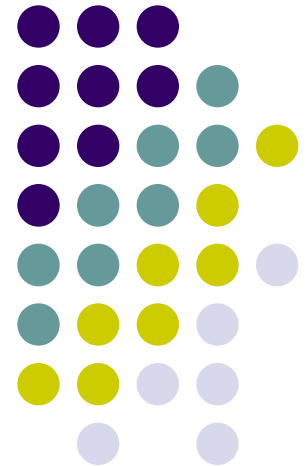
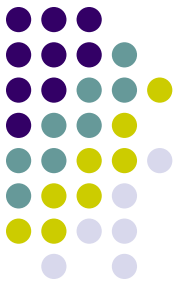


# Θόρυβος και λάθη στη μετάδοση PCM

---

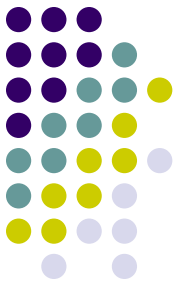




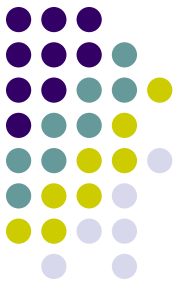
# Πότε συμβαίνουν λάθη

- Για **μονοπολική (on-off)** σηματοδότηση το σήμα στην έξοδο είναι  $y(kt_s) = a_k + n(kt_s)$ , όπου  $a_k=0$  όταν μεταδίδεται το bit 0 και  $a_k=A$  όταν μεταδίδεται το bit 1
- Εάν  $y(kt_s) > V$  θεωρούμε ότι μεταδόθηκε το bit 1
- Εάν  $y(kt_s) < V$  θεωρούμε ότι μεταδόθηκε το bit 0
- Λάθη θα συμβούν όταν
  - $a_k=0$  και ο θόρυβος οδηγεί σε  $y(kt_s) > V$
  - $a_k=A$  και ο θόρυβος οδηγεί σε  $y(kt_s) < V$

# Περιγραφή με θεωρία πιθανοτήτων



- Οι τιμές του σήματος και του θορύβου τη στιγμή δειγματοληψίας είναι τυχαίες μεταβλητές  $Y$  και  $N$
  - Η τιμή της  $Y$  εκτός από το θόρυβο εξαρτάται και από την ύπαρξη ή μη παλμού
  - Οι υποθέσεις
    - $H_0: \alpha_k=0$  και  $Y=n$  (μετάδοση 0)
    - $H_1: \alpha_k=A$  και  $Y=A+n$  (μετάδοση 1)
- συμβολίζουν τη μετάδοση του bit 0 και 1, αντίστοιχα, και λήψη του σήματος με θόρυβο



# Υπό συνθήκη πιθανότητες

- Η υπό συνθήκη κατανομή πυκνότητας πιθανότητας του λαμβανόμενου σήματος  $Y$  ανάλογα με το τι μεταδόθηκε είναι

