

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο:

Βέλτιστη ψηφιακή αναγνώριση

Προσαρμοσμένα φίλτρα

3.1 Εισαγωγή

Η μετάδοση ψηφιακών δεδομένων (ακολουθιών ψηφίων ή άλλων διακριτών συμβόλων) από την πηγή πληροφορίας στον προορισμό γίνεται με απεικονισή τους σε ακολουθίες στοιχειωδών διακριτών κυματομορφών, κατάλληλων για μετάδοση μέσω του διαθέσιμου διαύλου επικοινωνίας. Τα στοιχειώδη αυτά σήματα θα ονομάζουμε συμβατικά **παλμούς**, τις δε ακολουθίες των παλμών, **παλμοσειρές**. Εκτός από τις παλμοσειρές αυτές καθ' εαυτές, στο δέκτη είναι απαραίτητη και η πληροφορία χρονισμού για την οριοθέτηση των παλμών. Τις περισσότερες φορές η πληροφορία αυτή ενυπάρχει στις ίδιες τις παλμοσειρές απ' τον ειδικό τρόπο κατασκευής τους. Οι παλμοσειρές (μαζί με την πληροφορία χρονισμού τους) θα ονομάζονται **ψηφιακές κυματομορφές** (παρά την κάποια αντίφαση του όρου).

Αν ο διάυλος ήταν ιδανικός, δεν αλλοίωνε δηλαδή καθόλου τις μεταδιδόμενες κυματομορφές, ή οι όποιες αλλοιώσεις ήταν ντετερμινιστικές και άρα προβλέψιμες, θα ήταν εύκολο για το δέκτη να ανεύρει μέσα στις λαμβανόμενες κυματομορφές τα μεταδιδόμενα δεδομένα. Το πρόβλημα έγκειται ακριβώς στο γεγονός ότι οι εκπεμπόμενες κυματομορφές αλλοιώνονται κατά τρόπο *στοχαστικό* (λόγω θορύβου ή άλλης στοχαστικής συμπεριφοράς του διαύλου) και η αναγνωρισή τους στο δέκτη γίνεται με κάποια *πιθανότητα λάθους*.

Τα δύο βασικά προβλήματα που ανακύπτουν εδώ είναι

1. **Σχεδιασμός του πομπού**, σχεδιασμός δηλαδή κυματομορφών κατάλληλων για το διαθέσιμο είδος διαύλου με γνωστές ατέλειες.
2. **Σχεδιασμός του δέκτη**. Ο δέκτης θα πρέπει να εφοδιαστεί με λειτουργίες *αποκατάστασης* και *αναγνώρισης (detection)* ή *εκτίμησης (estimation)*, οι οποίες θα ανακτούν τα ψηφιακά δεδομένα από τις ψηφιακές κυματομορφές.

Βασικό κριτήριο επίλυσης των παραπάνω δύο προβλημάτων είναι η *ελαχιστοποίηση της πιθανότητας λάθους αναγνώρισης* στο δέκτη. Για το λόγο αυτό ξεκινάμε στο παρόν κεφάλαιο με τη μελέτη των βασικών λειτουργιών αναγνώρισης ή εκτίμησης, κατ' αρχήν μεμονωμένων κυματομορφών (παλμών). Στο επόμενο κεφάλαιο η μελέτη επεκτείνεται σε ακολουθίες τέτοιων παλμών (παλμοσειρές), όπου έρχεται στο προσκήνιο η επίδραση του εύρους ζώνης του διαύλου.

3.2 Ορισμός και ιδιότητες του Σύμφωνου Προσαρμοσμένου Φίλτρου (ΣΠΦ)

Τα προσαρμοσμένα φίλτρα (matched filters) χρησιμοποιούνται στους δέκτες συστημάτων ψηφιακής επικοινωνίας, με σκοπό την ελαχιστοποίηση της πιθανότητας λανθασμένης αναγνώρισης των εκπεμπόμενων συμβόλων, όταν τα σήματα-παλμοί που τα μεταφέρουν αλλοιώνονται κατά την εκπομπή ή και κατά την επεξεργασία τους στο δέκτη (φιλτράρισμα, ενίσχυση) με λευκό αθροιστικό θόρυβο.

3.2.1 Ορισμός ΣΠΦ

Έστω $G(f)$ η συνάρτηση μεταφοράς γραμμικού φίλτρου στο δέκτη συστήματος εκπομπής-λήψης παλμών, όπως στη διάταξη του σχ. 3.1α. Αν ο εκπεμπόμενος παλμός, $h(t)$ [διάρκειας T , ενέργειας E_h], αλλοιώνεται με λευκό αθροιστικό θόρυβο, $w(t)$, έστω πυκνότητας (δίπλευρου) φάσματος ισχύος $N_o/2$, τότε η σηματοθορυβική σχέση στην έξοδο του φίλτρου κατά τη στιγμή δειγματοληψίας, $t=T$, μεγιστοποιείται όταν:

συνάρτηση μεταφοράς
προσαρμοσμένου φίλτρου

$$G(f) = cH^*(f)e^{-j2\pi fT} \quad (3.1)$$

όπου $H(f)$ ο μετασχηματισμός Fourier του παλμού $h(t)$ και c οποιαδήποτε σταθερά.

