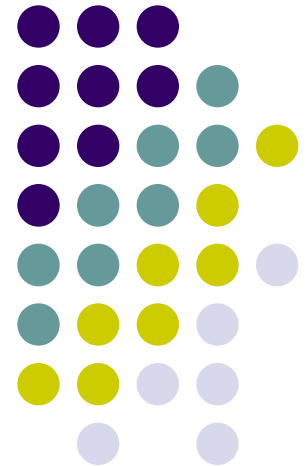
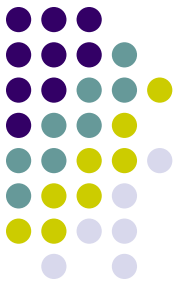


Δειγματοληψία

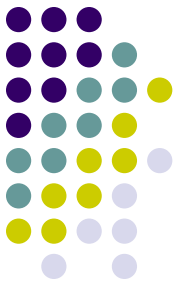




Θεώρημα δειγματοληψίας

- Ένα βαθυπερατό σήμα πεπερασμένης ενέργειας που δεν περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες των W Hertz μπορεί να περιγραφθεί πλήρως από τις τιμές του σε χρονικές στιγμές ισαπέχουσες κατά $1/2W$ sec
- Ένα βαθυπερατό σήμα πεπερασμένης ενέργειας που δεν περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες των W Hertz μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από δείγματά του που λαμβάνονται με ρυθμό $2W$ ανά sec
- Nyquist 1928, Shannon 1949

Φάσμα σήματος μετά τη δειγματοληψία



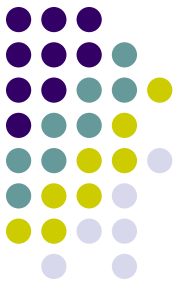
$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$x_{\delta}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$X_{\delta}(f) = X(f) \otimes \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

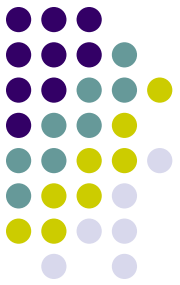
$$X_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) \otimes \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$X_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$



Περιοδικότητα φάσματος

- Η δειγματοληψία δημιουργεί **περιοδικό φάσμα**
 - **Διακριτός χρόνος → περιοδικό φάσμα**
- Αντιγράφει το φάσμα του αρχικού σήματος στα **ακέραια** πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας nf_s



Περιοδικότητα φάσματος

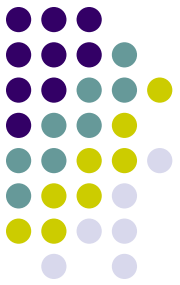
- Τα δείγματα του σήματος είναι οι συντελεστές Fourier του περιοδικού φάσματος

$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \Rightarrow$$

$$X_{\delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \exp(-j2\pi n f T_s) \Rightarrow$$

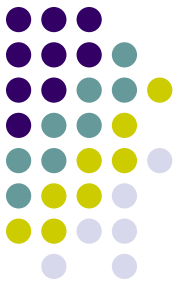
$$x(nT_s) = T_s \int_0^{1/T_s} X_{\delta}(f) \exp(jn2\pi f T_s) df$$

Επίδραση δειγματοληψίας στο φάσμα

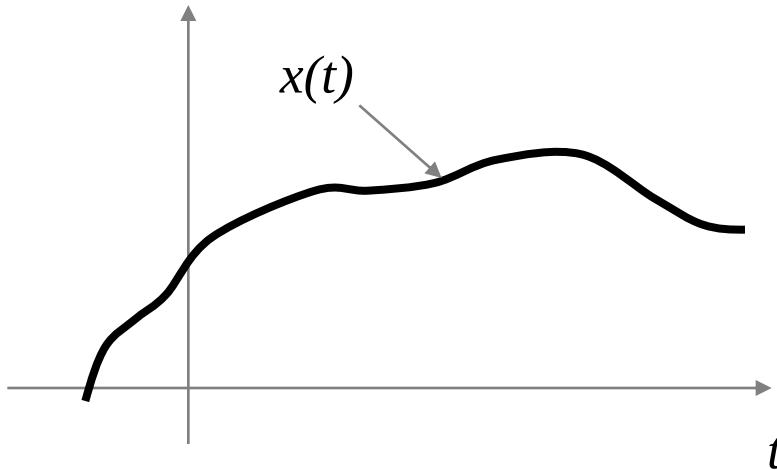


- Εάν η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s \geq 2W$, τότε το περιοδικό φάσμα συνίσταται σε μια **μη επικαλυπτόμενη επανάληψη** του φάσματος του αρχικού σήματος
 - Το αρχικό σήμα μπορεί να ληφθεί με διάβαση μέσω βαθυπερατού φίλτρου
- Εάν $f_s < 2W$ εμφανίζεται επικάλυψη (aliasing), δηλαδή, αναδίπλωση του φάσματος

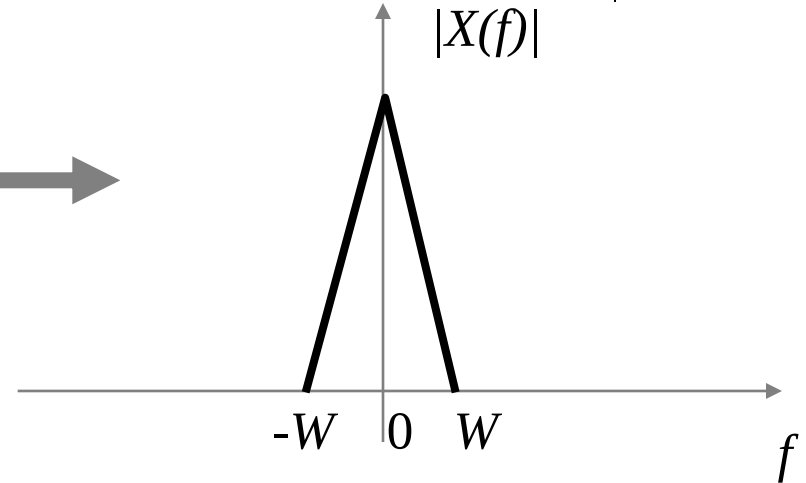
Επίδραση δειγματοληψίας στο φάσμα



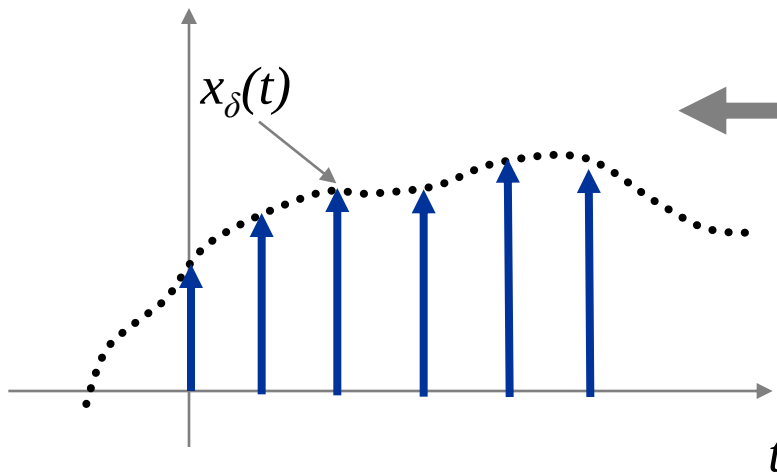
Αρχικό σήμα



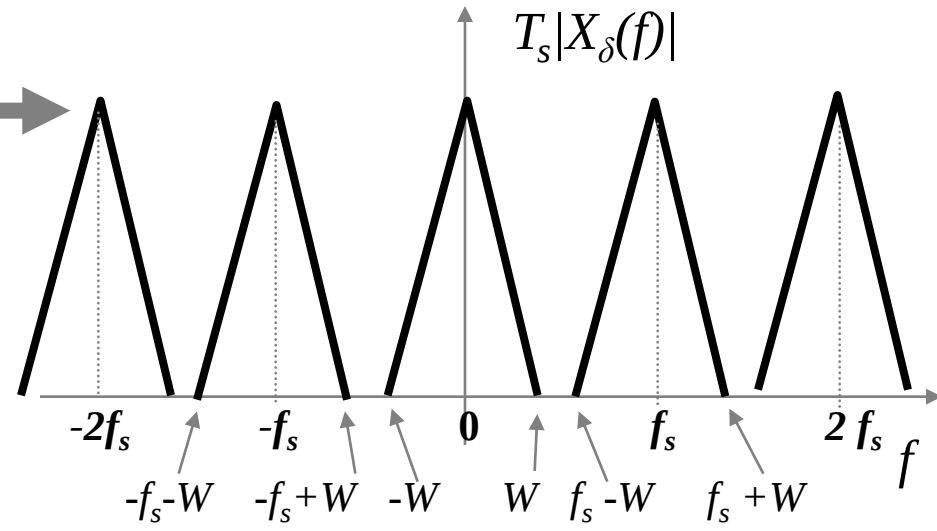
$\mathcal{F}$



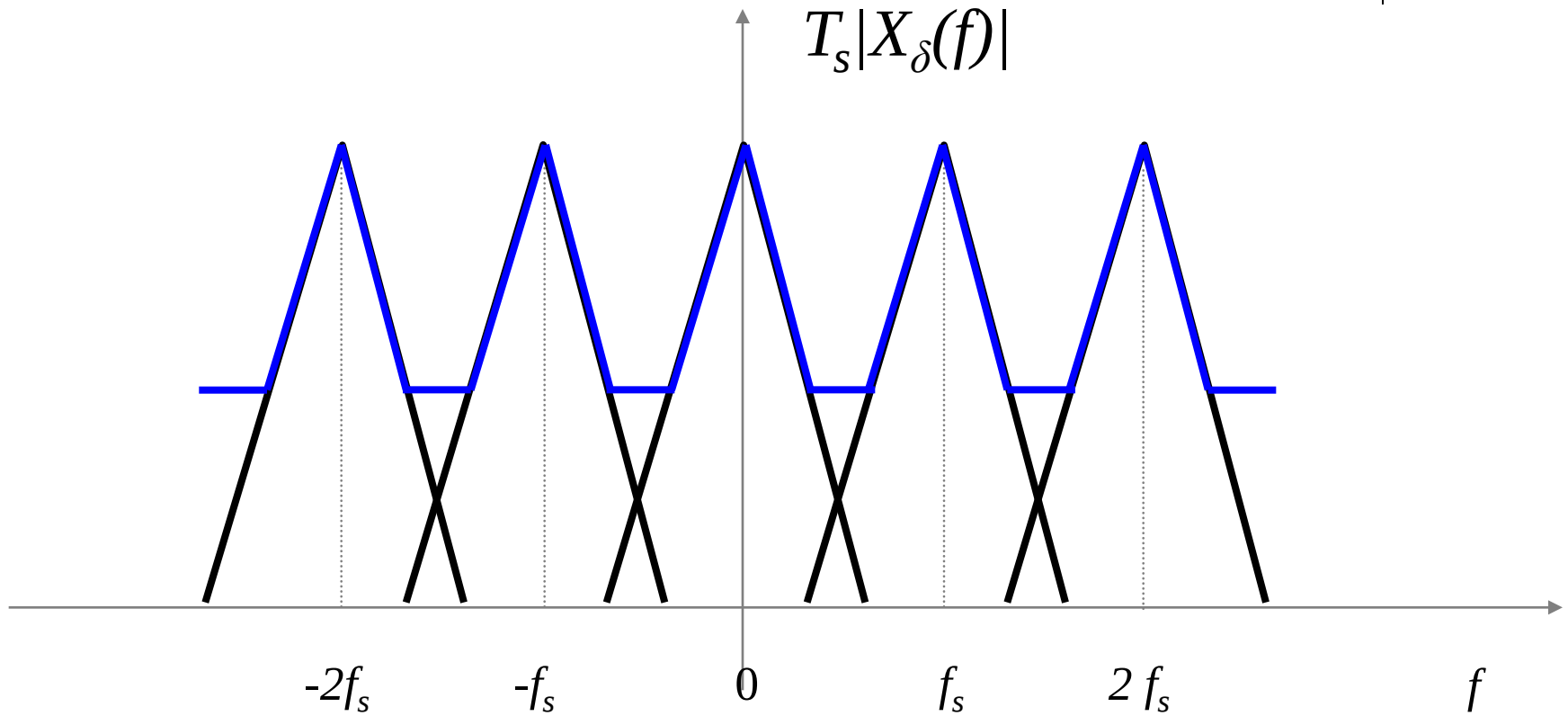
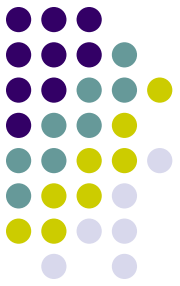
Μετά τη δειγματοληψία

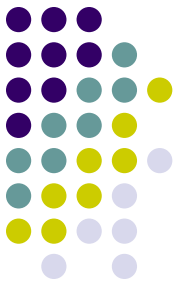


$\mathcal{F}$



Επικάλυψη



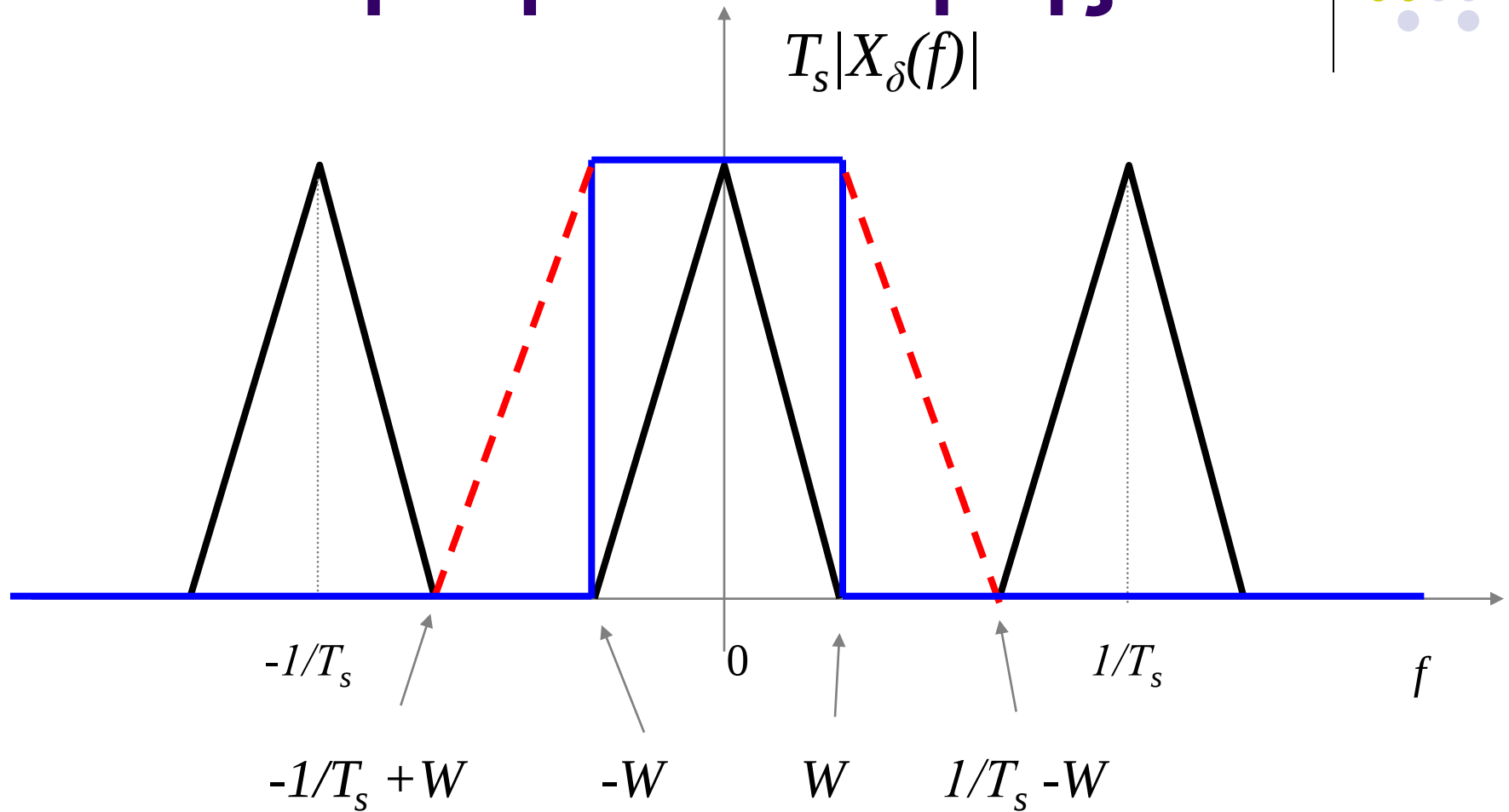
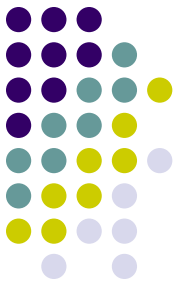