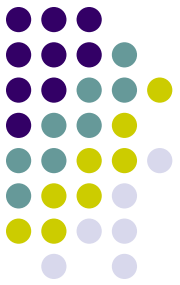
$$p_Y(y | H_0) = p_N(y)$$

$$p_Y(y | H_1) = p_N(y - A)$$

όπου  $p_N(n)$  η κατανομή του θορύβου

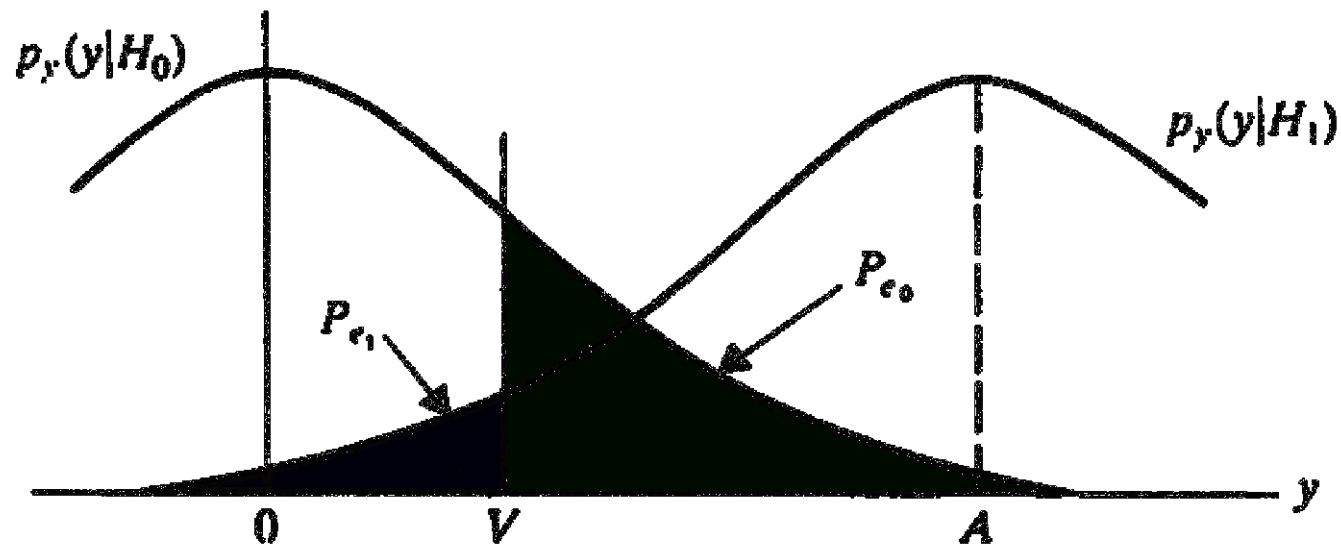
- Στην περίπτωση λευκού θορύβου

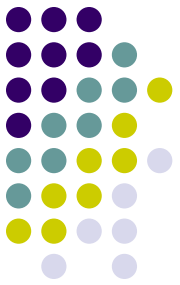
$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$



# Πιθανότητα σφάλματος

- Εάν  $Y < V$  επιλέγουμε την υπόθεση  $H_0$  μετάδοσης  $\alpha_k = 0$
- Εάν  $Y > V$  επιλέγουμε την υπόθεση  $H_1$  μετάδοσης  $\alpha_k = A$





# Πιθανότητα σφάλματος

- Οι πιθανότητες σφάλματος είναι

$$P_{e0} \triangleq P\{Y > V \mid H_0\} = \int_V^{\infty} p_Y(y \mid H_0) dy$$

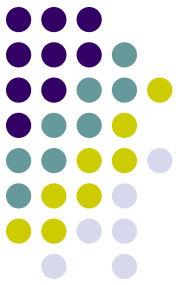
$$P_{e1} \triangleq P\{Y < V \mid H_1\} = \int_{-\infty}^V p_Y(y \mid H_1) dy$$

- Η μέση πιθανότητα σφάλματος  $P_e$  είναι

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}$$

$$P_0 = P\{H_0\}, \quad P_1 = P\{H_1\}$$

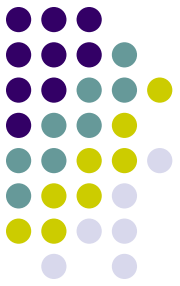
- όπου  $P_0$  και  $P_1$  είναι οι a priori πιθανότητες να γεννηθούν τα bit 0 και 1, αντίστοιχα, στην πηγή πληροφορίας



# Βέλτιστο κατώφλι

- Το βέλτιστο κατώφλι  $V_{opt}$  προκύπτει από την σχέση
$$dP_e / dV = 0 \Rightarrow P_0 p_Y(V_{opt} | H_0) = P_1 p_Y(V_{opt} | H_1)$$
- Συνήθως αναμένουμε ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1
$$P_0 = P_1 = 1/2 \Rightarrow$$
$$P_e = 1/2 (P_{e0} + P_{e1})$$
$$p_Y(V_{opt} | H_0) = p_Y(V_{opt} | H_1)$$
- το βέλτιστο κατώφλι  $V_{opt}$  βρίσκεται στην **τομή** των καμπυλών των υπό συνθήκη κατανομών πυκνότητας πιθανότητας
  - **γιατί;**

# Πιθανότητα σφάλματος παρουσία λευκού θορύβου



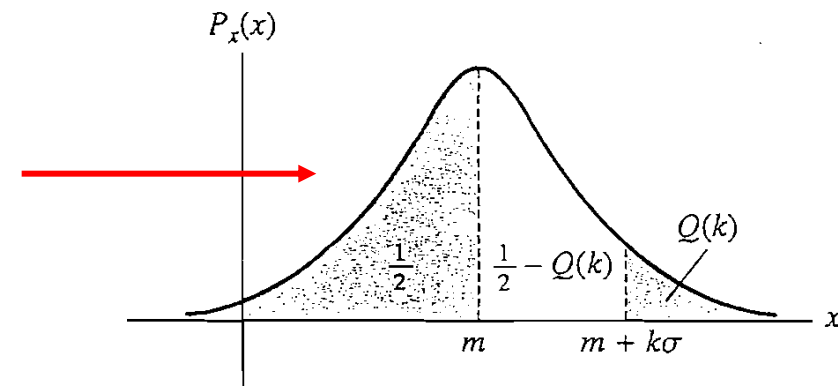
- Οι πιθανότητες σφάλματος για λευκό θόρυβο και κατώφλι  $V$  είναι

$$P_{e0} = \int_V^{\infty} p_N(y) dy = \int_V^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