Απόδειξη της (3.1):

Κατά τη στιγμή δειγματοληψίας, $t=T$, η σηματοθορυβική σχέση στην έξοδο του φίλτρου

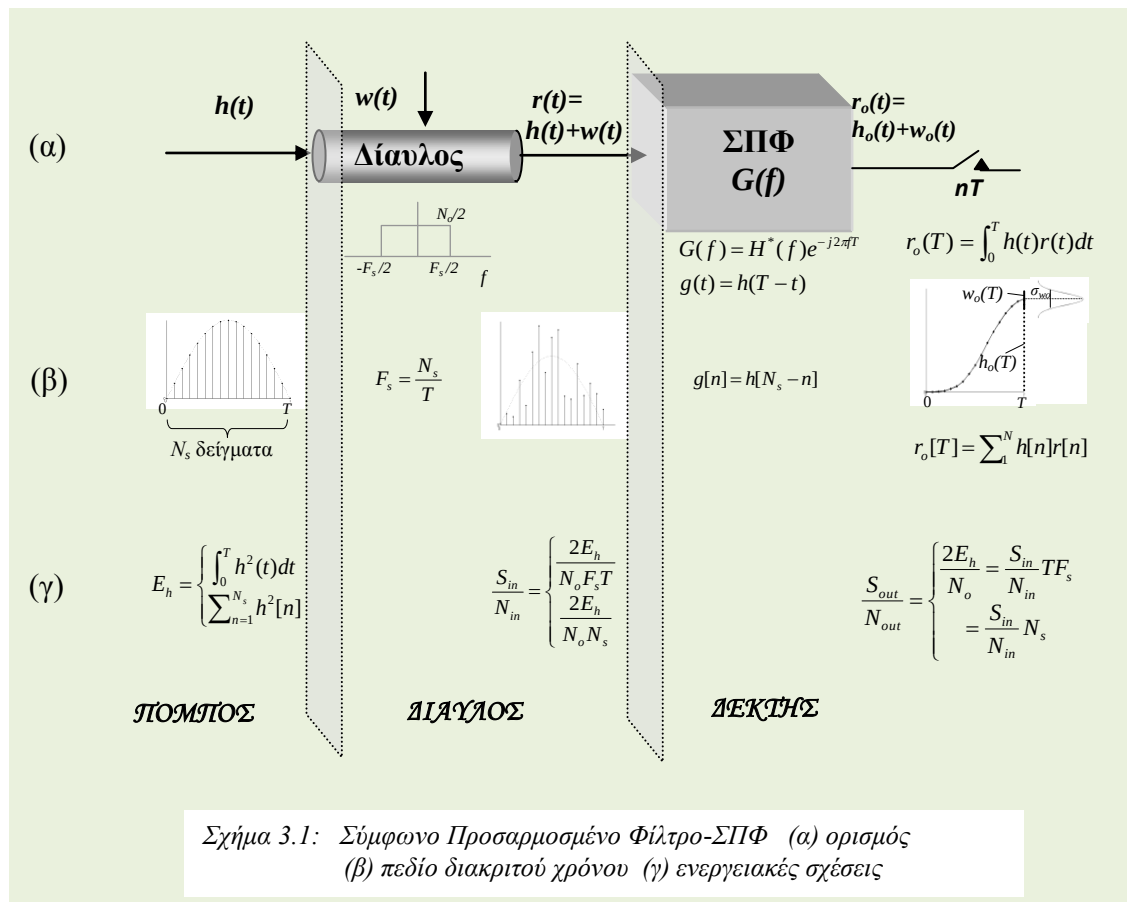
$$\text{είναι} \quad \frac{S_{out}}{N_{out}} \equiv \frac{h_o^2(T)}{E\{w_o^2(T)\}} = \frac{[\mathfrak{I}^{-1}\{H(f)\}]_{t=T}^2}{\int |S_n(f)|^2 df} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi fT} df \right|^2}{\frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df}$$

Εφαρμόζοντας στον αριθμητή της παραπάνω σχέσης την ανισότητα Schwartz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} U(f)V(f)df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df \quad \forall U(f), V(f) \in C,$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $U(f) = cV^*(f)$ (δηλαδή $U(f)$ και $V(f)$ ευθυγραμμισμένες – aligned), παίρνουμε

$$\left(\frac{S_{out}}{N_{out}} \right)_{\max} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{N_o/2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt}{N_o/2} = \frac{2E_h}{N_o} \quad \text{όταν} \quad G(f) = cH^*(f)e^{-j2\pi fT} \quad \blacklozenge$$