Ανάκτηση του σήματος

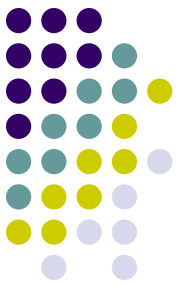
- Εάν $T_s \leq \frac{1}{2}W$ το αρχικό σήμα είναι η έξοδος οποιουδήποτε βαθυπερατού φίλτρου, όπου

$$H(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq W \\ 0 & |f| \geq \frac{1}{T_s} - W \\ ? & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ιδανικό φίλτρο ανάκτησης



- Απαιτείται ζώνη ασφάλειας (guard band)



Ανάκτηση του σήματος

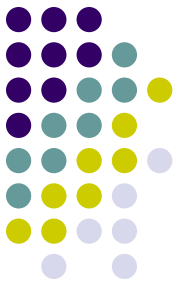
- Έστω βαθυπερατό φίλτρο ανάκτησης με εύρος ζώνης B , όπου $W \leq B \leq f_s - W$ τότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df = \int_{-B}^B T_s X_{\delta}(f) \exp(j2\pi ft) df$$

$$= T_s \int_{-B}^B \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \exp(-j2\pi n f T_s) \exp(j2\pi ft) df$$

$$= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-B}^B \exp[j2\pi f(t - nT_s)] df$$

$$= 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \operatorname{sinc}[2B(t - nT_s)]$$



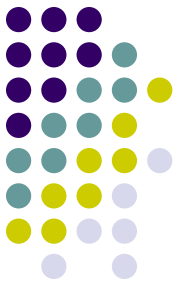
Ανάκτηση του σήματος

- Για το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο ανάκτησης με εύρος ζώνης W και $T_s = 1/2W$

$$x(t) = 2WT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}[2W(t - nT_s)]$$

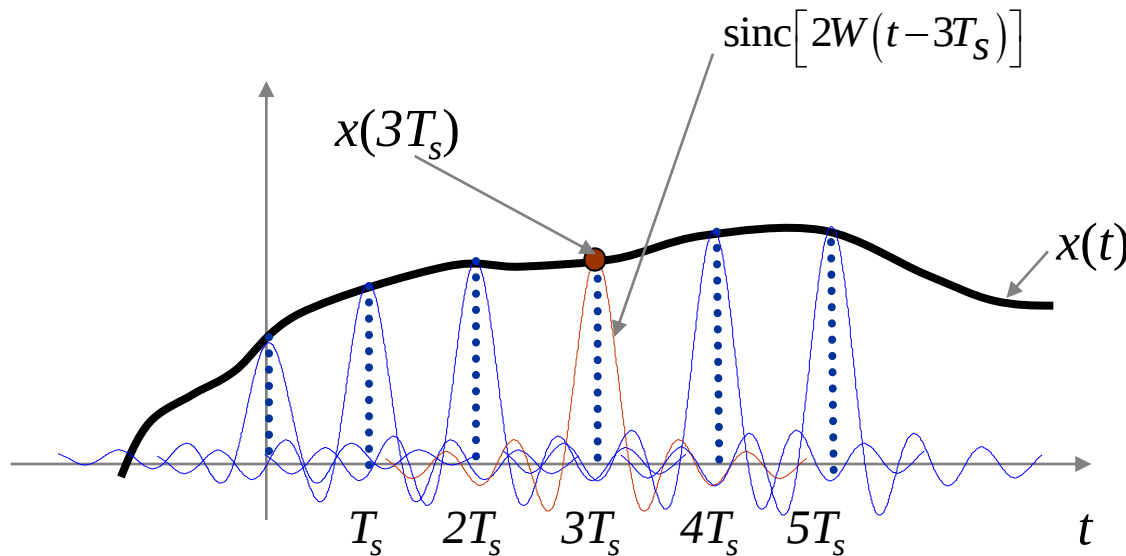
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

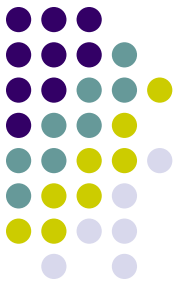
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}(f_s t - n)$$



Τι σημαίνει αυτό;

- Μπορούμε να λάβουμε το αρχικό σήμα χωρίς λάθη αθροίζοντας καθυστερημένες εκδοχές συναρτήσεων sinc με βάρη τα δείγματα

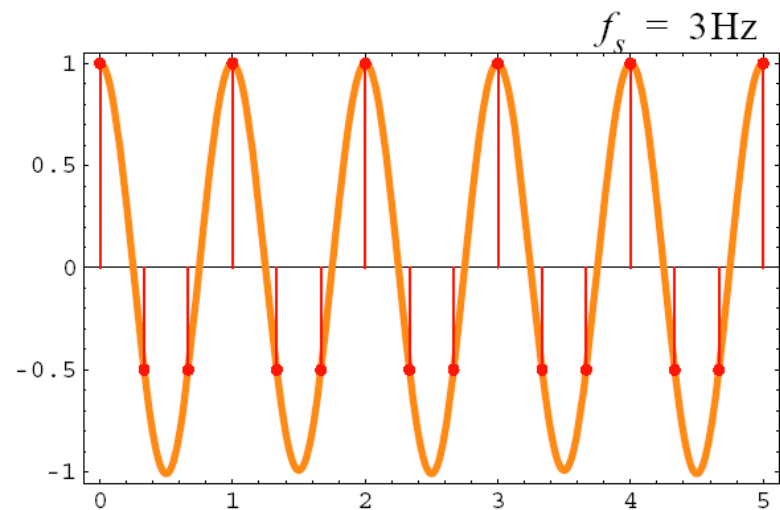
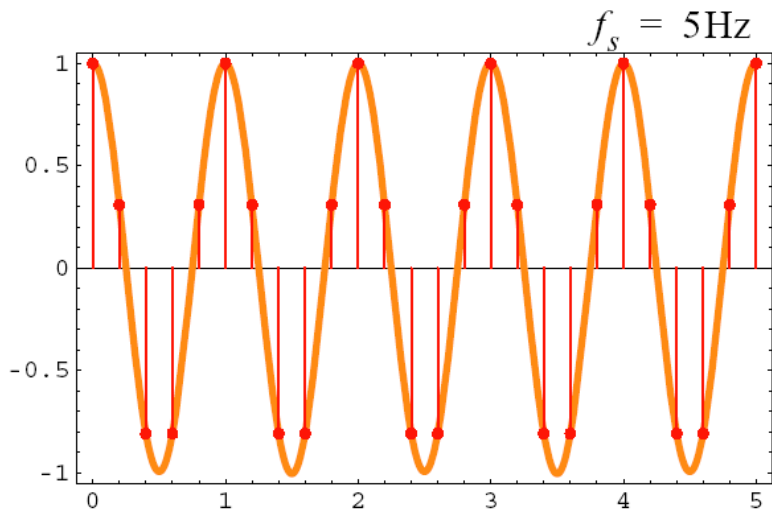
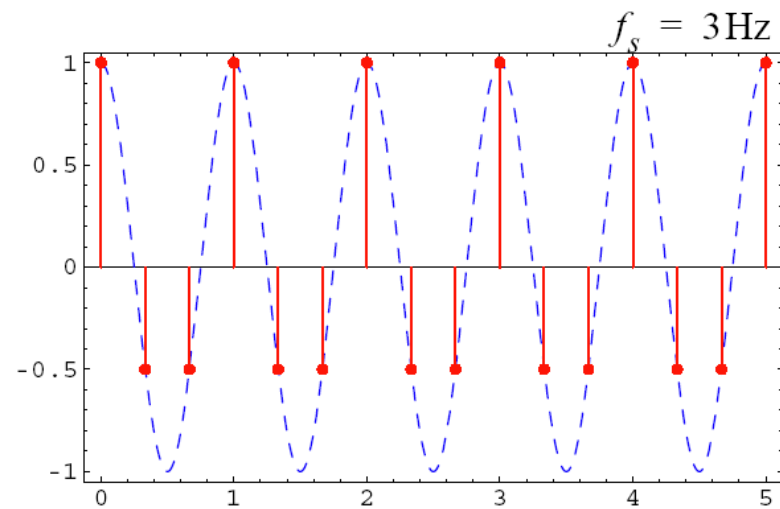
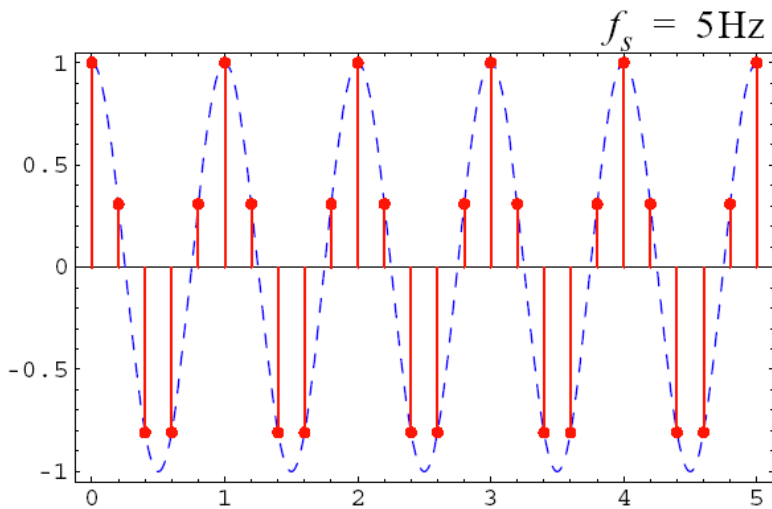
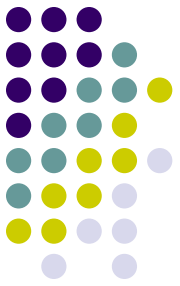




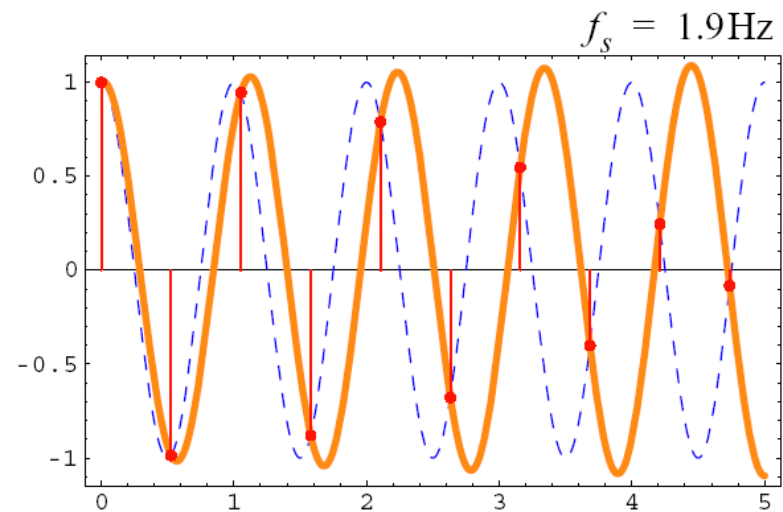
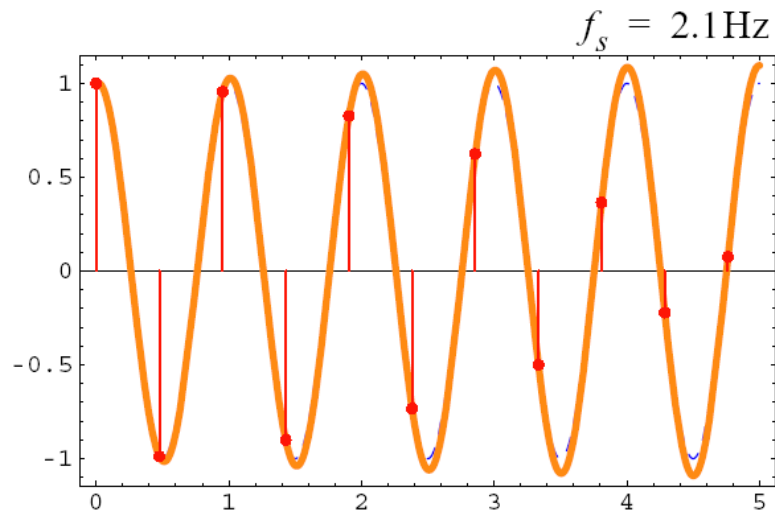
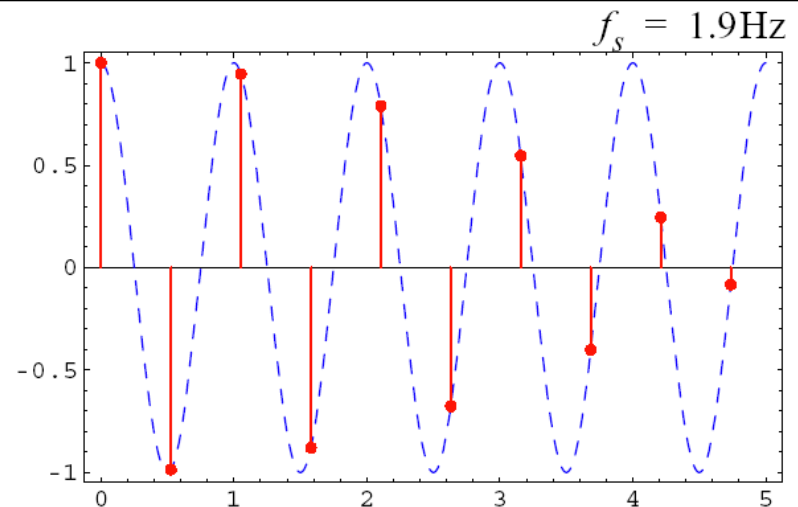
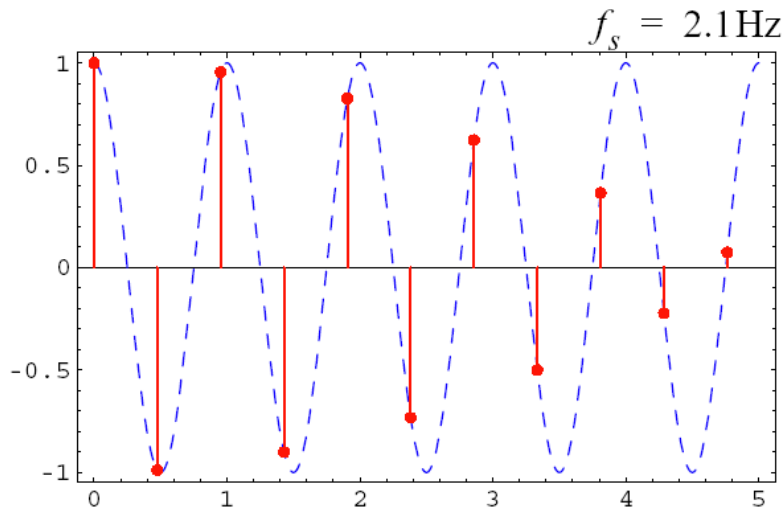
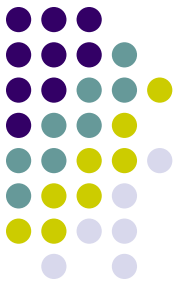
Παράδειγμα 1

- Έστω συνημιτονικό σήμα συχνότητας 1 Hz του οποίου λαμβάνονται δείγματα με συχνότητα $f_s = 5, 3, 2.1, 1.9, 1.4$ και 1.1 Hz
- Ανασκευάστε το σήμα από τα δείγματά του