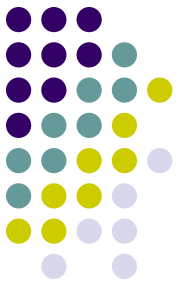
- παρομοίως

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^V p_N(y - A) dy = Q\left(\frac{A - V}{\sigma}\right)$$

όπου  $Q(x)$  η συνάρτηση  $Q$



# Πιθανότητα σφάλματος παρουσία λευκού θορύβου



- Για ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1

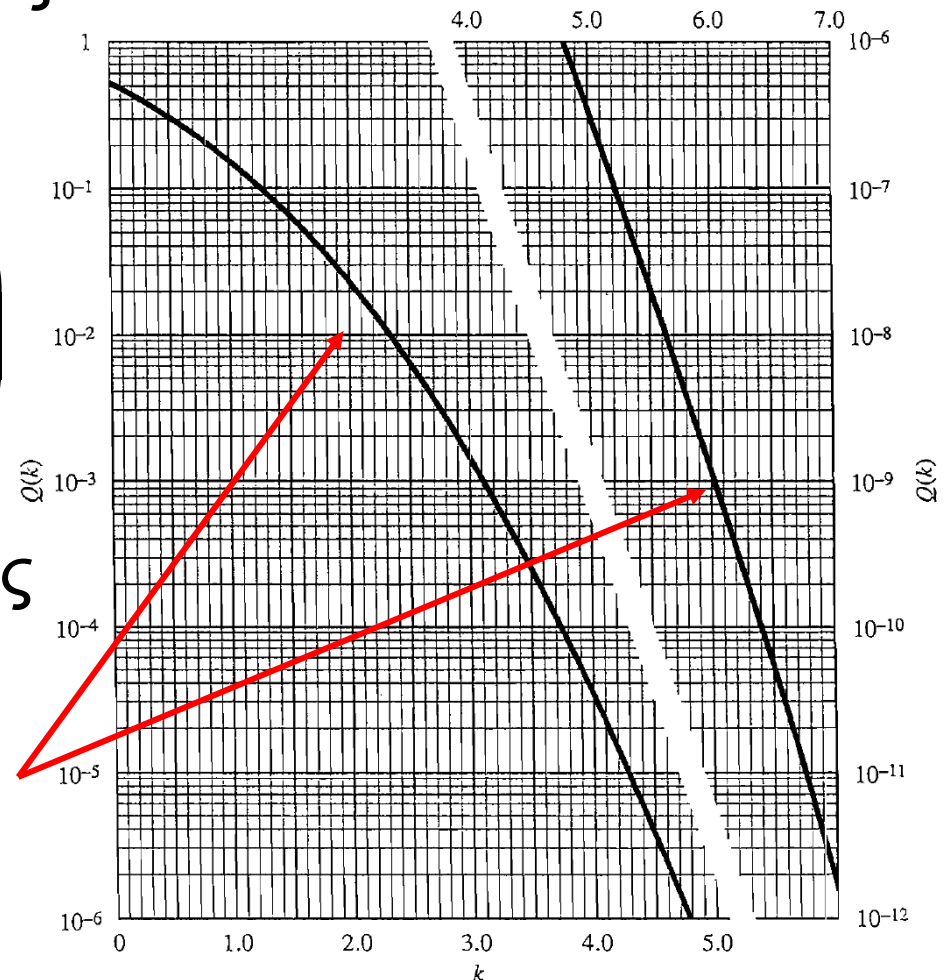
$$V_{opt} = A/2$$

$$P_{e0} = P_{e1} = P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

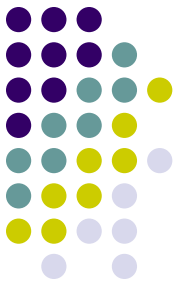
- Η πιθανότητα σφάλματος  
μειώνεται **ταχύτατα**

για  $A/2\sigma = 2.0 \rightarrow P_e \approx 10^{-2}$

για  $A/2\sigma = 6.0 \rightarrow P_e \approx 10^{-9}$

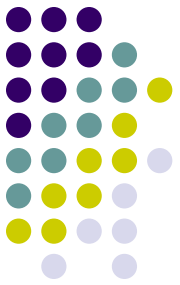


# Πιθανότητα σφάλματος σε πολική σηματοδότηση



- Για **πολική (polar)** σηματοδότηση,  $\alpha_k = \pm A/2$
- Η απόσταση μεταξύ των συμβόλων είναι ίδια με τη μονοπολική
- Η πιθανότητα σφάλματος προκύπτει από την ίδια σχέση
  - Η μόνη διαφορά  $V_{opt} = 0$
- Όμως απαιτείται μικρότερη ισχύς για το ίδιο αποτέλεσμα!