3.2.2 Χρονική απόκριση του ΣΠΦ

Στο πεδίο του χρόνου η (3.1) γράφεται

κρουστική απόκριση
προσαρμοσμένου φίλτρου

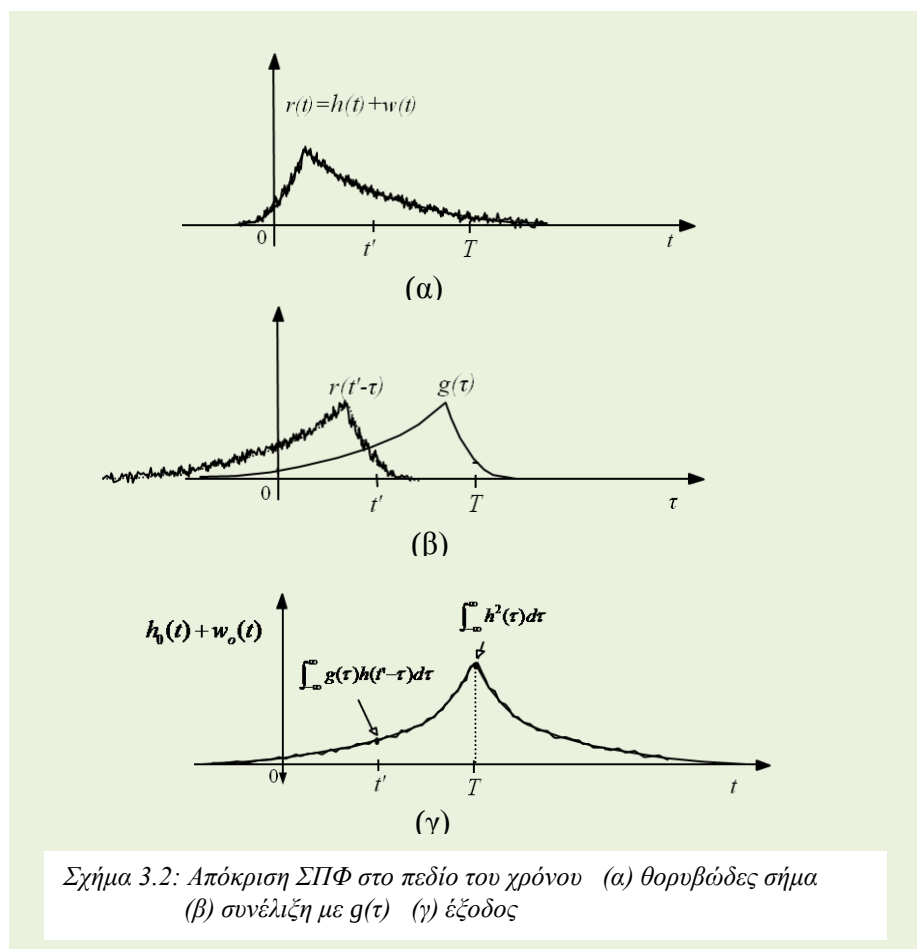
$$g(t) = ch(T - t)$$

(3.2)

Η χρονική απόκριση του φίλτρου στον παλμό $h(t)$ δίνεται από τη συνέλιξη του με την $g(t)$ της (3.2):

$$h_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t - \tau)d\tau = c \int_{-\infty}^{\infty} h(T - \tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.3)$$

Η χρονική απόκριση του φίλτρου (συνέλιξη με $g(t)$) στο θορυβώδες σήμα $r(t) = h(t) + w(t)$ δείχνεται στο σχήμα 3.2.



3.2.3 Το προσαρμοσμένο φίλτρο ως συσχετιστής

Το προσαρμοσμένο φίλτρο λειτουργεί στην πραγματικότητα ως συσχετιστής, αφού η έξοδος του κατά τη στιγμή δειγματοληψίας (στο τέλος της περιόδου T) είναι η συχέτιση $\langle h, r \rangle$, του λαμβανόμενου θορυβώδους σήματος με τον εν λόγω παλμό. Προφανώς, απαιτείται συγχρονισμός για να γίνει σωστά η συχέτιση και η δειγματοληψία στο δέκτη, όπως εξηγείται αναλυτικότερα στην παράγραφο 3.3.6, απ'όπου και το όνομα **σύμφωνη αναγνώριση** και **Σύμφωνο Προσαρμοσμένο Φίλτρο-ΣΠΦ**).

$$r_o[T] = \langle h, r \rangle = \begin{cases} \int_0^T h(t)r(t)dt = \int_0^T h^2(t)dt + \int_0^T h(t)w(t)dt \\ \sum_{n=1}^{N_s} h[n]r[n] = \sum_{n=1}^{N_s} h^2[n] + \sum_{n=1}^{N_s} h[n]w[n] \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2.4 Βελτίωση της σηματοθορυβικής σχέσης με το ΣΠΦ

Η σηματοθορυβική σχέση κατά τη στιγμή δειγματοληψίας στην έξοδο του ΣΠΦ γίνεται μέγιστη, ίση με

$$\left. \frac{S_{out}}{N_{out}} \right|_{\max} \equiv \frac{h_o^2[T]}{E\{w_o^2[T]\}} = \frac{2E_h}{N_o} = \frac{S_{in}}{\frac{N_o}{2} \frac{1}{T}} \quad (3.5)$$

έξοδος ΣΠΦ
για $t=T$

ανεξάρτητη από το εύρος ζώνης F_s του θορύβου που έχει υπερτεθεί.

Με την υπόθεση σταθερής φασματικής πυκνότητας θορύβου, η ισχύς θορύβου είναι ανάλογη της συχνότητας δειγματοληψίας, F_s , και η σηματοθορυβική σχέση αντιστρόφως ανάλογη αυτής. Ωστόσο, στην έξοδο του ΣΠΦ η σηματοθορυβική σχέση παραμένει σταθερή, σύμφωνα με τη σχέση (3.5), και υπ'αυτή την έννοια το ΣΠΦ παρέχει βελτίωση της σηματοθορυβικής σχέσης κατά τον παράγοντα $F_s T$.