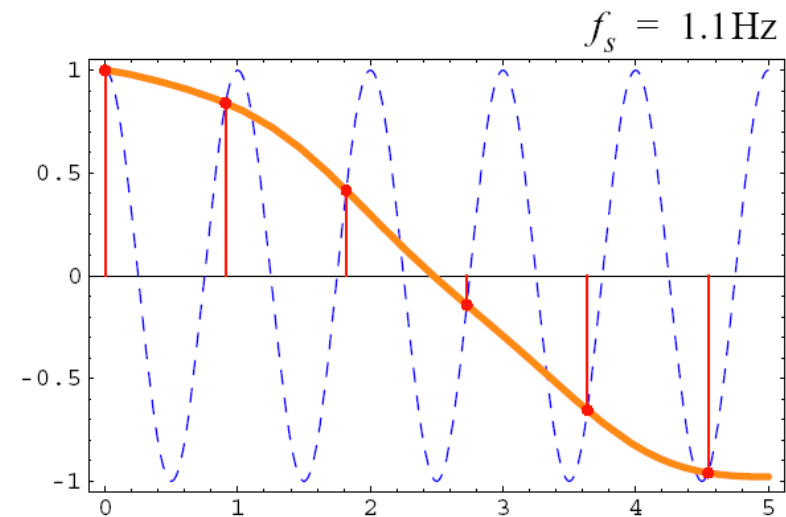
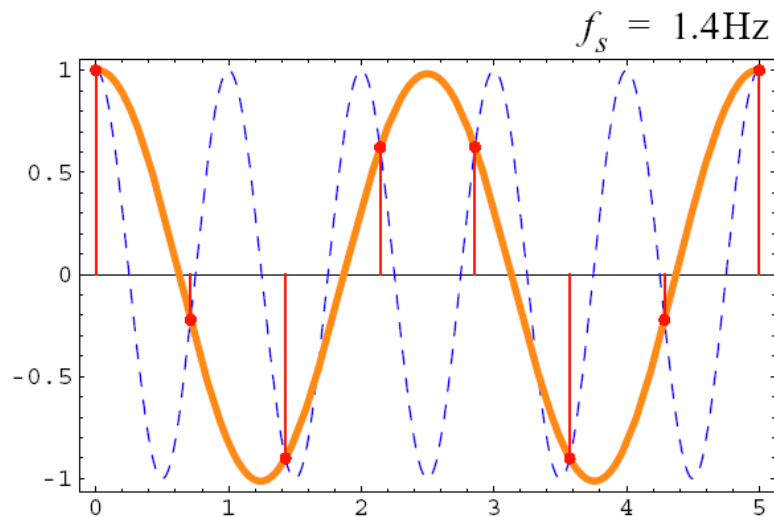
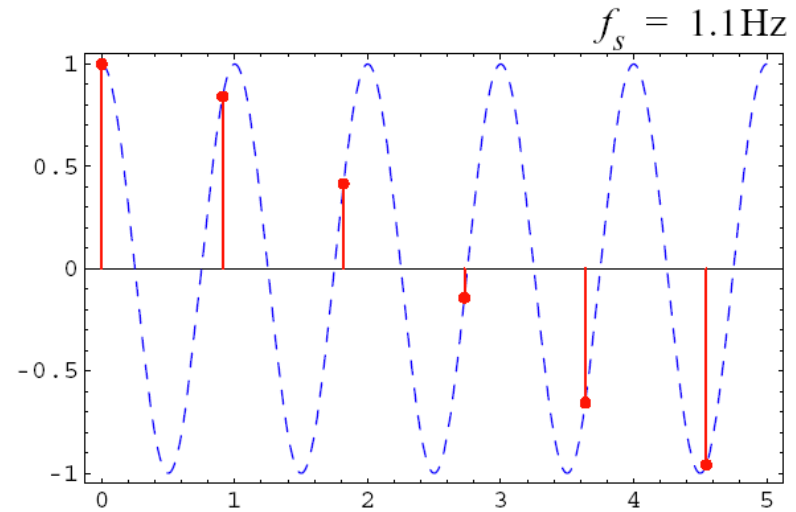
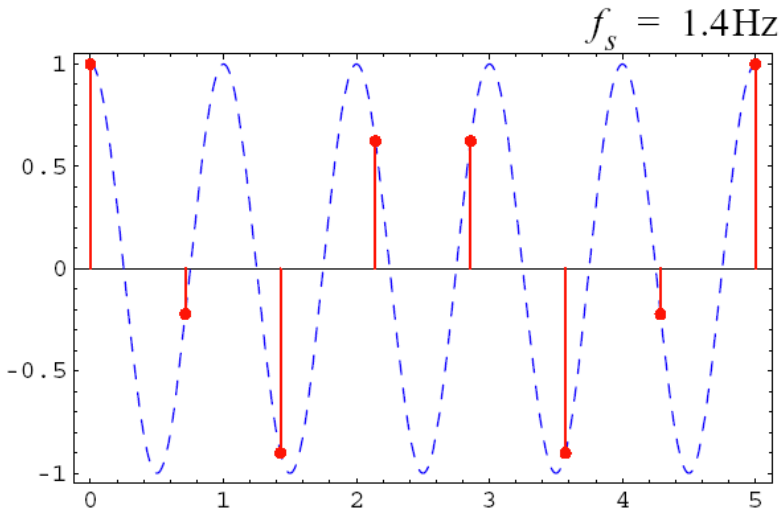
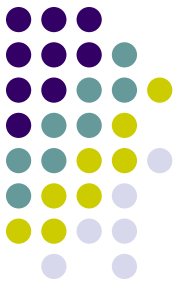
Παράδειγμα 1 - Συχνότητα δειγματοληψίας > 2 Hz



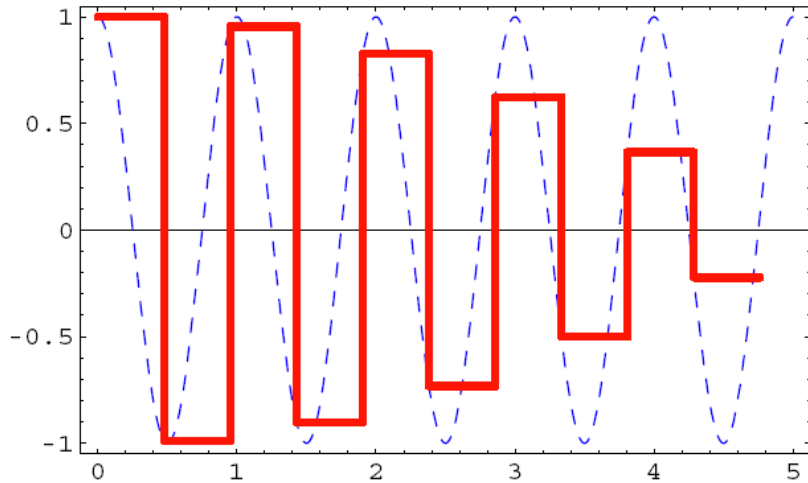
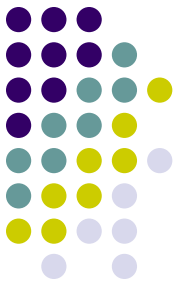
Παράδειγμα 1 - Συχνότητα δειγματοληψίας ~ 2 Hz



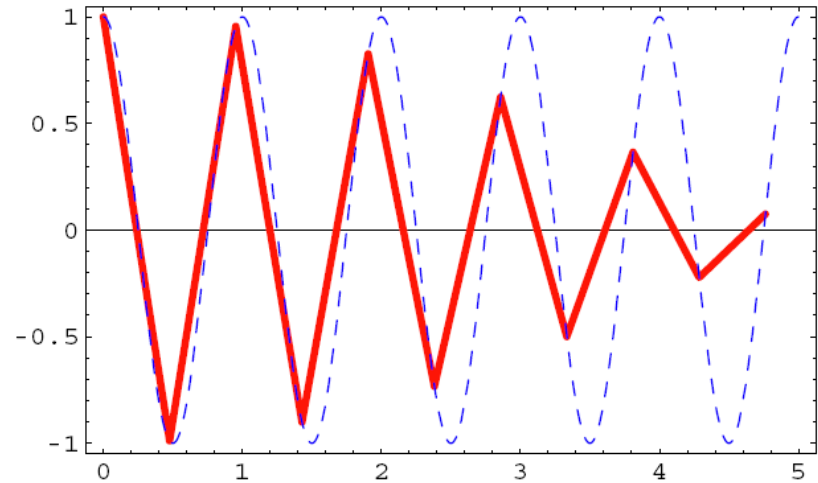
Παράδειγμα 1 - Συχνότητα δειγματοληψίας < 2 Hz



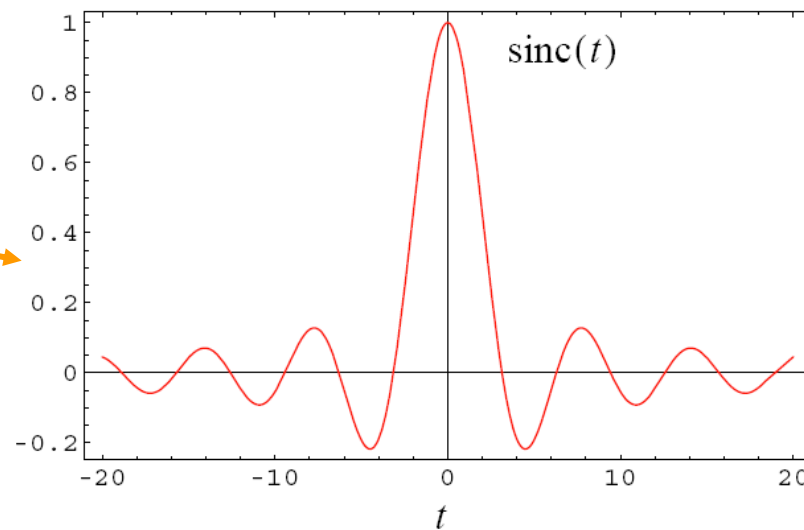
Κακές αναπαραστάσεις



$f_s = 2.1\text{Hz}$

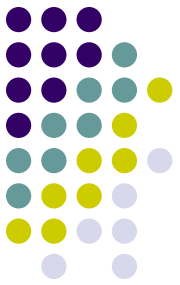


$f_s = 2.1\text{Hz}$



Τα δείγματα πρέπει να
πολλαπλασιαστούν με

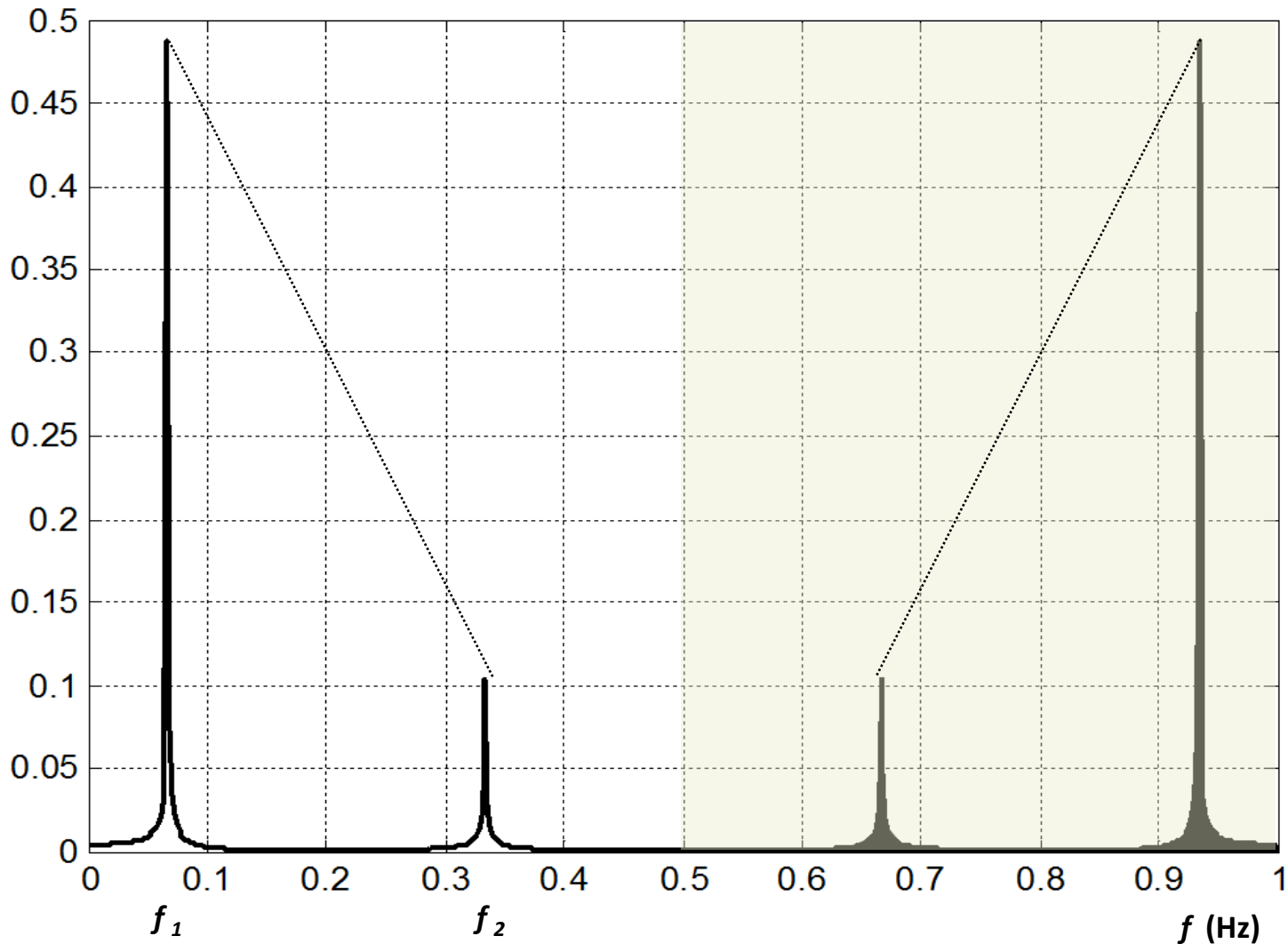




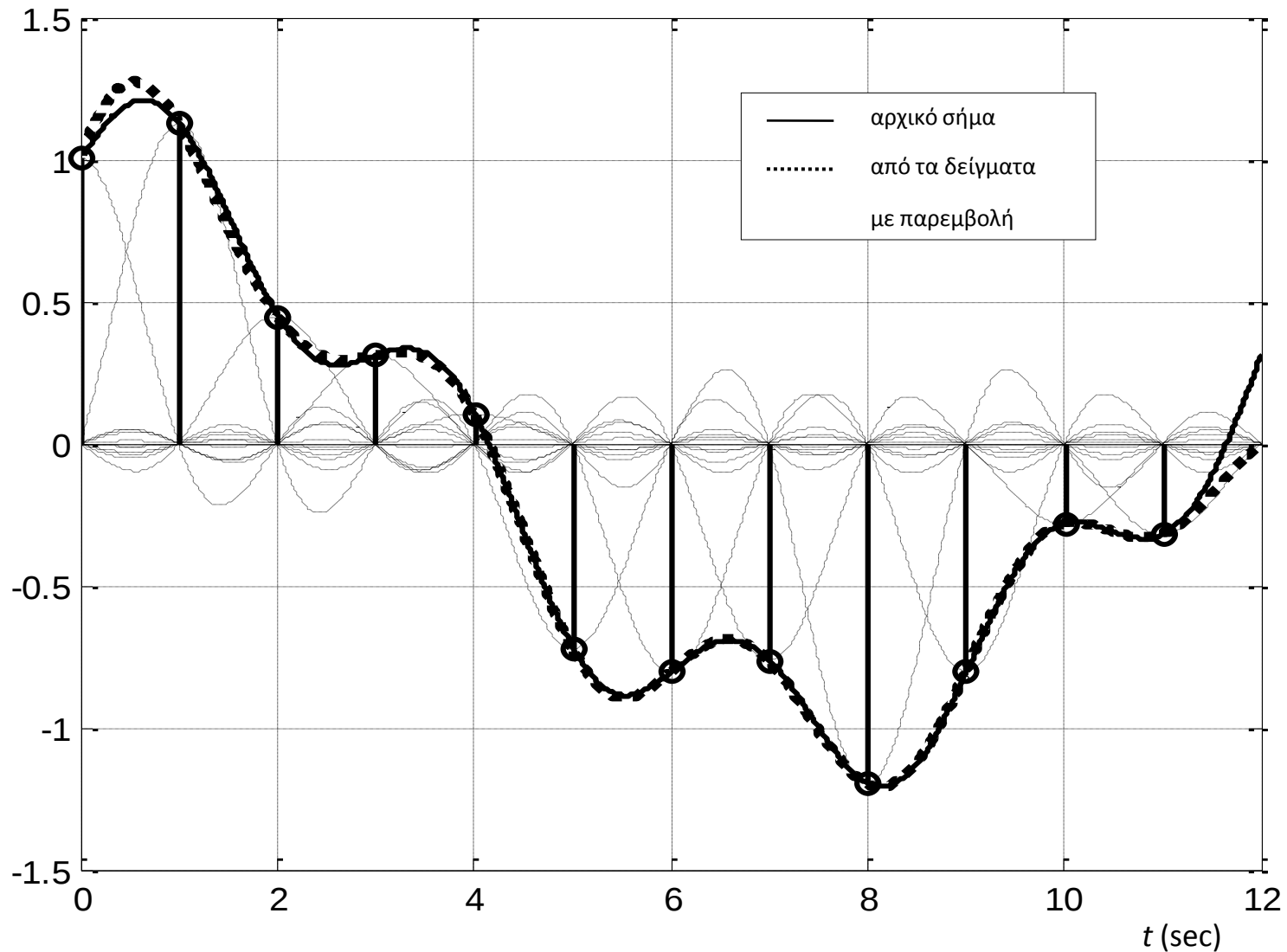
Παράδειγμα 2

- Έστω σήμα που προκύπτει ως άθροισμα δύο ημιτονικών κυματομορφών συχνότητας $f_1=0.067$ Hz και $f_2=0.333$ Hz