# Πιθανότητα σφάλματος για διπολική σηματοδότηση



- Για διπολική (bipolar) σηματοδότηση και ισοπίθανες εμφανίσεις 0 και 1

$$P_{e0} = \int_{A/2}^{\infty} p_N(y) dy + \int_{-\infty}^{-A/2} p_N(y) dy = 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$P_{e1+} = \int_{-\infty}^{A/2} p_N(y - A) dy = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

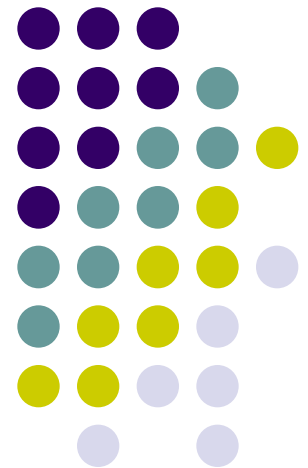
$$P_{e1-} = \int_{-A/2}^{\infty} p_N(y + A) dy = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

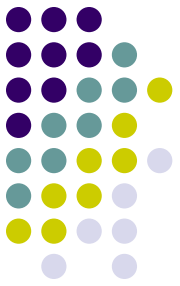
- και τελικά

$$P_e = 1.5Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

---

# Πιθανότητα σφάλματος και σηματοθορυβική σχέση





# Σηματοθορυβική σχέση εξόδου

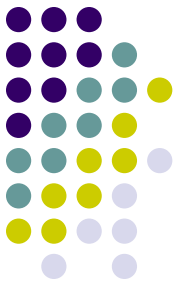
- Η επίδραση της σηματοθορυβικής σχέσης στην πιθανότητα σφάλματος εκδηλώνεται μέσω του πλάτους των παλμών
- Το πλάτος με τη σειρά του εξαρτάται από το είδος σηματοδότησης
  - Για μονοπολική (και διπολική) σηματοδότηση  $S_R = A^2/2$
  - Για πολική σηματοδότηση  $S_R = A^2/4$

- Επομένως

$$A = \begin{cases} \sqrt{2S_R} & \text{μονο- (δι-) πολική} \\ \sqrt{4S_R} & \text{πολική} \end{cases}$$

- ο παράγων  $\sqrt{2}$  μπορεί να έχει σημαντική επίδραση στην  $P_e$

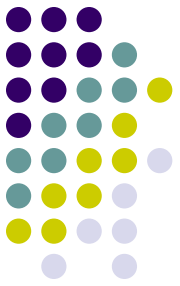
# Σηματοθορυβική σχέση εξόδου



- Η μεταβλητότητα  $\sigma^2$  ισούται με την ισχύ του θορύβου στην έξοδο του φίλτρου  $N_R$
- Ο λόγος  $A/2\sigma$  συναρτήσει της σηματοθορυβικής σχέσης  $SNR_c = S_R/N_R$  είναι

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{A^2}{4N_R} = \begin{cases} SNR_c / 2 & \text{μονο- (δι-) πολική} \\ SNR_c & \text{πολική} \end{cases}$$

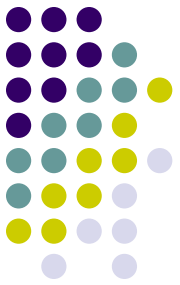
# Πιθανότητα σφάλματος ως προς σηματοθορυβική σχέση