Στο πεδίο διακριτού χρόνου, αυτό μπορεί ναδειχθεί εύκολα, ως εξής:

$$(3.4) \rightarrow N_{out} = E\left\{\left(\sum_{n=1}^{N_s} h[n]w[n]\right)^2\right\} = E\{w^2[k]\} \sum_{n=1}^{N_s} h^2[n] = N_{in} S_{in} N_s$$

$$S_{out} = \left(\sum_{n=1}^N h^2[n]\right)^2 = (S_{in} N_s)^2$$

απ'όπου προκύπτει

$$\frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = N_s = F_s T \quad (3.6) \quad \blacklozenge$$

Συμπερασματικά, **στην έξοδο του ΣΠΦ έχουμε ένα ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου ίσο με το Baud Rate, $1/T$, και όχι ίσο με τη συχνότητα δειγματοληψίας.**

Ένα σύστημα ψηφιακής μετάδοσης χρησιμοποιεί M διακριτούς παλμούς, σε καθέναν από τους οποίους κωδικοποιεί $\log M$ bits πληροφορίας. Εν γένει απαιτούνται M διαφορετικά προσαρμοσμένα φίλτρα, ένα για κάθε παλμό. Κατά την αποδιαμόρφωση, επιλέγεται (στο τέλος κάθε περιόδου, T) εκείνος ο παλμός του οποίου το αντίστοιχο φίλτρο δίνει τη μεγαλύτερη έξοδο. Η γενική προσέγγιση της επόμενης παραγράφου, ωστόσο, αποδεικνύει ότι απαιτούνται τόσα προσαρμοσμένα φίλτρα όση η διάσταση του γραμμικού σηματικού χώρου.

3.3 Προσαρμοσμένα Φίλτρα στον N -διάστατο σηματοκτικό χώρο

Σύμφωνα με τη σχέση 3.4, η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου κατά τη στιγμή δειγματοληψίας δίνει τη συσχέτιση (correlation) του λαμβανόμενου σήματος με τον παλμό στον οποίο είναι προσαρμοσμένο το φίλτρο, ή, αλλιώς, το *εσωτερικό γινόμενο* των δύο αυτών σημάτων, θεωρούμενων ως διανυσμάτων στο γραμμικό, μετρικό χώρο με μέτρο την τετραγωνική ρίζα της ενέργειας των σημάτων.

Στο χώρο αυτό (που ονομάζεται και *σηματοκτικός χώρος* - *signal space*) κάθε παλμός αντιστοιχεί σε ένα σημείο, το δε σύνολο των σημείων-παλμών αποτελεί το *σηματοκτικό αστερισμό* (*signal constellation*) του συστήματος ψηφιακής μετάδοσης. Οι χρησιμοποιούμενοι παλμοί δεν είναι κατ'ανάγκη όλοι γραμμικά ανεξάρτητοι, οπότε το μέγεθος του σηματοκτικού αστερισμού, M , μπορεί να είναι μεγαλύτερο από τη διάσταση του σηματοκτικού χώρου, N . Τυπικά παραδείγματα τέτοιας περίπτωσης είναι όλα τα συστήματα PSK και QAM, των οποίων ο σηματοκτικός χώρος είναι δισδιάστατος ($N=2$)¹.

Στη συνέχεια διατυπώνεται συνοπτικά το πρόβλημα της κωδικοποίησης-διαμόρφωσης και βέλτιστης αναγνώρισης στον N -διάστατο σηματοκτικό χώρο. Θα καταστεί φανερό ότι αρκούν N (και όχι M , αν $M > N$) προσαρμοσμένα φίλτρα, δηλ. τόσα, όση η διάσταση του σηματοκτικού χώρου.

3.3.1 Ο γραμμικός σηματοκτικός χώρος

Ο χώρος των M διαφορετικών κυματομορφών-παλμών, $\{s_i(t), i = 1, 2, \dots, M\}$, εφοδιασμένος με την πράξη της συσχέτισης και το αντίστοιχο μέτρο (λαμβάνόμενο από τη συσχέτιση σήματος με τον εαυτό του), είναι ένας γραμμικός μετρικός χώρος, ο οποίος μπορεί να παραχθεί (be spanned) από N ορθοκανονικά σήματα $\{\phi_j(t), j = 1, 2, \dots, N\}$, $N \leq M$. Ο χώρος διέπεται, συνεπώς, από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\langle s_i, s_j \rangle = \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt, \quad \|s_i\|^2 = \langle s_i, s_i \rangle = \int_0^T s_i^2(t) dt \quad (3.7)$$

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.8)$$

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \phi_j(t), \quad \alpha_{ij} = \langle s_i, \phi_j \rangle \quad (3.9)$$

$$\|s_i\|^2 = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^2, \quad \|s_i - s_k\|^2 = \sum_{j=1}^N (\alpha_{ij} - \alpha_{jk})^2 \quad (3.10)$$

¹ Για τα ισοδύναμα σήματα βασικής ζώνης, ο χώρος αυτός ταυτίζεται με το μιγαδικό επίπεδο πλατών-φάσεων.