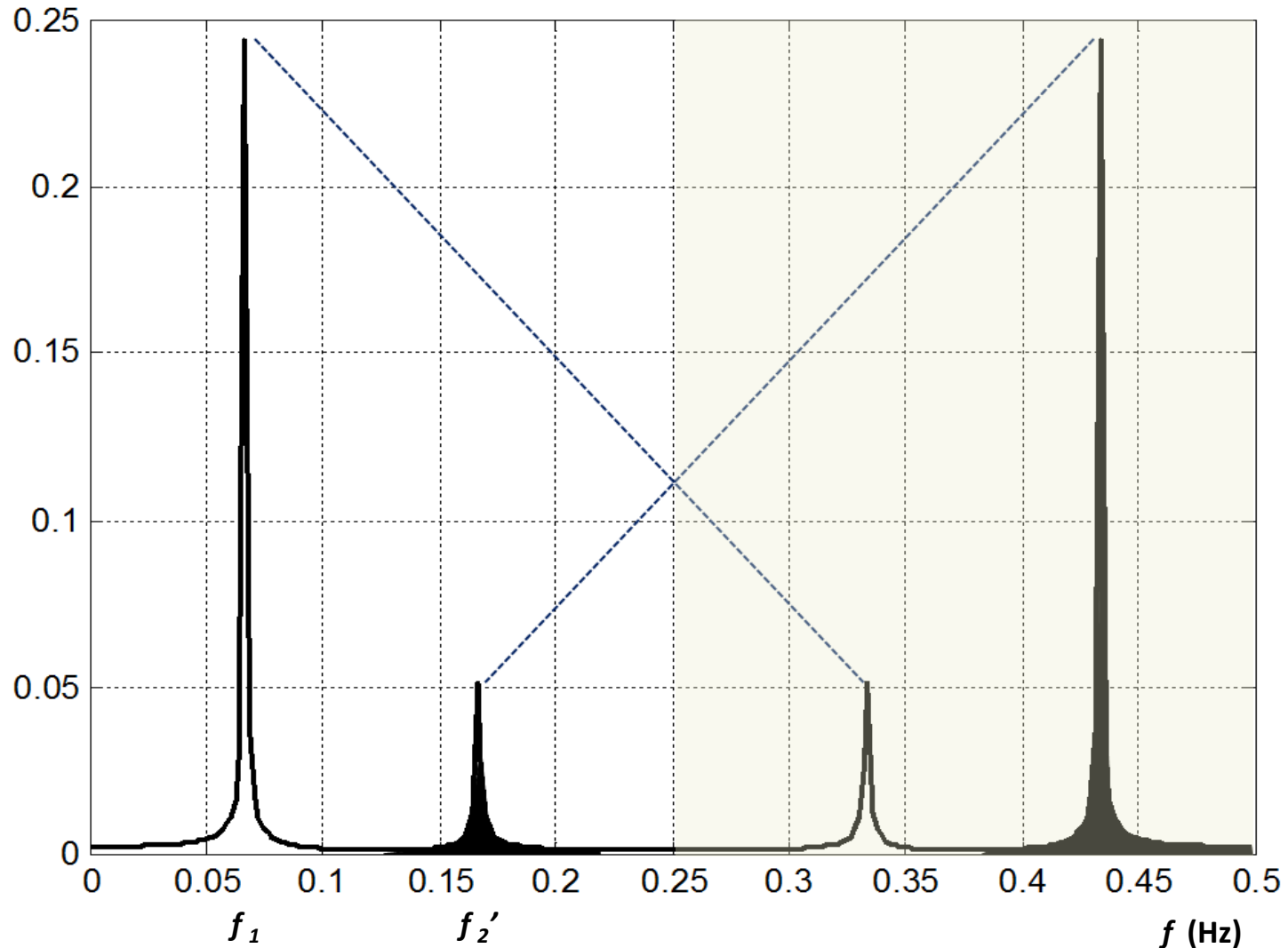
Παράδειγμα 2 – πεδίο συχνότητας



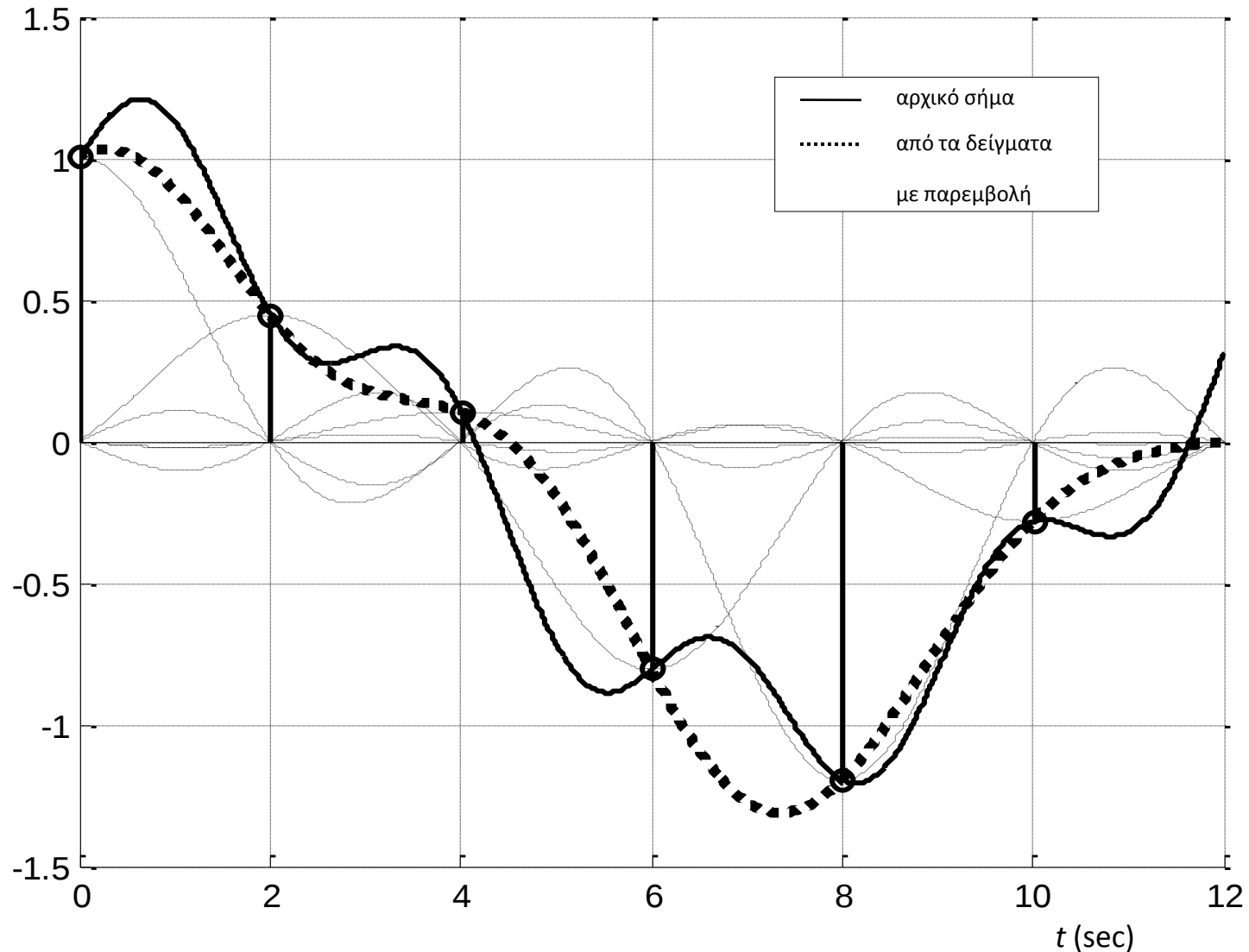
Παράδειγμα 2 – Ανακατασκευή στο πεδίο χρόνου ($f_s=1$ Hz)



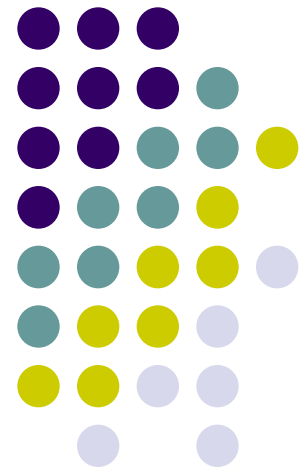
Παράδειγμα 2 – Επικάλυψη δειγματοληψία με ($f_s=0.5$ Hz)



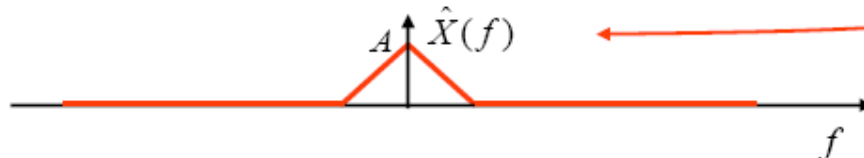
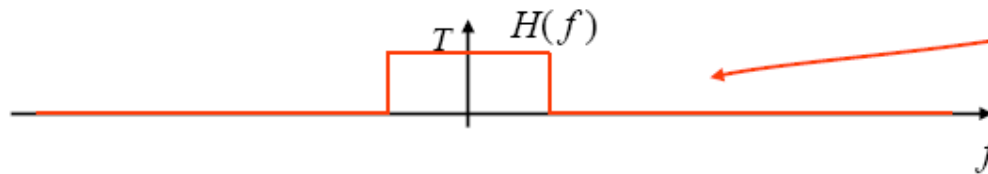
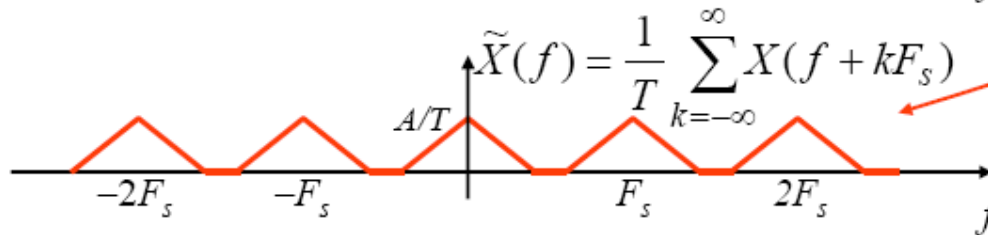
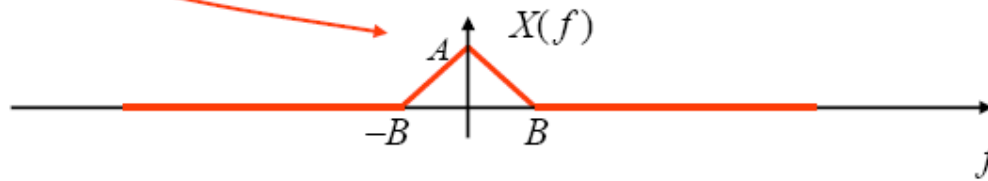
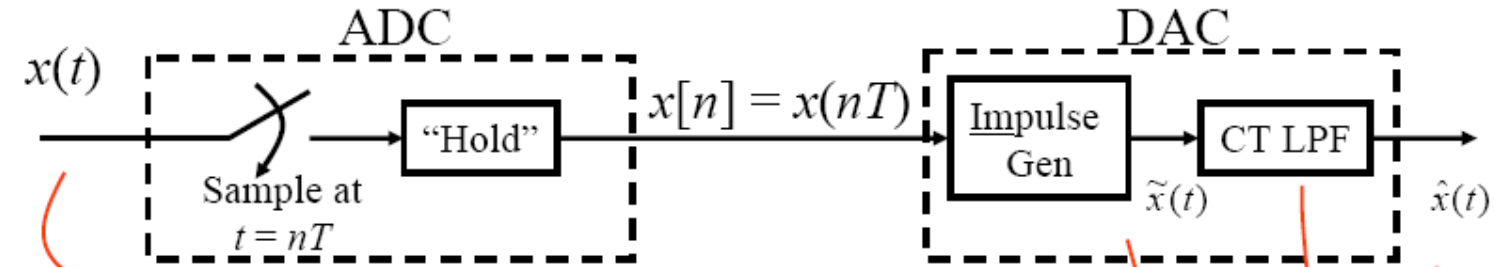
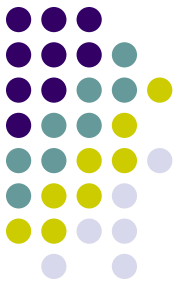
Παράδειγμα 2 – Επικάλυψη στο πεδίο του χρόνου