- Άρα

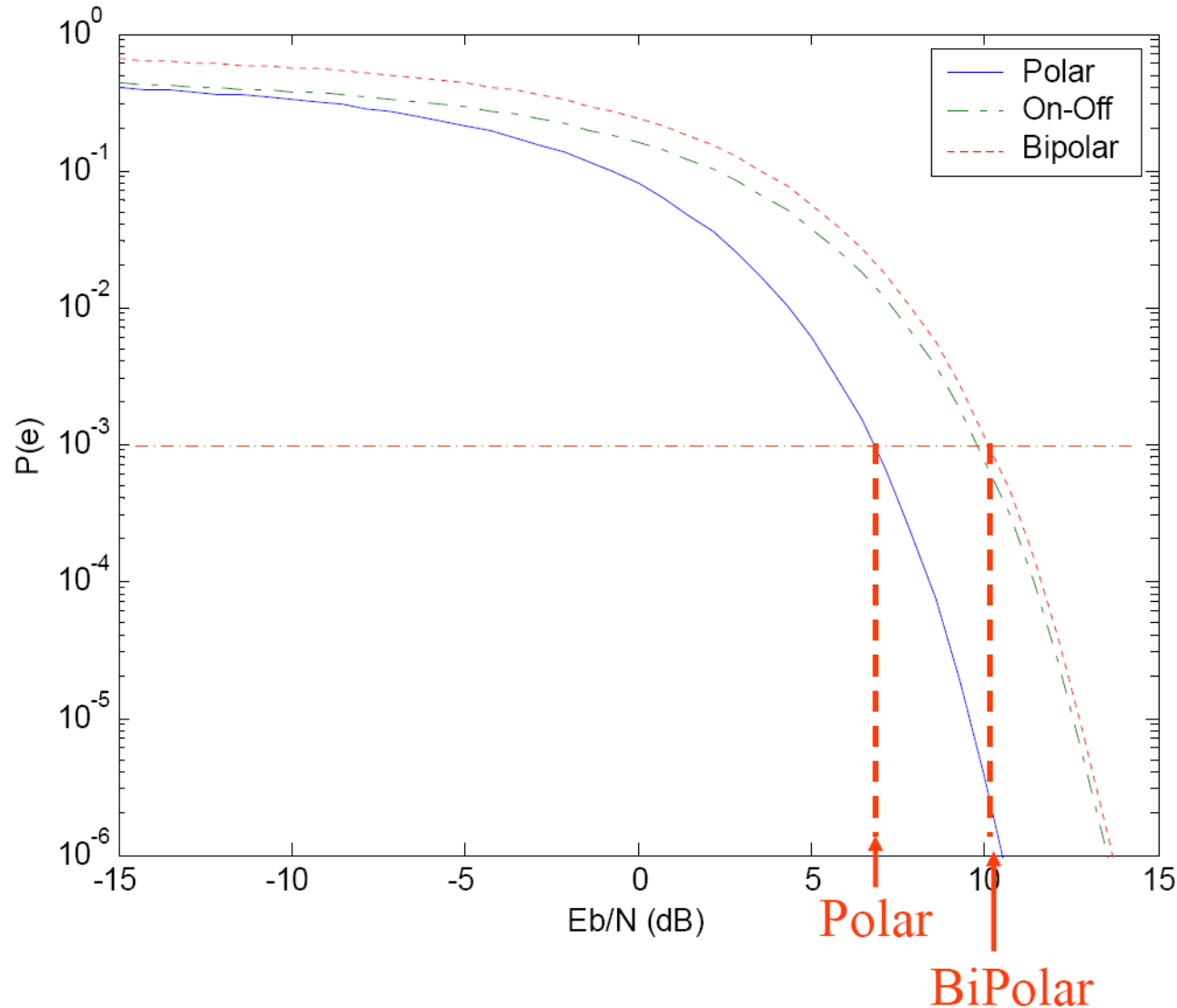
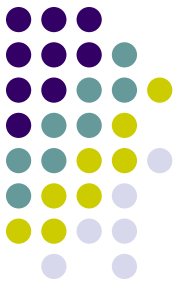
$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{SNR_c / 2}\right) & \text{μονοπολική} \\ 1.5Q\left(\sqrt{SNR_c / 2}\right) & \text{διπολική} \\ Q\left(\sqrt{SNR_c}\right) & \text{πολική} \end{cases}$$

# Πιθανότητα σφάλματος και ρυθμός σηματοδότησης



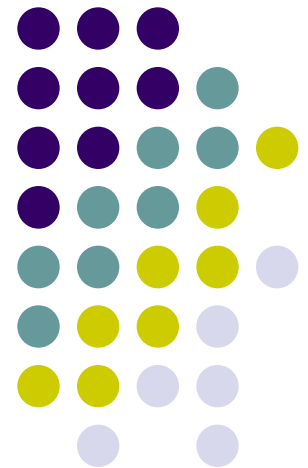
- Η επίδραση του ρυθμού σηματοδότησης  $r_b$  είναι κρυμμένη στην ισχύ του θορύβου
- Για να περάσουν παλμοί διάρκειας  $T_b = 1/r_b$  από το βαθυπερατό φίλτρο  
→ αυτό πρέπει να έχει εύρος ζώνης  $B_N \geq r_b/2$
- Άρα
$$N_R = N_0 B_N \geq N_0 r_b / 2$$
- Μεγαλύτεροι ρυθμοί σηματοδότησης απαιτούν μεγαλύτερη ισχύ σήματος για να διατηρήσουν την ίδια πιθανότητα λάθους!