Με γνωστά τα $\phi_j(t)$, $j=1,2,...N$, κάθε σήμα-σημείο του γραμμικού χώρου μπορεί να δοθεί από τις N συντεταγμένες του, $\{\alpha_{ij}, j=1,2,...N\}$. Για κάθε σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{s}_i, i=1,2,...M\}$ (άρα και για το σηματικό μας αστερισμό $\{s_i(t), i=1,2,...M\}$) μπορεί να βρεθεί ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{\vec{\phi}_j, j=1,2,...N\}$ $N \leq M$, με τον γνωστό αλγόριθμο ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt.

3.3.2 Αλγόριθμος ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt (Gram-Schmidt orthogonalization)

$$\vec{\phi}_1 = \frac{\vec{s}_1}{\|\vec{s}_1\|}, \quad \vec{\phi}_2 = \frac{\vec{s}_2 - \langle \vec{s}_2, \vec{\phi}_1 \rangle \vec{\phi}_1}{\|\vec{s}_2 - \langle \vec{s}_2, \vec{\phi}_1 \rangle \vec{\phi}_1\|}, \quad \vec{\phi}_3 = \frac{\vec{s}_3 - \langle \vec{s}_3, \vec{\phi}_1 \rangle \vec{\phi}_1 - \langle \vec{s}_3, \vec{\phi}_2 \rangle \vec{\phi}_2}{\|\vec{s}_3 - \langle \vec{s}_3, \vec{\phi}_1 \rangle \vec{\phi}_1 - \langle \vec{s}_3, \vec{\phi}_2 \rangle \vec{\phi}_2\|}, \dots$$

$$\text{until } \vec{s}_{N+1} = \sum_{j=1}^N \langle \vec{s}_{N+1}, \vec{\phi}_j \rangle \vec{\phi}_j \text{ ή } N=M.$$

Στη συνέχεια, η ανεξάρτητη μεταβλητή χρόνου, t , για τα σήματα του σηματικού αστερισμού και τα ορθοκανονικά σήματα μπορεί να παραλείπεται και οι συμβολισμοί $s_i(t)$ και s_i θα χρησιμοποιούνται ως ταυτόσημοι.

3.3.3 Το πρόβλημα της αναγνώρισης στον N -διάστατο χώρο

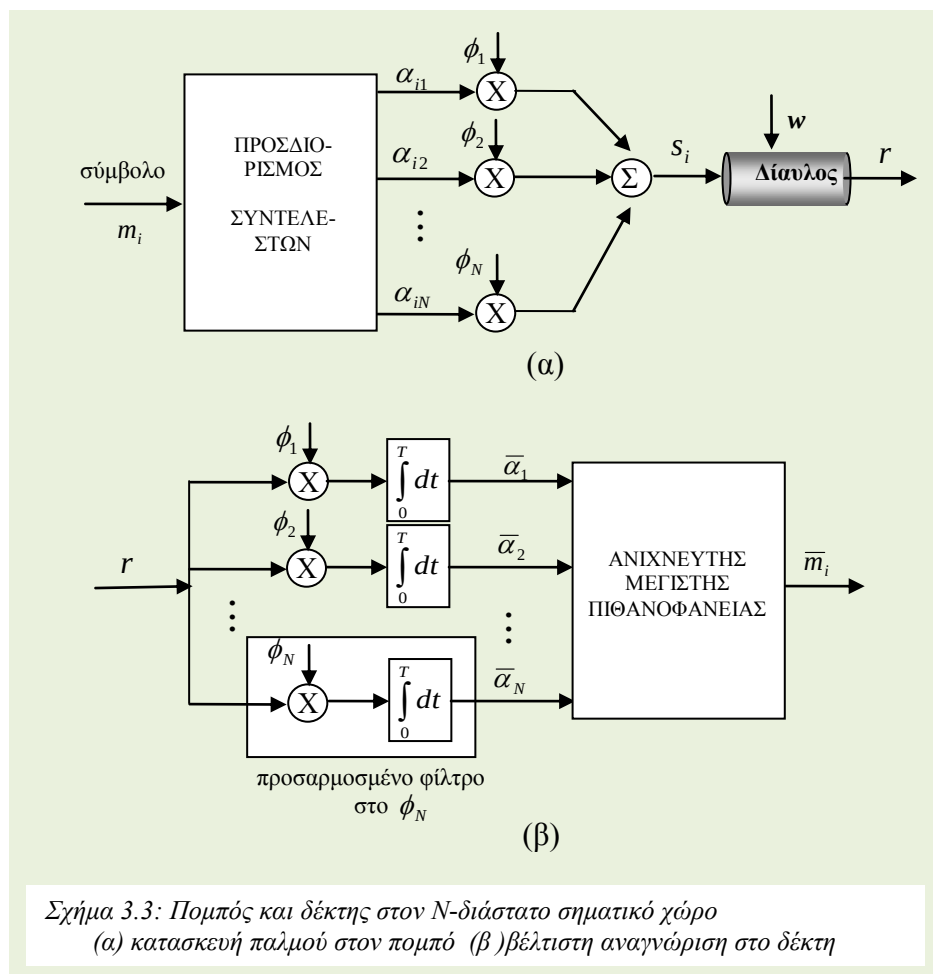
Υποθέτουμε ότι ένας εκπεμπόμενος παλμός s_i αλλοιώνεται από ανεξάρτητο, αθροιστικό θόρυβο και εκείνο που λαμβάνει ο δέκτης είναι κυματομορφή r , η οποία απέχει από την εκπεμφθείσα κατά τον όρο θορύβου w :

$$r = s_i + w \quad (3.11)$$

Υποθέτουμε, επίσης, ότι τα w και, συνεπώς, τα r ανήκουν στο σηματικό μας χώρο, αφού κάθε άλλη συνιστώσα θα αποκοπεί από τα φίλτρα εισόδου του δέκτη. Έτσι

$$r = \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j \phi_j, \quad \bar{\alpha}_j = \langle r, \phi_j \rangle \quad (3.12)$$