Σχέση δειγματοληψίας και μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

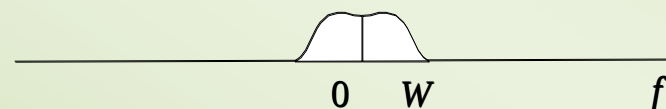
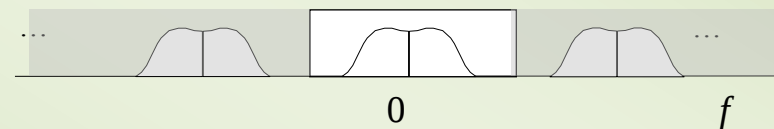
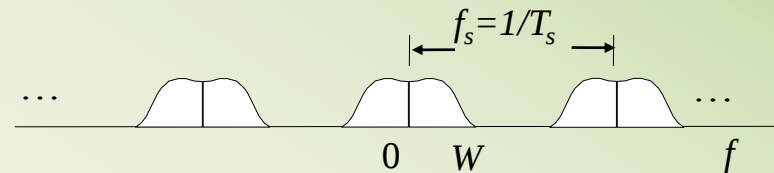
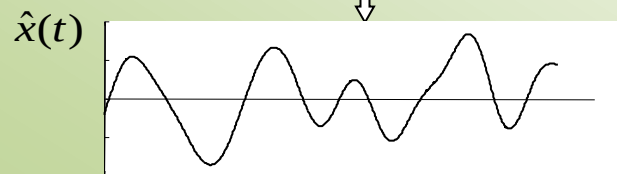
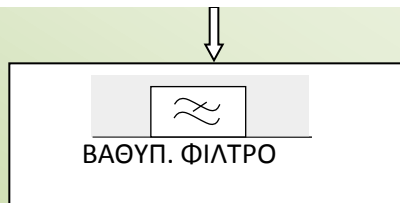
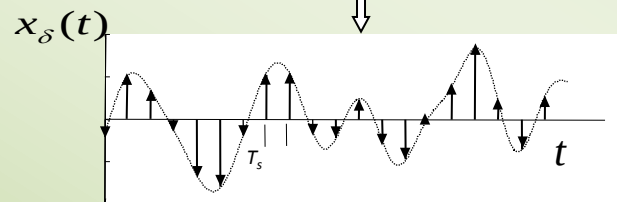
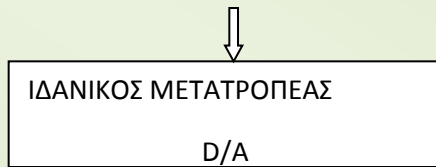
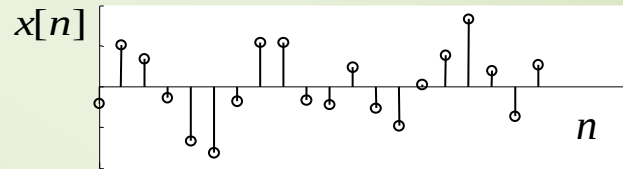
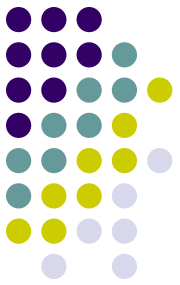


Δειγματοληψία και ανακατασκευή

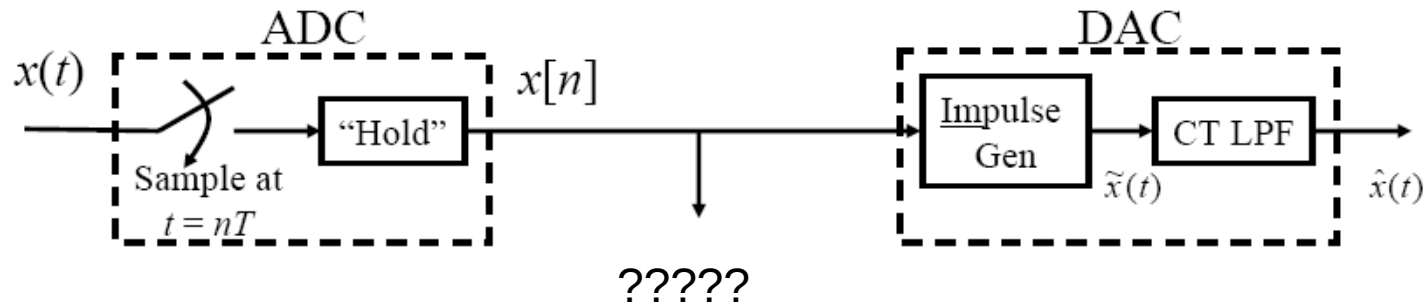
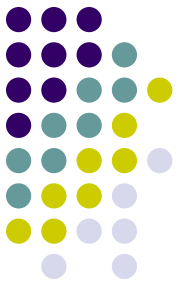


$$\hat{X}(f) = X(f), \quad \text{εάν} \quad F_s \geq 2B$$

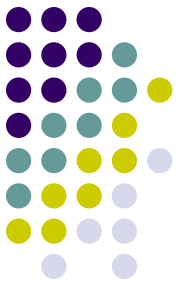
Ανακατασκευή από τα δείγματα



Τι ισχύει με τα δείγματα;



$$X_{\delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \exp(-j2\pi n f T_s)$$

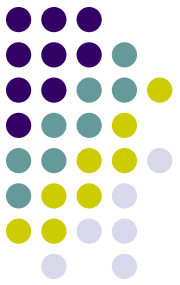


DTFT

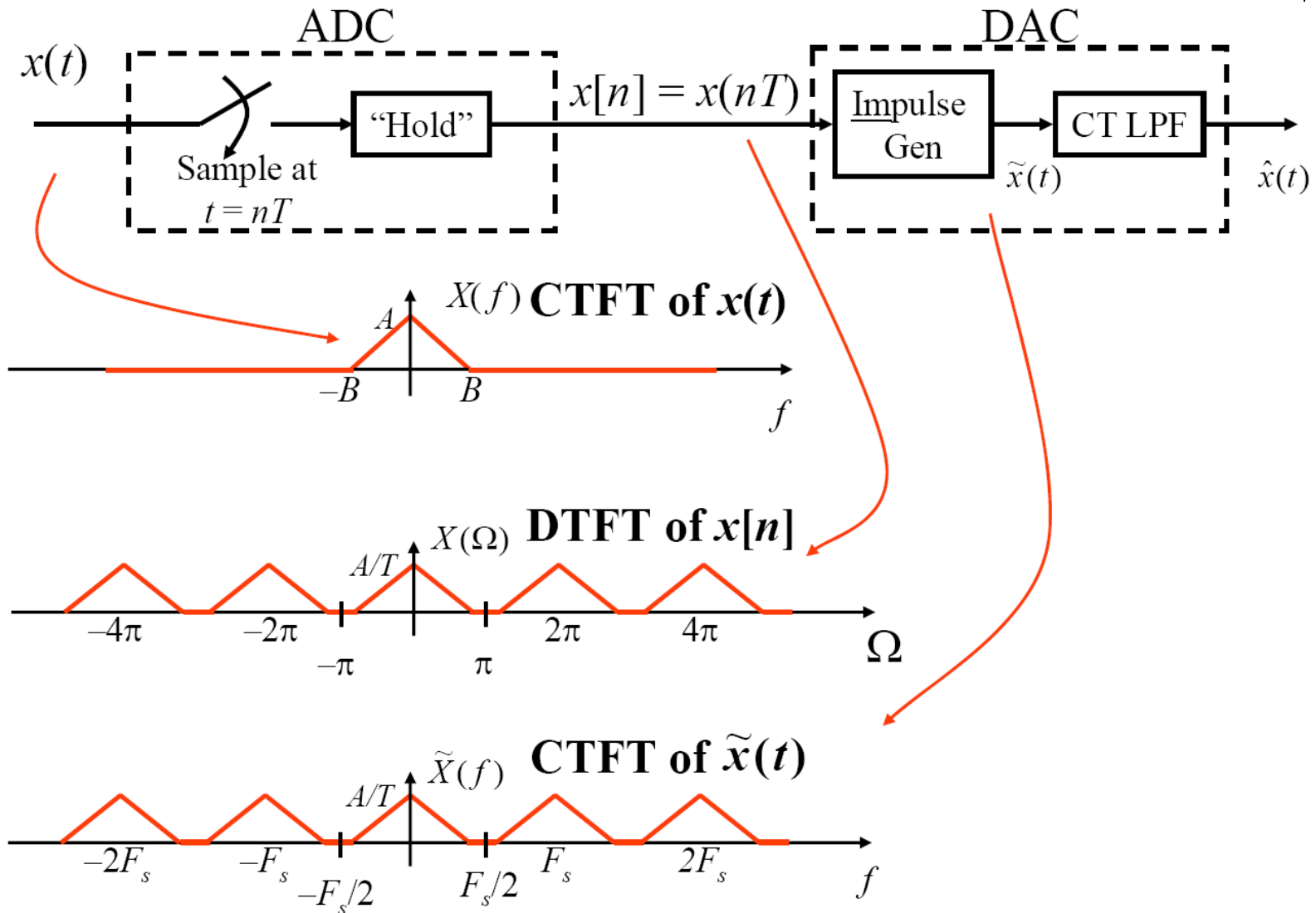
- Η δειγματοληψία αποτελεί τη βάση για τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

- DTFT
$$X(\Omega) \triangleq \sum_n x[n] e^{-jn\Omega}$$

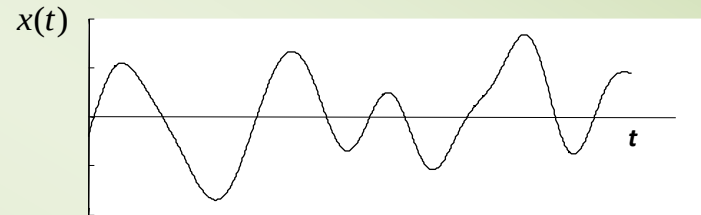
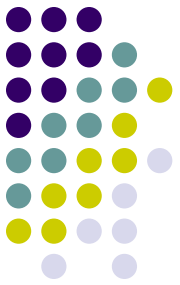
- IDTFT
$$x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega$$



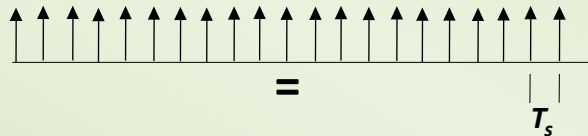
Η φυσική σημασία του DTFT



Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)

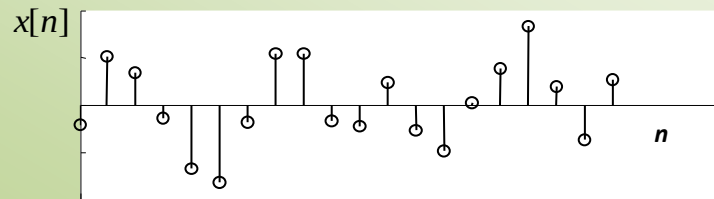
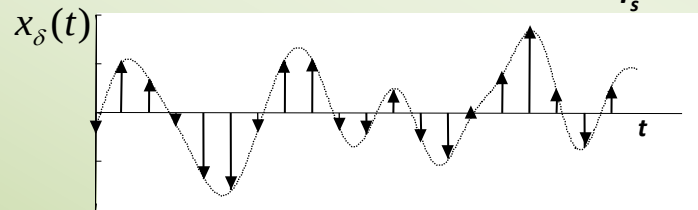


x

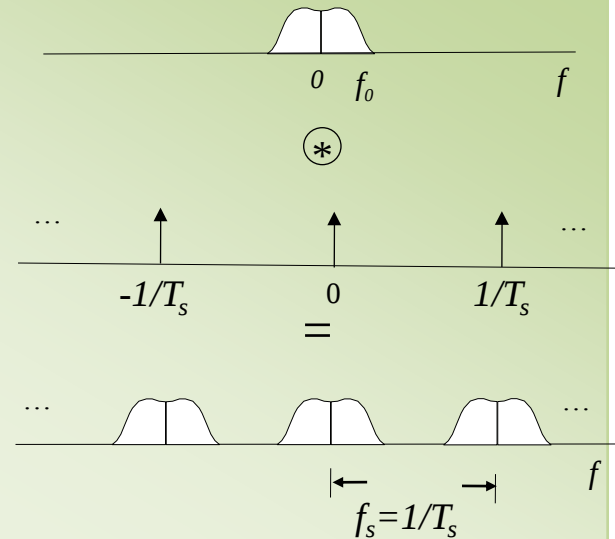


$=$

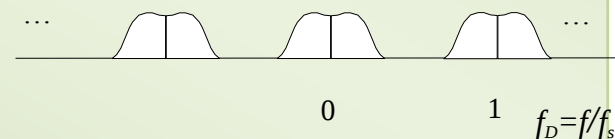
T_s



(α)

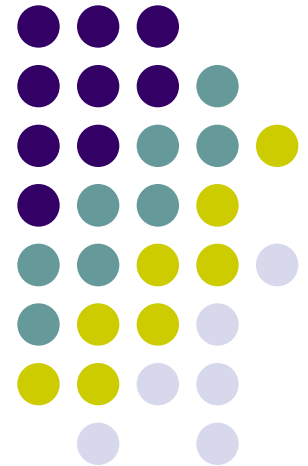


$$X(f_D) = \sum_n x[n] e^{-j2\pi n f_D}$$

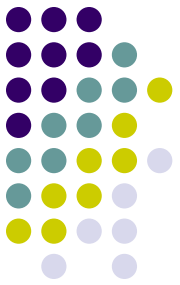


(β)

Πρακτικά θέματα δειγματοληψίας

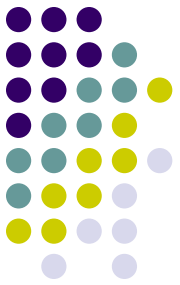


Προβλήματα κατά τη δειγματοληψία

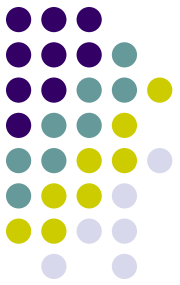


- Η συνάρτηση δειγματοληψίας αποτελείται από παλμούς πεπερασμένου πλάτους και διάρκειας αντί κρουστικές συναρτήσεις
 - Οδηγεί σε ποικίλα συστήματα διαμόρφωσης
- Το φίλτρο ανάκτησης δεν είναι ιδανικό
- Η επικάλυψη πρέπει να αποφευχθεί
- Τα σήματα είναι χρονικά πεπερασμένα, άρα το φάσμα τους δεν μπορεί να είναι βαθυπερατό

Μη ιδανικοί παλμοί δειγματοληψίας

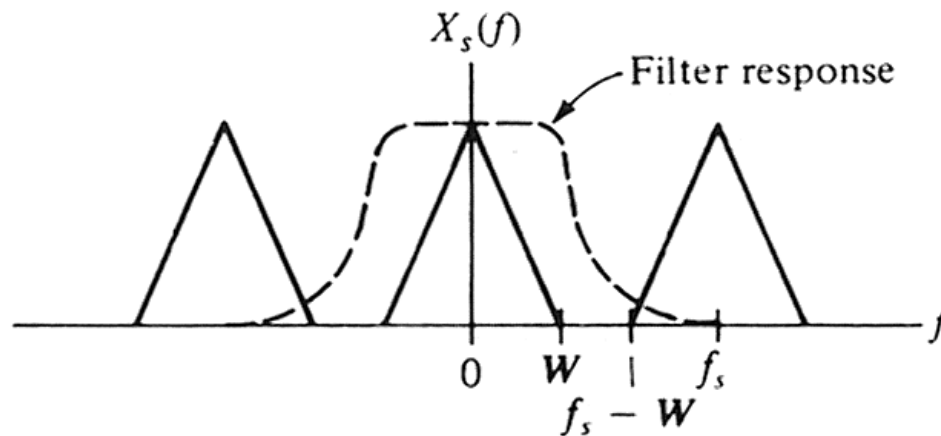


- Η μορφή των παλμών δειγματοληψίας δεν επηρεάζει τη διαδικασία, υπό την προϋπόθεση ότι το διαμορφωμένο σήμα προκύπτει ως γινόμενο του σήματος πληροφορίας με περιοδική συνάρτηση τραίνου παλμών
 - Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι η δειγματοληψία με παλμούς επίπεδης κορυφής (flat-top sampling)
 - → διαμόρφωση PAM
- Για την αναπαραγωγή μπορεί να απαιτηθεί ισοστάθμιση (equalization)