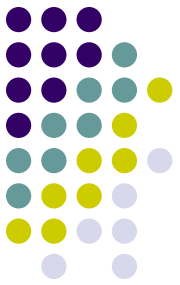
# Σύγκριση πιθανοτήτων σφάλματος



---

# Προσαρμοσμένο φίλτρο (Matched filter )

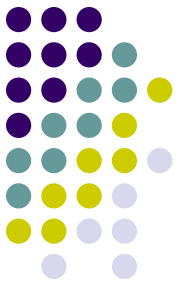




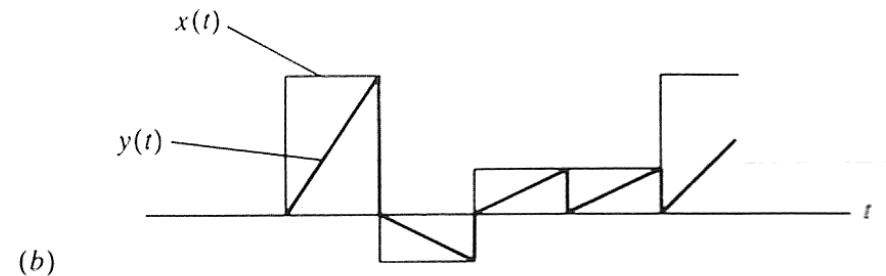
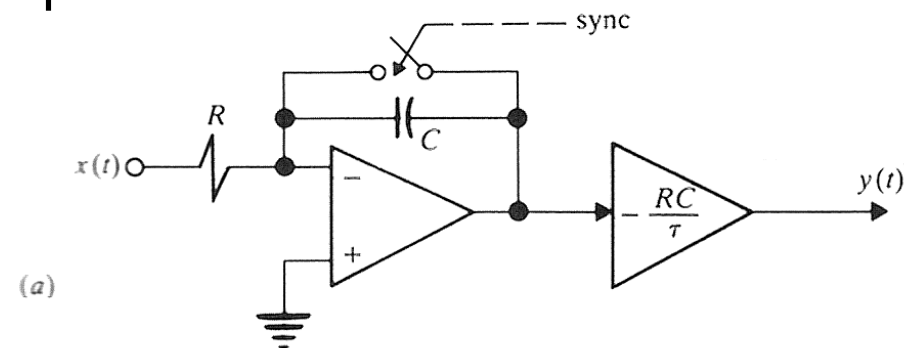
# Προσαρμοσμένο φίλτρο

- Κάθε ψηφιακός δέκτης περιλαμβάνει ένα βαθυπερατό φίλτρο για να περιορίσει το θόρυβο χωρίς εισαγωγή ISI
- Ποιο είναι το βέλτιστο φίλτρο;
- Για χρονικά περιορισμένους παλμούς σε λευκό θόρυβο  
→ προσαρμοσμένο φίλτρο

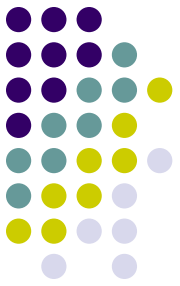
# Υλοποίηση με τελεστικό ενισχυτή



- Φίλτρο ολοκλήρωσης και απόρριψης (integrate and dump)
  - Ολοκλήρωση του σήματος μέχρι το τέλος της διάρκειας παλμού
  - Μηδενισμός και επανεκκίνηση

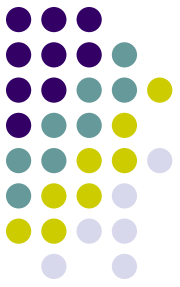


# Λόγος ενέργειας bit προς πυκνότητα θορύβου



- Η μέση ενέργεια ανά bit ορίζεται ως
$$E_b \triangleq S_R / r_b$$
- Ο λόγος ενέργειας bit προς πυκνότητα θορύβου είναι
$$E_b / N_0 = S_R / N_0 r_b$$
- Για παλμούς πλάτους  $a_k$  η μέση ενέργεια ανά bit είναι
$$E_b = \overline{a_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt = \overline{a_k^2} \tau_{eq}$$
- Επιλέγοντας το προσαρμοσμένο φίλτρο ως
$$h(t) = \frac{1}{\tau_{eq}} p(t_d - t)$$
η μέγιστη έξοδος του φίλτρου είναι  $a_k$

# Λόγος ενέργειας bit προς πυκνότητα θορύβου



- Η ισχύς του θορύβου στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

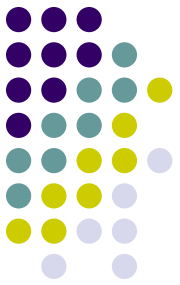
$$N_R = \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2\tau_{eq}}$$