Η (3.12) υλοποιείται ως μια συστοιχία N συσχετιστών (προσαρμοσμένων φίλτρων) που δίνουν τις προβολές του ληφθέντος σήματος r στα N ορθοκανονικά διανύσματα-σήματα, όπως σχηματικά δείχνεται στο σχήμα 3.3(β). Το σχήμα 3.3(α) δίνει την κατασκευή του σήματος s_i στον πομπό, σύμφωνα με τη σχέση (3.9).



Το πρόβλημα της αναγνώρισης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Πρόβλημα αναγνώρισης (detection)

Από την εκτίμηση των συντελεστών $\{\bar{\alpha}_j, j=1,2,\dots,N\}$ στο δέκτη (προβολές του λαμβανόμενου σήματος r στα γενετήρια διανύσματα του σηματοκώρου) να βρεθεί ποιός από τους παλμούς $\{s_i, i=1,2,\dots,M\}$ έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να έχει εκπεμφθεί από τον πομπό.

Αναζητούμε, λοιπόν, εκείνο το i για το οποίο μεγιστοποιείται η πιθανότητα να έχει εκπεμφθεί το s_i δεδομένου του r , ήτοι:

$$? \max_i p(s_i | r) \quad (3.13)$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες (a posteriori probabilities) της σχέσης (3.13), μπορούν να αναχθούν στις πιο εύχρηστες εκ των προτέρων πιθανότητες (a priori probabilities) με τη βοήθεια του θεωρήματος του Bayes (εδώ εκφρασμένου για διακριτούς και συνεχείς δειγματικούς χώρους):

$$p(s_i | r) = p(s_i) \frac{f_r(r | s_i)}{f_r(r)} \quad (3.14)$$

όπου $f_r(r | s_i)$ η υπό συνθήκη (το s_i) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) του r και $f_r(r)$ η αντίστοιχη συνάρτηση χωρίς συνθήκη².

Λόγω της (3.14), και με την πρόσθετη υπόθεση ότι οι παλμοί s_i εκπέμπονται με ίδια πιθανότητα, δηλ. $p(s_i) = 1/M$, η μεγιστοποίηση της $p(s_i | r)$ στην (3.13) ισοδυναμεί με μεγιστοποίηση της $f_r(r | s_i)$ ως προς i (η συνάρτηση $f_r(r)$ είναι ανεξάρτητη του i). Οι συναρτήσεις $\{f_r(r | s_i), i = 1, 2, \dots, M\}$, ονομάζονται *συναρτήσεις πιθανοφάνειας* (likelihood functions), η δε αναγνώριση που βασίζεται στην εύρεση της μέγιστης εξ αυτών για ληφθέν r ονομάζεται *αναγνώριση μέγιστης πιθανοφάνειας* (maximum likelihood detection).

3.3.4 Αναγνώριση μέγιστης πιθανοφάνειας σε αθροιστικό, γκαουσιανό θόρυβο

Όταν ο θόρυβος είναι αθροιστικός, τύπου Gauss, οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας είναι κανονικές κατανομές με κέντρα τα αντίστοιχα s_i στον N -διάστατο χώρο.

Για μονοδιάστατους αστερισμούς (διαμόρφωσης πλάτους) είναι

$$f_r(r | s_i) = \frac{e^{-\left(\frac{r-s_i}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{(r-s_i)^2}{N_o}}}{\sqrt{N_o\pi}} \quad (3.15\alpha)$$

όπου έχει ληφθεί υπόψη ότι στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου και για ισχύ σήματος ανάλογη του $\|s_i\|^2$, η αντίστοιχη ισχύς θορύβου, σ^2 , είναι ανάλογη του $N_o/2$. Στον N -διάστατο χώρο οι γκαουσιανές συναρτήσεις πιθανοφάνειας εκφράζονται ως

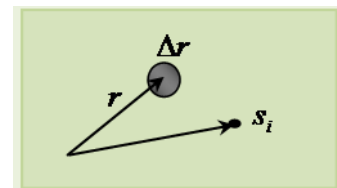
$$f_r(r | s_i) = \frac{e^{-\frac{\|r-s_i\|^2}{N_o}}}{(\sqrt{N_o\pi})^N} \quad (3.15\beta)$$

² Ο δειγματικός χώρος των s_i είναι διακριτός, ενώ του r συνεχής.

