστε το περιοδόγραμμα σήματος λευκού θορύβου

Δοκιμάστε στη συνέχεια τις παρακάτω εντολές στο παράθυρο εντολών του MATLAB προκειμένου να σχεδιάσετε την πυκνότητα φάσματος ισχύος ενός σήματος λευκού θορύβου ισχύος -10 dBW. Στην προτροπή >> πληκτρολογείστε τις εντολές που ακολουθούν. Λόγω της δειγματοληψίας με ρυθμό f_s, εάν η αμφίπλευρη πυκνότητα φάσματος ισχύος του θορύβου είναι $N_0/2$, η ισχύς του στο διάστημα συχνοτήτων από $-f_s/2$ έως $f_s/2$ είναι $N_0/2 \cdot f_s = 0.1$, οπότε $N_0 = 0.2/8000 \approx -46$ dB/Hz όπως θα διαπιστώσετε και από τις γραφικές παραστάσεις.

```
%
% Παραγωγή λευκού θορύβου καθορισμένης ισχύος
%
close all; clear all;
Fs=8000;                % συχνότητα δειγματοληψίας
t=0:1/Fs:1;             % χρονικό πλέγμα δειγματοληψίας διάρκειας 1 sec
L=length(t);
n=wgn(1,L,-10);         % διάνυσμα γραμμή δειγμάτων λευκού γκαουσιανού θορύβου
Pn= sum(n.^2)/length(n) % ισχύς θορύβου περίπου 0.1 (-10 dBW)
%
% Φασματική ανάλυση θορύβου
%
figure (1); periodogram(n,[],[],Fs)   % σχεδίαση του περιοδογράμματος
figure (2); pwelch(n,[],[],[],Fs);    % σχεδίαση του εκτιμητή Welch
```

Συγκρίνετε τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν και επιβεβαιώστε την ορθότητα της εκτίμησης. Επαναλάβατε την εκτέλεση των εντολών δύο φορές και επιβεβαιώστε ότι κάθε φορά τα αποτελέσματα είναι ελαφρώς διαφορετικά μιας και η `wgn` παράγει τυχαίες τιμές θορύβου.

Ερώτηση 3: Με ποιον τρόπο γίνεται φανερή η μείωση της μεταβλητότητας της εκτίμησης της πυκνότητας φάσματος ισχύος με τη μέθοδο Welch; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου lab2_nnnnn.txt.

Ερώτηση 4: Εάν μεγαλώνατε το διάστημα δειγματοληψίας σε 2 sec, θα βελτιωνόταν η εκτίμηση της πυκνότητας φάσματος ισχύος; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου lab2_nnnnn.txt.

3.2 Σχεδιάστε το περιοδόγραμμα με τη μέθοδο Bartlett

Μπορείτε να μειώσετε τη μεταβλητότητα της εκτίμησης επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό του περιοδογράμματος πολλές φορές και λαμβάνοντας τη μέση τιμή. Στην προτροπή >> πληκτρολογείστε τις εντολές που ακολουθούν. Στη συνέχεια επαναλάβατε για τιμές του N=100 και 1000 και αποθηκεύεστε το τελευταίο σχήμα που παράγεται με όνομα lab2_6_nnnnn.jpg, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας, και υποβάλετέ το ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο 1.5.

```
%
% Παραγωγή λευκού θορύβου καθορισμένης ισχύος
%
close all; clear all;

fs = 256;                          % συχνότητα δειγματοληψίας
t = (0:fs)/fs;                     % δείγματα σε διάρκεια 1 sec
n = 0.1*randn(size(t));            % θόρυβος ισχύος 0.01
%
% Φασματική ανάλυση
%
[Pxx,f]=periodogram(n,[],[],fs);  % υπολογισμός του περιοδογράμματος Pxx
                                   % και του διανύσματος f των συχνοτήτων
                                   % όπου γίνεται η εκτίμηση
                                   % δείτε doc periodogram για λεπτομέρειες
N=10;
for i=1:N-1                        % επανάληψη των υπολογισμών N-1 φορές
    n = 0.1*randn(size(t));
    Pxx=Pxx+periodogram(n,[],[],fs);
end
figure;plot(f,10*log10(Pxx/N))
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('Power Spectral Density (dB/Hz)')
```

Ερώτηση 5: Γιατί χρησιμοποιήθηκε η σύνταξη `randn(size(t))`, αντί της `randn(length(t))` για την παραγωγή του διανύσματος θορύβου; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου lab2_nnnnn.txt.