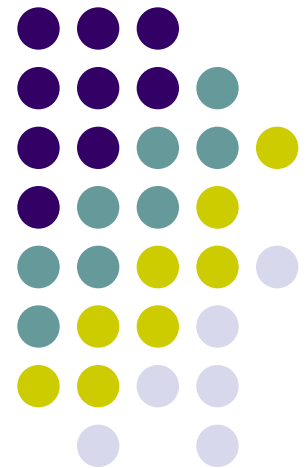


Μη ιδανικό φίλτρο ανάκτησης

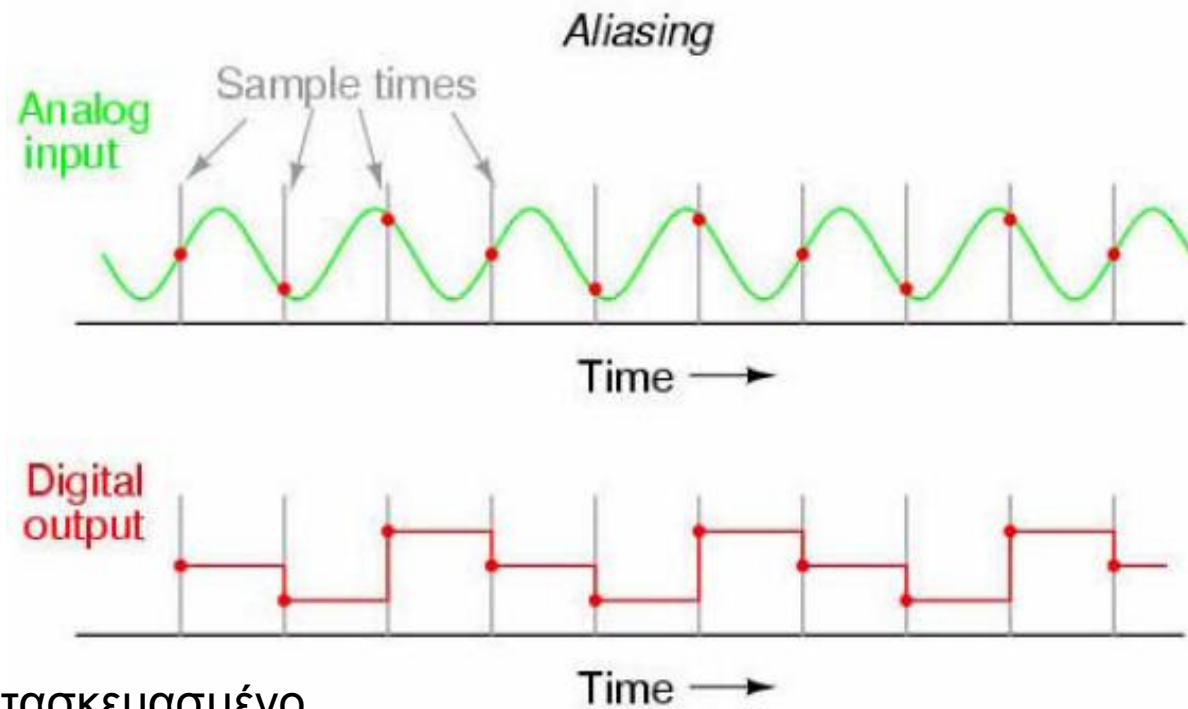
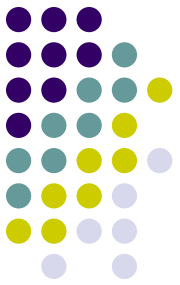
- Οι ανεπιθύμητες συχνότητες που περνούν από το φίλτρο εμφανίζονται ως υψίσυχνος θόρυβος



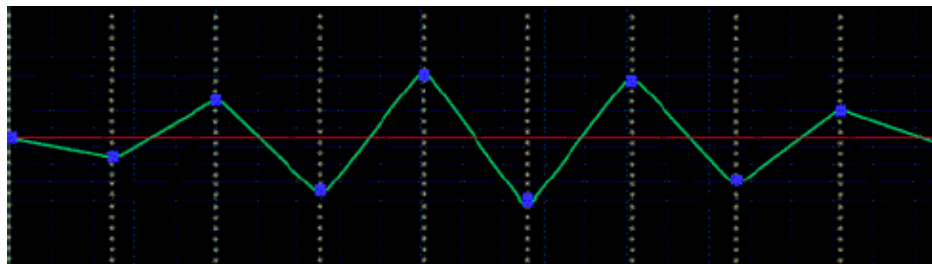
Αποφυγή επικάλυψης

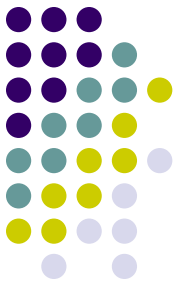


Επικάλυψη



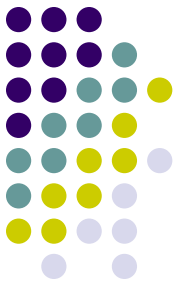
Ανακατασκευασμένο
σήμα





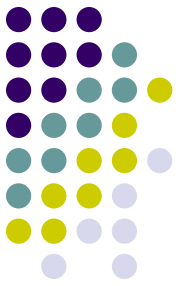
Το πρόβλημα

- Χρησιμοποιούμε $f_s > 2W$ για να αποφύγουμε την επικάλυψη
 - Υποθέτει ότι το σήμα είναι βαθυπερατό με $W < f_s/2$
- Όμως, θόρυβος και άλλες υψηλές ($> f_s/2$) συχνότητες συνυπάρχουν με το σήμα
 - μετά τη δειγματοληψία θα καταλήξουν στην περιοχή $-W$ έως W
- Το σήμα πρέπει να γίνει βαθυπερατό **πριν** τη δειγματοληψία



Αποφυγή επικάλυψης

- Στη δειγματοληψία σημάτων μουσικής
 - Εάν το μουσικό τμήμα περιέχει υψηλές συχνότητες, που δεν γίνονται ακουστές, μετά τη δειγματοληψία αυτές θα ακουστούν ως χαμηλές συχνότητες
- Στη δειγματοληψία σημάτων βίντεο και στις κινηματογραφικές ταινίες
 - η επικάλυψη εμφανίζεται ως το φαινόμενο της αργά ή αντίστροφα κινούμενης ρόδας

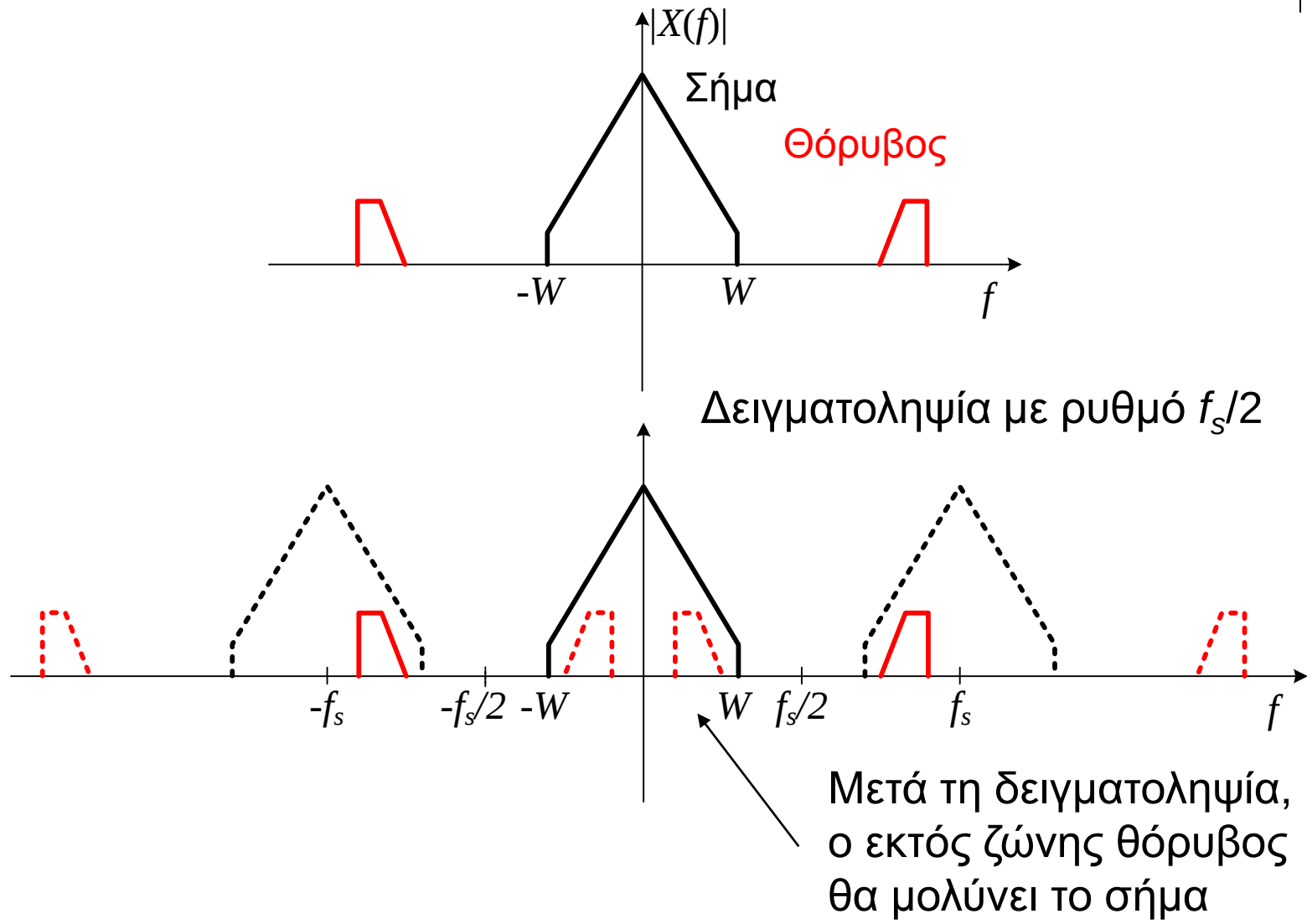
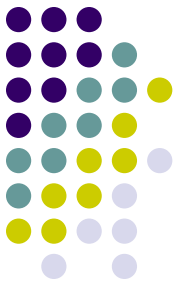


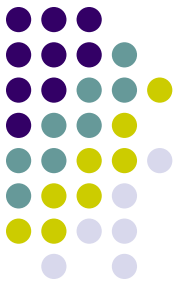
Αποφυγή επικάλυψης

- Τα προηγούμενα παραδείγματα αφορούν τη χρονική εκδοχή της παραλλαγής
- Στη χωρική εκδοχή της εμφανίζεται στις ψηφιακές φωτογραφίες και είναι γνωστή ως μορφές Moiré
 - Ανάγκη για φίλτρο αντι-επικάλυψης (anti-aliasing)

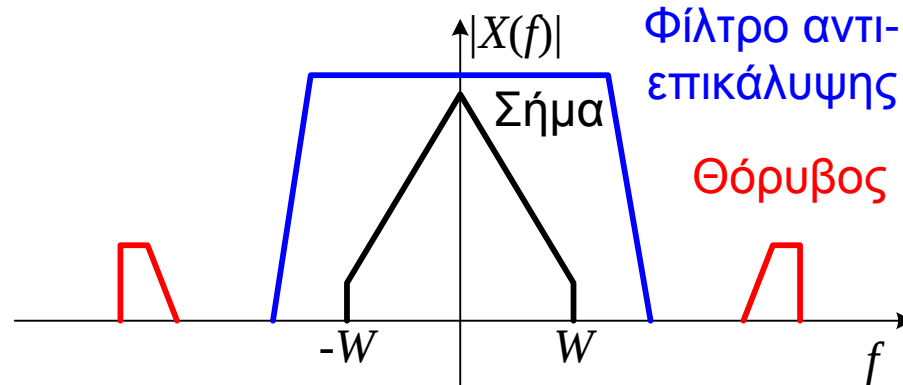


Γιατί απαιτείται φίλτρο αντι-επικάλυψης

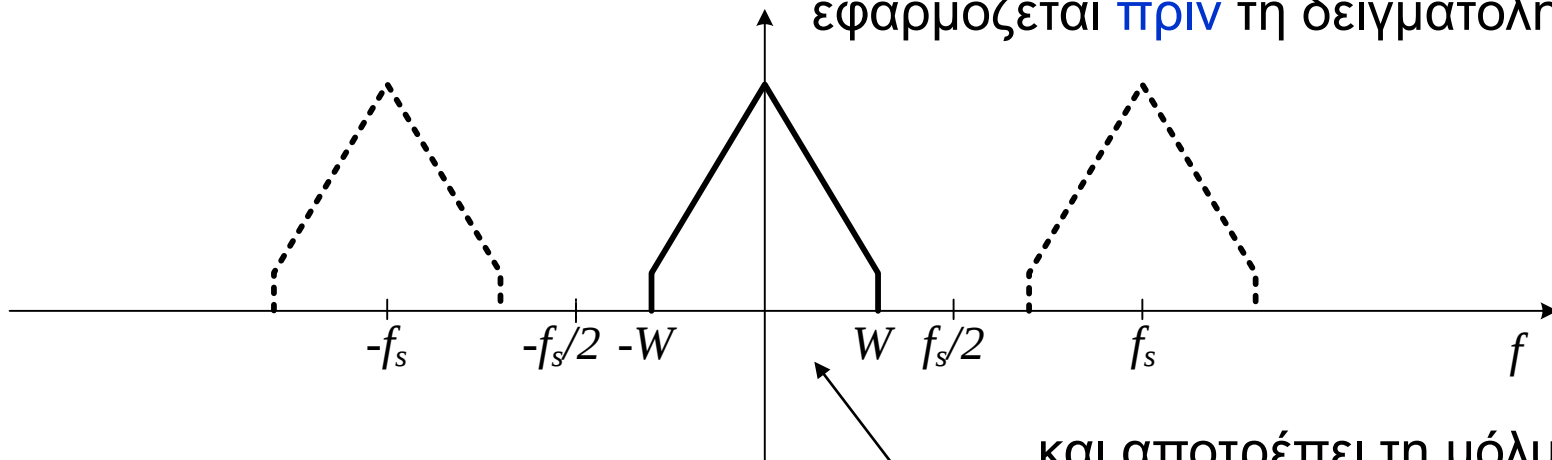




Το φίλτρο αντι-επικάλυψης

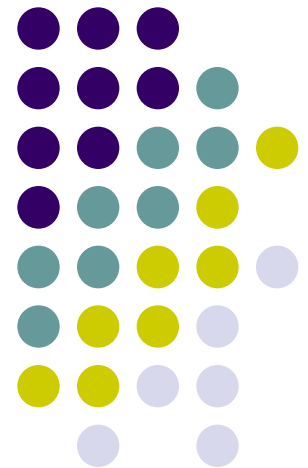


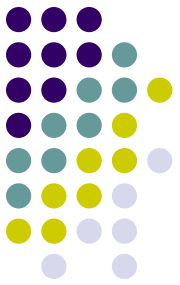
Το φίλτρο αντι-επικάλυψης εφαρμόζεται **πριν** τη δειγματοληψία ...