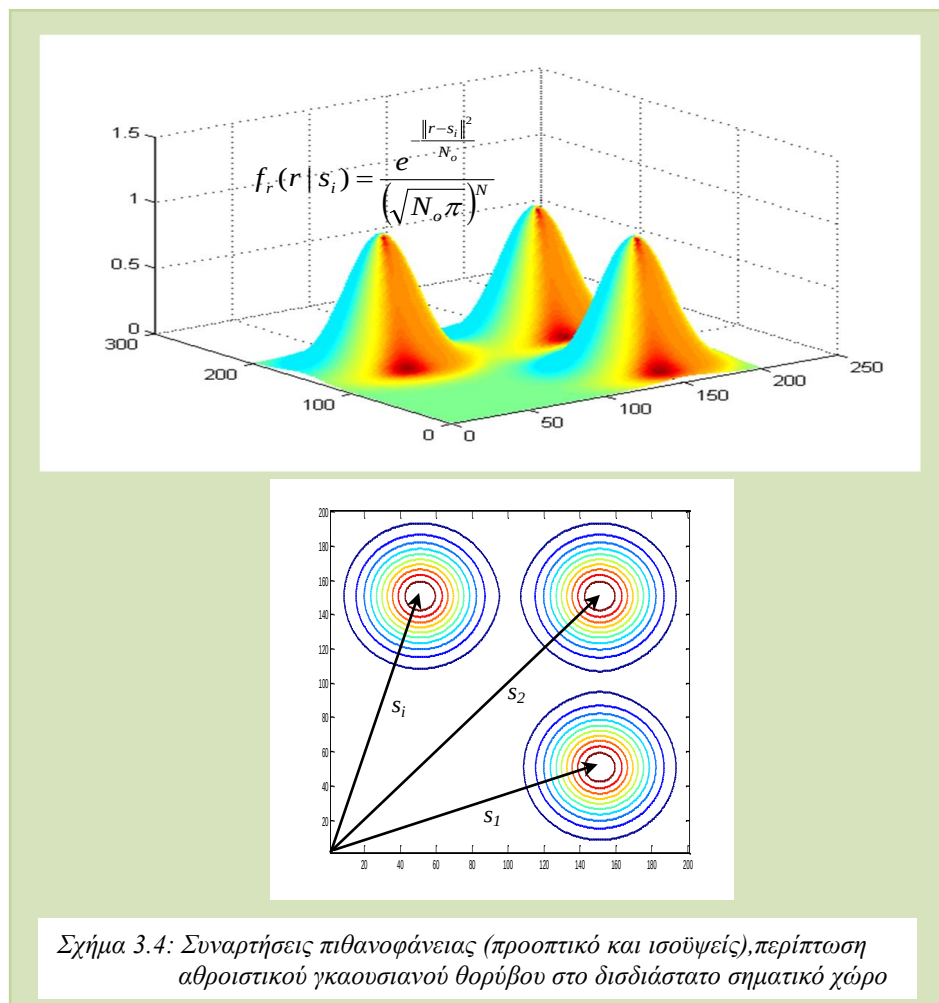
$\Pr\{r \in \Delta r\} \equiv f_r(r)\Delta r$ και $\Pr\{r \in \Delta r | s_i\} \equiv f_r(r | s_i)\Delta r$

Εξ άλλου, λόγω Bayes, $\Pr\{r \in \Delta r | s_i\} = \Pr\{s_i | r \in \Delta r\} \frac{\Pr\{r \in \Delta r\}}{\Pr\{s_i\}}$

απ' όπου λαμβάνεται η (3.14).



Στο σχήμα 3.4 δείχνονται σχηματικά τέτοιες συναρτήσεις για $N=2$.



Αντί για τη μεγιστοποίηση των ίδιων των συναρτήσεων πιθανοφάνειας, μπορούμε, ισοδύναμα, να μεγιστοποιήσουμε τους φυσικούς τους λογαρίθμους:

$$\max_i \{\ln f_r(r | s_i)\} \quad (3.16)$$

Η (3.16), συνδυαζόμενη με την (3.15) για γκαουσιανές συναρτήσεις πιθανοφάνειας, ισοδυναμεί με **ελαχιστοποίηση αποστάσεων στον N -διάστατο χώρο**:

$$(3.15) \ \& \ (3.16) \leftrightarrow \min_i \{\|r - s_i\|, \ i = 1, 2, \dots, M\} \quad (3.17)$$

Επιλέγουμε, δηλαδή, εκείνο το s_i που βρίσκεται πλησιέστερα (πάντα κατά την έννοια της συσχέτισης) στο ληφθέν r . Έτσι ο σημιακός χώρος μπορεί να διαμεριστεί σε **περιοχές απόφασης**, μία για κάθε σημείο s_i , το δε πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε γεωμετρικό.

3.3.5 Ανάλυση σφάλματος

Ας συμβολίσουμε με S_i την περιοχή απόφασης του παλμού s_i και με $\bar{S}_i$ την συμπληρωματική της στο σηματοτικό μας χώρο, S . Έτσι είναι

$$\bigcup_i S_i = S, \quad S_i \cup \bar{S}_i = S \quad (3.18)$$

Η πιθανότητα εσφαλμένης ανίχνευσης συμβόλου, P_e , δίνεται από τη σχέση

$$P_e = \sum_{i=1}^M \Pr\{s_i \cap r \in \bar{S}_i\} = \sum_{i=1}^M \Pr\{s_i\} \Pr\{r \in \bar{S}_i \mid s_i\} = \sum_{i=1}^M \Pr\{s_i\} \int_{\bar{S}_i} f_r(r \mid s_i) dr$$

η οποία, για ισοπίθανα s_i , γίνεται

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{\bar{S}_i} f_r(r \mid s_i) dr \quad (3.19)$$

Η δυσκολία με τη σχέση (3.19) έγκειται στο ότι η ολοκληρούμενη ποσότητα είναι, για γκαουσιανό θόρυβο, της μορφής e^{-x^2} και δεν ολοκληρώνεται σε κλειστή μορφή. Σε ειδικές περιπτώσεις (π.χ. για μονοδιάστατο σηματοτικό χώρο) μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της *συμπληρωματικής συνάρτησης λάθους* (complementary error function), η οποία ορίζεται ως

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2} dx \quad (3.20)$$

και δίνεται σε πίνακες ή με προσεγγιστικούς τύπους (βλ. Παράρτημα Π3.1).