- επομένως

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{\overline{a_k^2}}{2\sigma^2}$$

- και ανάλογα με τη σηματοδότηση

$$\left( \frac{A}{2\sigma} \right)^2 = \begin{cases} E_b / N_0 & \text{μονο- (δι-) πολική} \\ 2E_b / N_0 & \text{πολική} \end{cases}$$



# Πιθανότητα σφάλματος

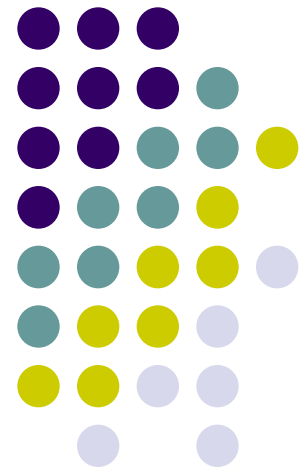
- Η πιθανότητα σφάλματος μπορεί να επανυπολογισθεί συναρτήσει του **λόγου ενέργειας bit προς πυκνότητα θορύβου**

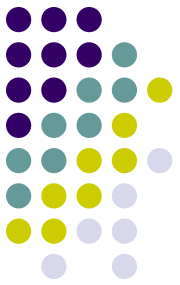
$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{E_b / N_0}\right) & \text{μονοπολική} \\ Q\left(\sqrt{2E_b / N_0}\right) & \text{πολική} \\ 1.5Q\left(\sqrt{E_b / N_0}\right) & \text{διπολική} \end{cases}$$

- Οι ελάχιστες δυνατές τιμές της πιθανότητας σφάλματος επιτυγχάνονται μόνο με το προσαρμοσμένο φίλτρο
  - Ως εάν  $B_N = 1/2r_b \rightarrow N_R = N_0r_b/2$ , άσχετα του εάν αυτό αληθεύει

---

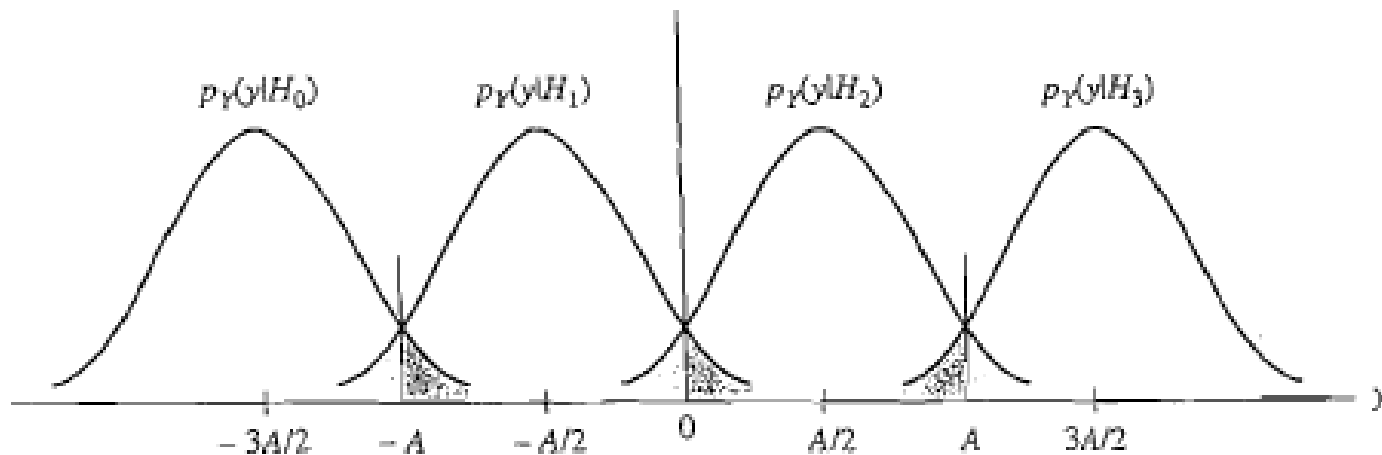
Πιθανότητα σφάλματος για  $M$ -κη  
σηματοδότηση





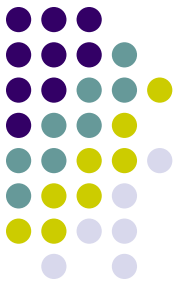
# Τα κατώφλια απόφασης

- Στη γενική περίπτωση  $M$ -κης σηματοδότησης με  $M$  άρτιο και ισοπίθανες εμφανίσεις των συμβόλων