... και αποτρέπει τη μόλυνση από το υψίσυχνο σήμα

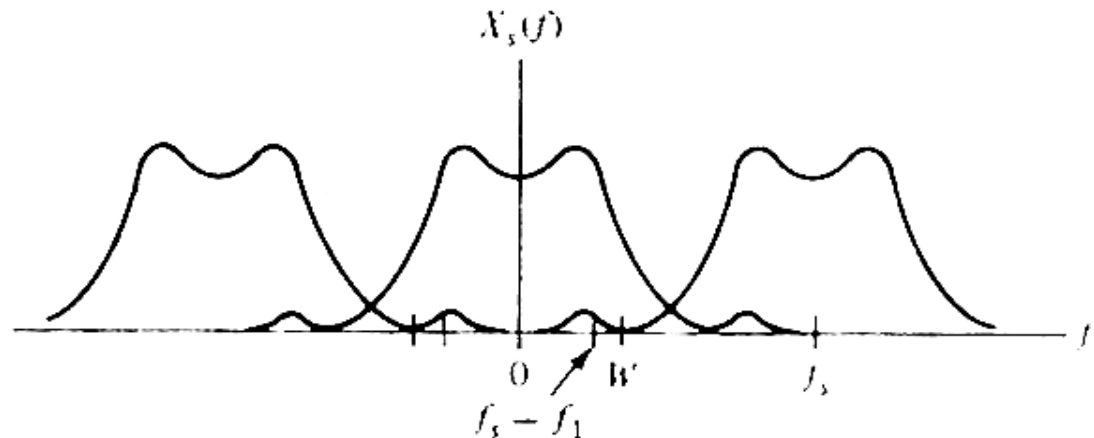
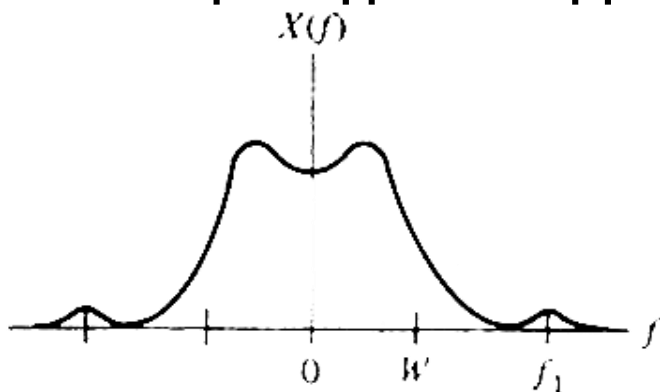
Χρονικά πεπερασμένα σήματα



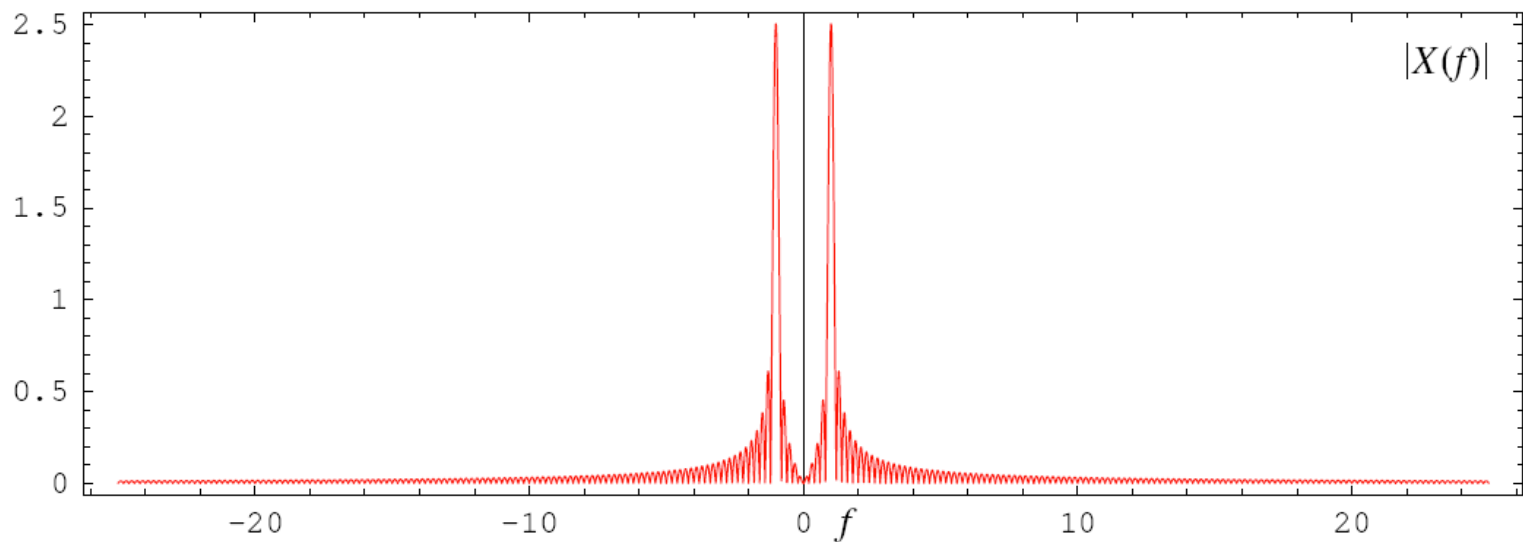
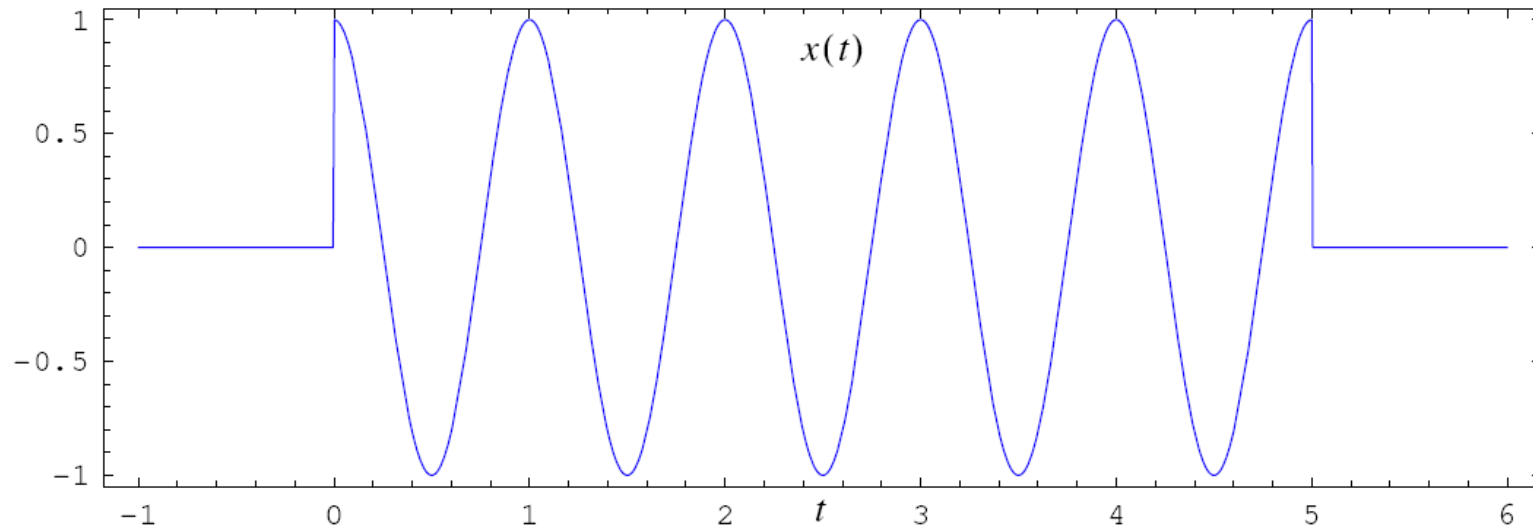
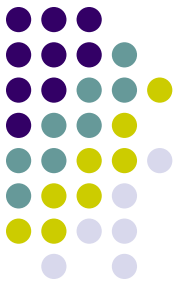


Χρονικά πεπερασμένο σήμα

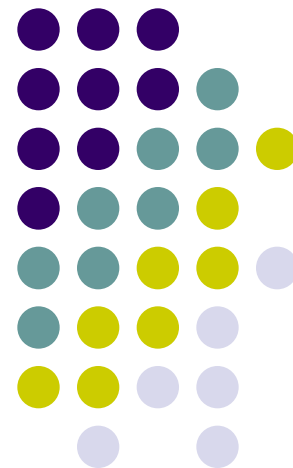
- Οδηγεί σε επικάλυψη (aliasing), δηλαδή, αναδίπλωση του φάσματος
- Υψηλές συχνότητες εμφανίζονται ως χαμηλότερες συχνότητες **εντός του φάσματος** του σήματος πληροφορίας
- Ανάγκη για φίλτρο αντι-επικάλυψης (anti-aliasing) πριν τη δειγματοληψία

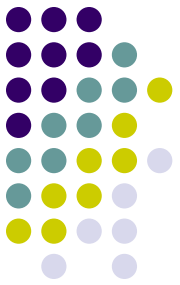


Το φάσμα ενός χρονικά περιορισμένου συνημιτονικού σήματος 1 Hz



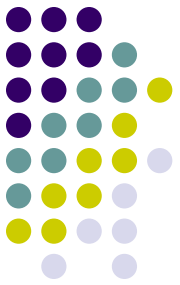
Υπο-δειγματοληψία





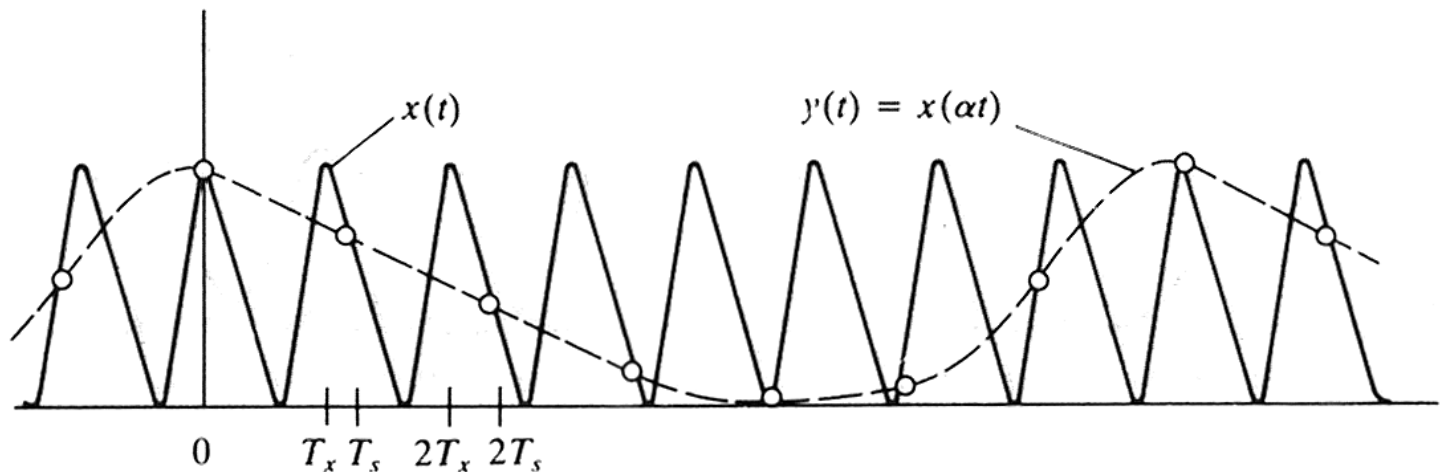
Υπο-δειγματοληψία

- Η δειγματοληψία με ρυθμό μικρότερο του διπλασίου της μεγαλύτερης συχνότητας ενός σήματος έχει ενδιαφέρουσες εφαρμογές, εάν η αναδίπλωση γίνει με προσοχή
 - Παλμογράφος δειγματοληψίας
 - Ζωνοπερατά σήματα

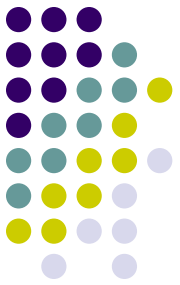


Παλμογράφος δειγματοληψίας

- Μια πρακτική χρήση της αναδίπλωσης (aliasing)
- Χρήση μικρής συχνότητας δειγματοληψίας f_s για παρατήρηση σημάτων μεγάλης συχνότητας f_x

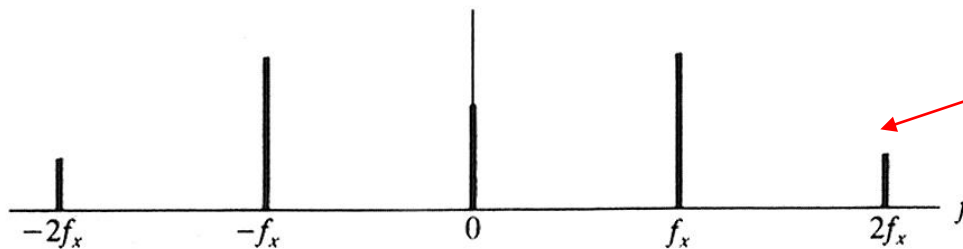


όπου $f_s = (1-\alpha)f_x$, $0 < \alpha < 1$

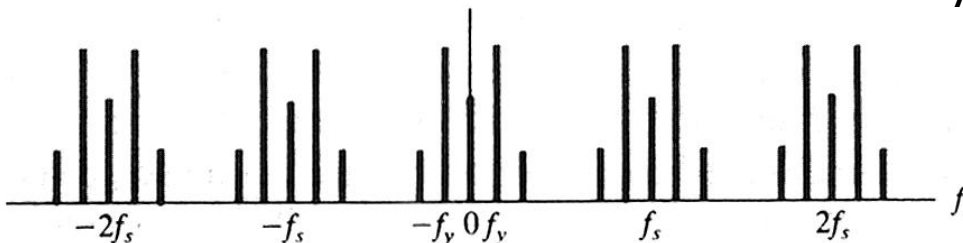


Παλμογράφος δειγματοληψίας

- Η δειγματοληψία μετακινεί το φάσμα του αρχικού σήματος αριστερά και δεξιά κατά nf_s σε σημεία που απέχουν $f_y = |f_x - f_s| = \pm af_s$ από τις αρμονικές της συχνότητας δειγματοληψίας



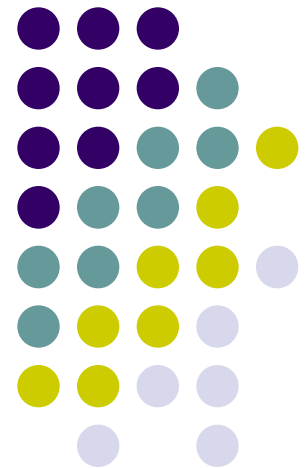
Κρατάμε τις m
αρμονικές, εδώ $m=2$



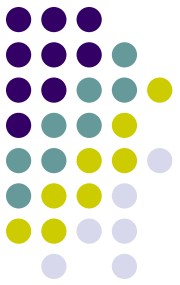
Αρκεί $a < 1/(2m+1)$ για να μην
έχουμε επικάλυψη

- Βαθυπερατό φίλτρο ανακτά το $y(t) = x(at)$

Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων



Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων



- Ζωνοπερατό σήμα εύρους ζώνης W με συχνότητες στην περιοχή από f_L έως f_H ($0 < f_L < f_H$, $W = f_H - f_L$) μπορεί να ανακτηθεί από δείγματα που λαμβάνονται με ρυθμό

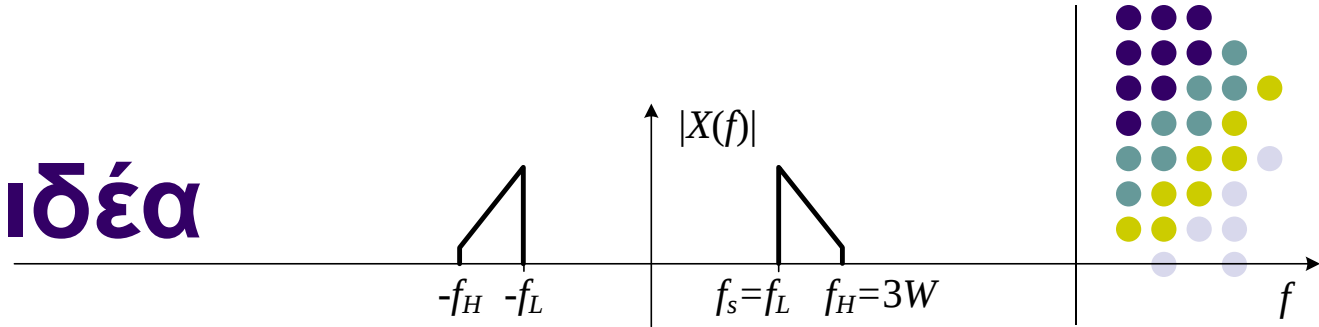
$$\frac{2f_H}{n} < f_s < \frac{2f_L}{n-1}$$