Ερώτηση 6: Σε ποια τιμή συγκλίνει η πυκνότητα φάσματος ισχύος N_0 του θορύβου; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου lab2_nnnnn.txt.

3.3 Σχεδιάστε το περιοδόγραμμα θορυβώδους ημιτονοειδούς σήματος

Δοκιμάστε στη συνέχεια τις παρακάτω εντολές στο παράθυρο εντολών του MATLAB προκειμένου να σχεδιάσετε το περιοδόγραμμα και την εκτίμηση Welch της πυκνότητας φάσματος ισχύος ενός θορυβώδους ημιτονοειδούς σήματος με σηματοθορυβική σχέση 30 dB και αποθηκεύστε το σύνολο των εντολών ως αρχείο M-file με όνομα lab2.m.

```
%
% Παραγωγή θορυβώδους σήματος
%
close all; clear all;

fs = 500;                    % συχνότητα δειγματοληψίας
t = (0:fs)/fs;               % δείγματα σε διάρκεια 1 sec
A = [1 2 0.5];               % πλάτη ημιτονοειδών (διάνυσμα γραμμή)
f = [120;150;200];           % συχνότητες ημιτονοειδών  (διάνυσμα στήλη)
x = A*sin(2*pi*f*t);         % το σήμα χωρίς θόρυβο
xn = awgn(x,30,'measured');  % το θορυβώδες σήμα με SNR=30 dB
                             % δείτε help awgn για λεπτομέρειες
%
% Φασματική ανάλυση θορυβώδους σήματος
%
figure (1); periodogram(xn,[],[],fs)
figure (2); pwelch(xn,[],[],[],fs);
```

Παρατηρείστε ότι οι τρεις συχνότητες διακρίνονται ευκρινώς εν μέσω του θορύβου, η εκτίμηση της πυκνότητας φάσματος ισχύος του οποίου είναι εμφανώς καλύτερη με τη μέθοδο Welch.

Ερώτηση 7: Γιατί προτιμήσαμε τη σύνταξη `x = A*sin(2*pi*f*t)` αντί της αναγραφής του αθροίσματος των ημιτονοειδών; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου lab2_nnnnn.txt.

Ερώτηση 8: Ποια είναι η τιμή της πυκνότητας φάσματος ισχύος N_0 του θορύβου που προσθέτει στο σήμα η `awgn`; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου lab2_nnnnn.txt.

3.4 Πειραματισθείτε

Τώρα μπορείτε να επαναλάβετε την εκτέλεση του αρχείου lab2.m, πληκτρολογώντας το όνομά του στο παράθυρο εντολών χωρίς την επέκταση .m. και να πειραματισθείτε αλλάζοντας τις συχνότητες των ημιτονοειδών. Συγκρίνατε τα αποτελέσματα για τις τιμές [140;150;200] και [145;150;200] και 140;160;200.

Ερώτηση 9: Τι παρατηρείτε όσον αφορά τη διακριτική ικανότητα των δύο εκτιμητών; Γράψτε την απάντησή σας στο αρχείο κειμένου lab2_nnnnn.txt.

3.5 Ολοκληρώστε την υποβολή των αρχείων

1. Υποβάλατε το αρχείο lab2_nnnnn.txt ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο 1.5.
2. Εάν χρειαστεί μπορείτε να κάνετε διορθώσεις υποβάλλοντας εκ νέου τα διορθωμένα αρχεία.
3. Όταν είστε σίγουροι, προχωρήστε στην οριστικοποίηση κάνοντας κλικ στο κουμπί “Αποστολή για βαθμολόγηση” και απαντήστε καταφατικά στην ερώτηση που θα ακολουθήσει.