τα πλάτη των συμβόλων είναι

$$a_k = \pm A/2, \pm 3A/2, \dots, \pm (M-1)A/2$$



# Η πιθανότητα σφάλματος

- Η πιθανότητα σφάλματος για ισοπίθانا σύμβολα είναι

$$P_e = \frac{1}{M} (P_{e0} + P_{e1} + \dots + P_{eM-1})$$

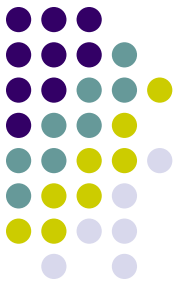
- Για τα δύο ακραία σύμβολα

$$P_{e0} = P_{eM-1} = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

- Για τα ενδιάμεσα σύμβολα

$$P_{e1} = P_{e1} = \dots = P_{eM-2} = 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

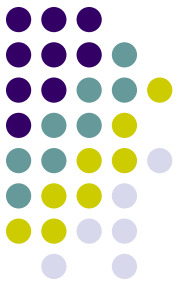
# Πιθανότητα σφάλματος για $M$ -κη σηματοδότηση



- Τελικά

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{M} \left[ 2 \times Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + (m-2) \times 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \right] \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{M} \right) Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

# Πιθανότητα σφάλματος και σηματοθορυβική σχέση



- Με τη μέση ενέργεια ενός  $M$ -κού συμβόλου να είναι

$$E_M = \overline{a_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt = \overline{a_k^2} \tau_{\text{eq}}$$

για ισοπίθانا σύμβολα

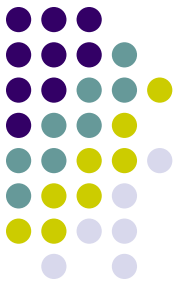
$$\overline{a_k^2} = \frac{M^2 - 1}{12} A^2$$

- Επομένως

$$\left( \frac{A}{2\sigma} \right)^2 = \frac{3}{M^2 - 1} \frac{E_M}{\tau_{\text{eq}} \sigma^2} = \frac{3}{M^2 - 1} \frac{1}{r \tau_{\text{eq}}} \frac{S_R}{N_R}$$

όπου  $r$  ο ρυθμός σηματοδότησης και  $S_R/N_R$  η σηματοθορυβική σχέση στην είσοδο

# Πιθανότητα σφάλματος και σηματοθορυβική σχέση



- Για ορθογωνικούς παλμούς

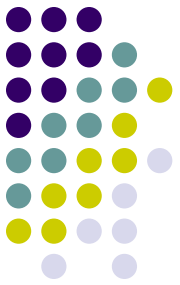
$$\tau_{eq} = D = 1/r$$

- ΟΠΟΤΕ

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{3}{M^2 - 1} \frac{S_R}{N_R} = \frac{3}{M^2 - 1} \frac{S_R}{N_0 B_N} \leq \frac{6}{M^2 - 1} \frac{S_R}{N_0 r}$$

αφού  $B_N \geq r/2$

# Πιθανότητα σφάλματος και σηματοθορυβική σχέση



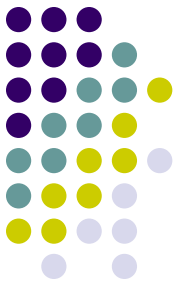
- Για το προσαρμοσμένο φίλτρο

$$N_R = \sigma^2 = \frac{N_0}{2\tau_{\text{eq}}}$$

- ΟΠΟΤΕ

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{6}{M^2 - 1} \frac{S_R}{N_0 r}$$

# Ρυθμός λανθασμένων bit (BER)



- Η πιθανότητα  $P_e$  αναφέρεται σε σύμβολα, όχι bit
- Εάν υποθέσουμε ότι η  $M$ -κη σηματοδότηση μεταφέρει δυαδικά μηνύματα, δηλαδή,  $M=2^n$

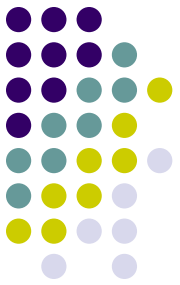
$$r_b = r \log_2 M$$

η πιθανότητα λάθους bit (για κώδικα Gray και αρκετά μεγάλη σηματοθορυβική σχέση) είναι

$$P_{be} \approx P_e / \log_2 M$$

- Συνήθως αναφέρεται ως **Bit Error Rate (BER)**

# Ρυθμός λανθασμένων bit (BER)



- Τελικά

$$P_{be} \approx 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

- Ως συνάρτηση της σηματοθορυβικής σχέσης

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \leq \frac{6}{M^2-1} \frac{S_R}{N_0 r} = \frac{6 \log_2 M}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}$$

με την ισότητα να ισχύει για το προσαρμοσμένο φίλτρο