- όπου $n = 1, 2, \dots$ ακέραιος τέτοιος ώστε $n \leq \frac{f_H}{W}$

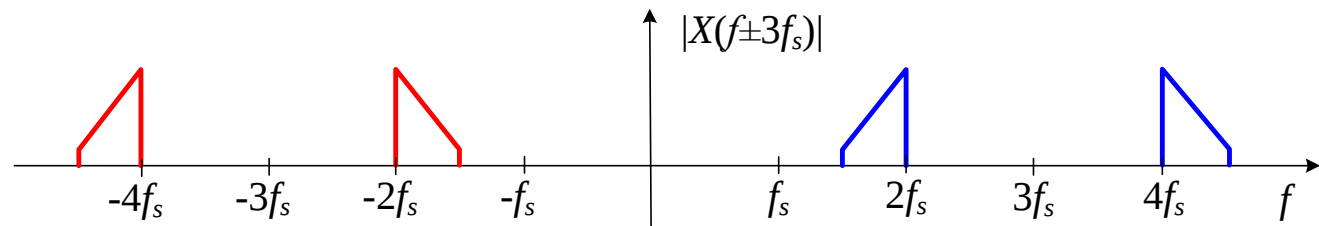
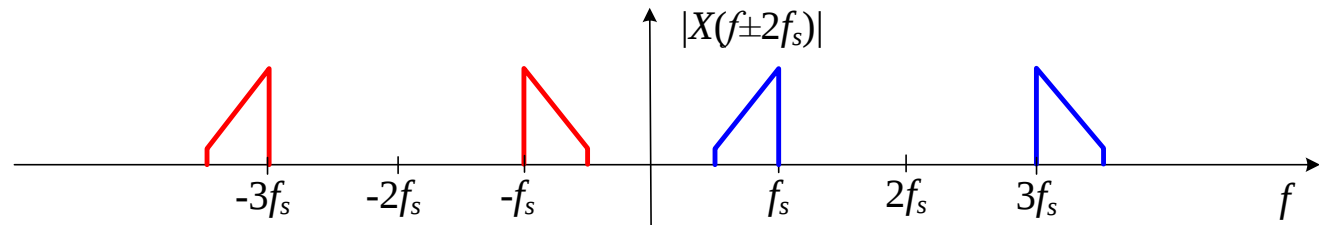
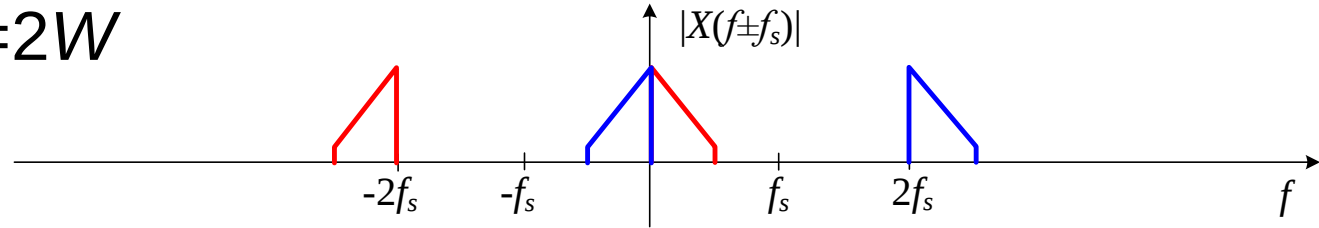
- και το φίλτρο ανάκτησης έχει κρουστική απόκριση

$$(n+1) \operatorname{sinc}\left(\frac{(n+1)t}{T_s}\right) - n \operatorname{sinc}\left(\frac{nt}{T_s}\right)$$

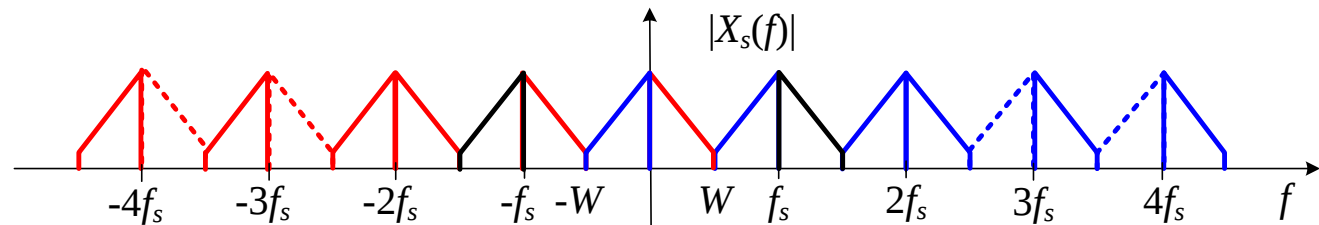
Η βασική ιδέα

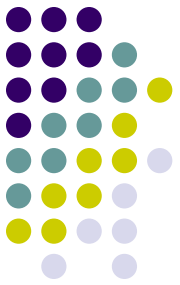


- Έστω $f_H=3W$, $f_s=2W$



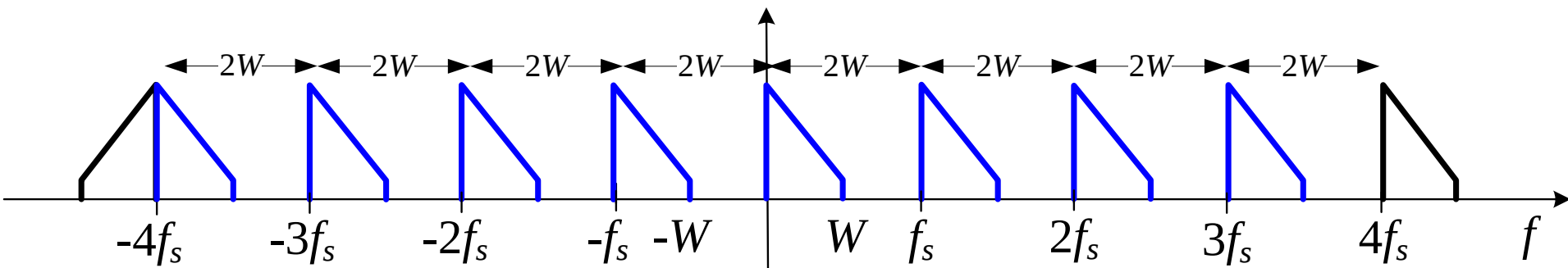
...

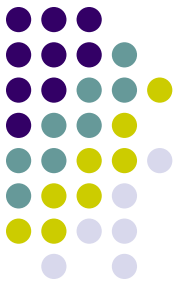




Η απλή περίπτωση $f_H = nW$

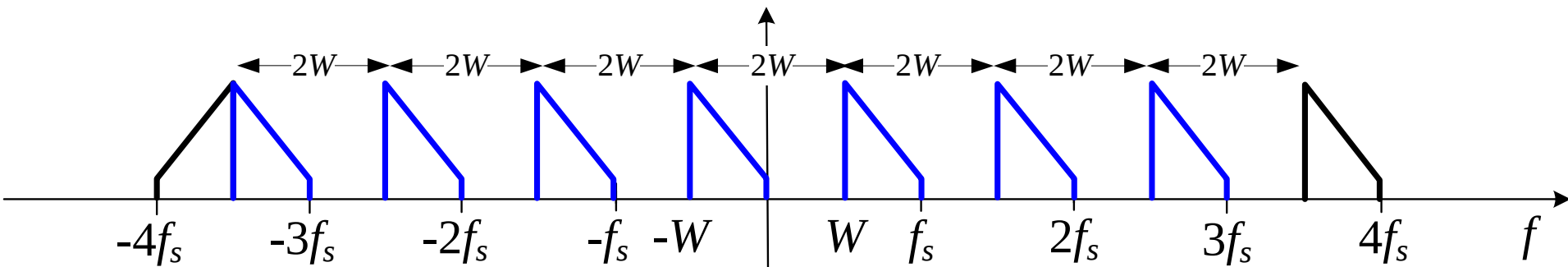
- Έστω $f_H = nW$ με n **περιττό** ακέραιο
- Η επιλογή $f_s = 2W$ οδηγεί σε πλήρωση με αντίγραφα του φάσματος του ζωνοπερατού σήματος

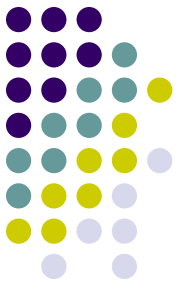




Η απλή περίπτωση $f_H = nW$

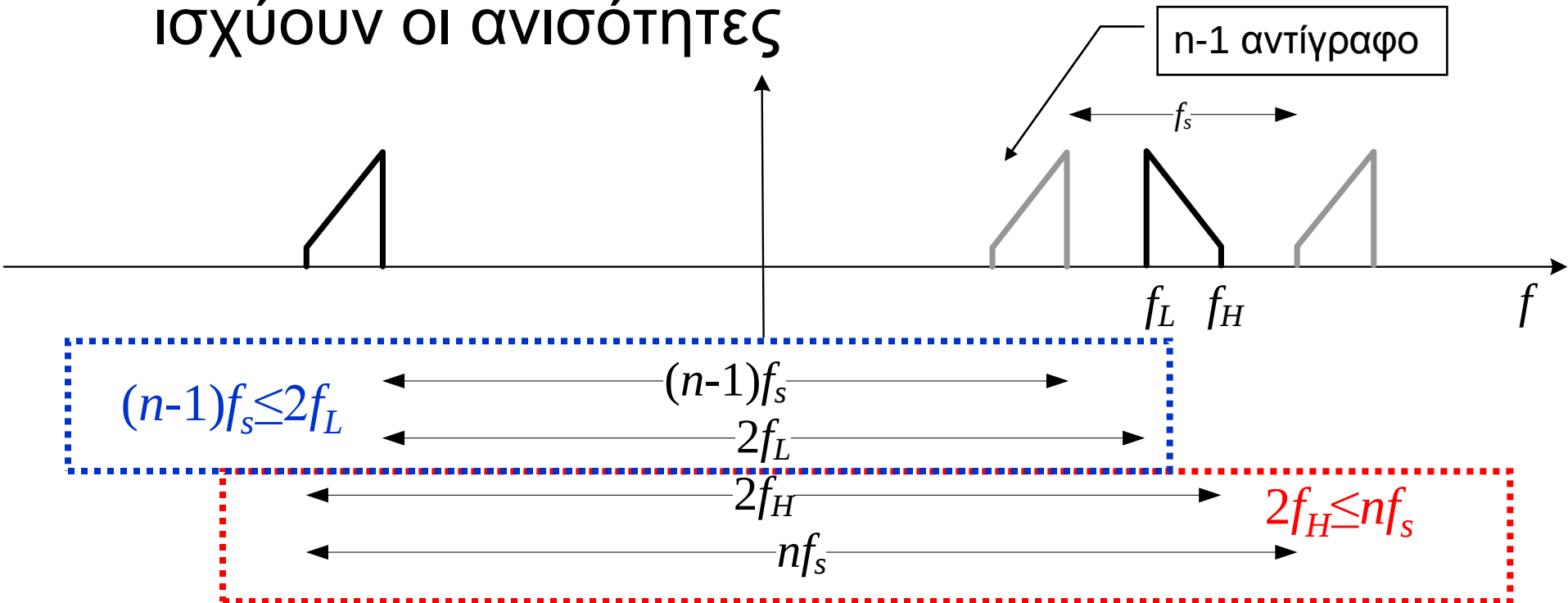
- Έστω $f_H = nW$ με n **άρτιο** ακέραιο
- Η επιλογή $f_s = 2W$ οδηγεί και πάλι σε πλήρωση με αντίγραφα του φάσματος του ζωνοπερατού σήματος
- Στην περιοχή 0 έως W όμως έχουμε **αντιστροφή** του φάσματος



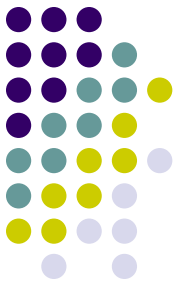


Η γενική περίπτωση $f_H \neq nW$

- Έστω f_H δεν είναι πολλαπλάσιο του W
- για να μην έχουμε επικάλυψη πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες



Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων



- Οι ανισότητες μπορούν να γραφούν ως

$$\frac{2 f_H}{n} \leq f_s \leq \frac{2 f_L}{n-1}$$

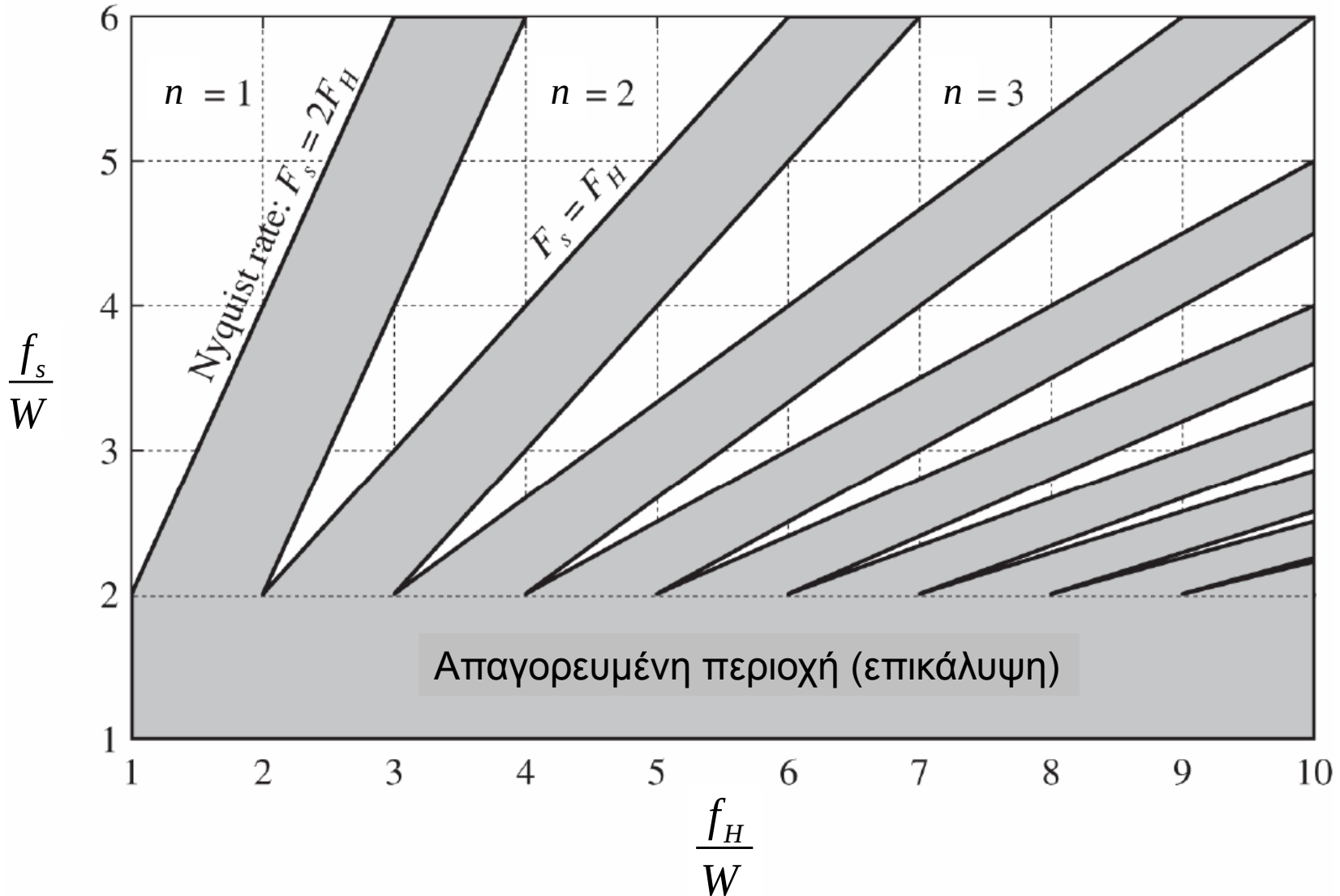
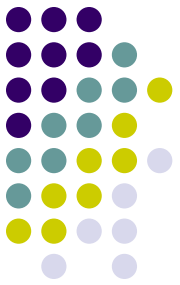
- Επειδή, $f_H = f_L + W$ αντικαθιστώντας

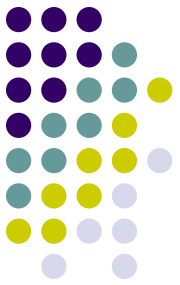
$$\frac{2 f_H}{n} \leq f_s \leq \frac{2(f_H - W)}{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{f_H}{n} \leq \frac{(f_H - W)}{n-1} \Rightarrow (n-1) f_H \leq n(f_H - W)$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{W}{f_H}$$

Συνθήκες μη επικάλυψης





Παράδειγμα για σήμα FM

- Στη ραδιοφωνία FM έχουμε $f_L = 88$ MHz, $f_H = 108$ MHz, $W = 20$ MHz, οπότε

$$n < 5,4 = \frac{108}{20}$$

- Για $n=5$, $43,2$ MHz $< f_s < 44$ MHz
- Για $n=4$, 54 MHz $< f_s < 58,67$ MHz
- Για $n=3$, 72 MHz $< f_s < 88$ MHz
- Για $n=2$, 108 MHz $< f_s < 176$ MHz
- Για $n=1$, 216 MHz $< f_s$ (ρυθμός Nyquist)