Για σηματοτικό αστερισμό δύο σημείων, με $\|s_1 - s_2\| = d$ και $\|s_1\| = \|s_2\| = \sqrt{E} = d/2$, και γκαουσιανές συναρτήσεις πιθανοφάνειας όπως στη σχέση (3.15α), η (3.19) γίνεται:

$$P_{e(M=2)} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_o}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{N_o}}\right) \quad (3.21)$$

Στο παράδειγμα 3.2 θα υπολογισθεί η πιθανότητα λάθους για σηματοτικό αστερισμό $L > 2$ σημείων σε μονοδιάστατο σηματοτικό χώρο (L-ASK).

Υπολογισμός άνω φράγματος της πιθανότητας λάθους στον N -διάστατο χώρο

Είναι δυνατόν να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα της (3.19) με βάση τις σχέσεις

$$\int_{S_i} f_r(r | s_i) dr = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \Pr\{r \in S_k | s_i\} \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \Pr\{\|r - s_k\| < \|r - s_i\| | s_i\} \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{N_o}}\right)$$

οπότε

$$P_e \leq \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{N_o}}\right) \quad (3.22)$$

με την ισότητα ισχύει όταν $M=2$, ταυτιζόμενη με τη σχέση (3.21).

Τέλος, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις αποστάσεις d_{ik} στην (3.22) με την ελάχιστη εξ αυτών $d_{\min}$, και να πάρουμε ένα ακόμη απλούστερο (όμως χονδροειδέστερο) άνω φράγμα της πιθανότητας λάθους:

$$P_e \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_o}}\right) \quad (3.23)$$

Από τη σχέση (3.23) είναι φανερό ότι, για δεδομένη πυκνότητα ισχύος θορύβου N_o , έχουμε ελαχιστοποίηση της πιθανότητας λάθους (ή, έστω, ενός άνω φράγματος αυτής) όταν μεγιστοποιηθεί η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων του σηματοδότη. Για δεδομένη ισχύ πομπού (δηλαδή δεδομένη μέγιστη απόσταση των σημείων από την αρχή των αξόνων), αυτό συμβαίνει όταν τα σημεία κατανεμηθούν ομοιόμορφα στην υπερσφαίρα που αντιστοιχεί στην ισχύ αυτή.

3.3.6 Σύμφωνα και Ασύμφωνα συστήματα αναγνώρισης

Το επικοινωνιακό σύστημα του σχήματος 3.3 βασίζεται στην υπόθεση ότι στο δέκτη υπάρχει η δυνατότητα της απόλυτα πιστής αναπαραγωγής των ορθοκανονικών σημάτων $\phi_j(t)$, που χρησιμοποιούνται στον πομπό σαν συναρτήσεις βάσης των κυματομορφών $s_i(t)$. Η υπόθεση αυτή δικαιολογείται για όλες τις παραμέτρους εκτός της καθυστέρησης ή αντίστοιχα της φάσης των αρμονικών συναρτήσεων που είτε χρησιμοποιούνται αυτούσιες είτε συμβάλουν στην δημιουργία των $\phi_j(t)$, σε σχέση με τις λαμβανόμενες κυματομορφές. Η καθυστέρηση, έστω μόνον λόγω διάδοσης, μεταξύ πομπού-δέκτη είναι κατά κανόνα άγνωστη και μεταβλητή λόγω πολλαπλών ανακλάσεων, διακυμάνσεων των διηλεκτρικών και διαμαγνητικών σταθερών του μέσου κλπ. Όπως θα φανεί ευθύς αμέσως, το σύστημα του σχήματος 3.3 αποδίδει μόνον με την προϋπόθεση πιστής αναπαραγωγής της φάσης των $\phi_j(t)$ στον δέκτη και ονομάζεται για το λόγο αυτό **σύμφωνο**. Η αναπαραγωγή αυτή γίνεται με διάφορες τεχνικές, η απλούστερη των οποίων είναι η παράλληλη εκπομπή σήματος-πλότου που διέρχεται ακριβώς από τον ίδιο δίαυλο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν αναφορά στον δέκτη. Εν γένει το πρόβλημα της συμφωνίας στον δέκτη είναι δύσκολο και 'ακριβό' στις τεχνικές επιλύσής του. Αφού λοιπόν δούμε στην παρακάτω κάπως

ειδικότερη περίπτωση, πώς η λειτουργία του σύμφωνου δέκτη πραγματικά καταρρέει με την ασυμφωνία της φάσης, θα δούμε τις εναλλακτικές υλοποιήσεις **ασύμφωνου δέκτη**, καθώς και την αναπόφευκτη αυξημένη επίδραση του θορύβου που την συνοδεύει.

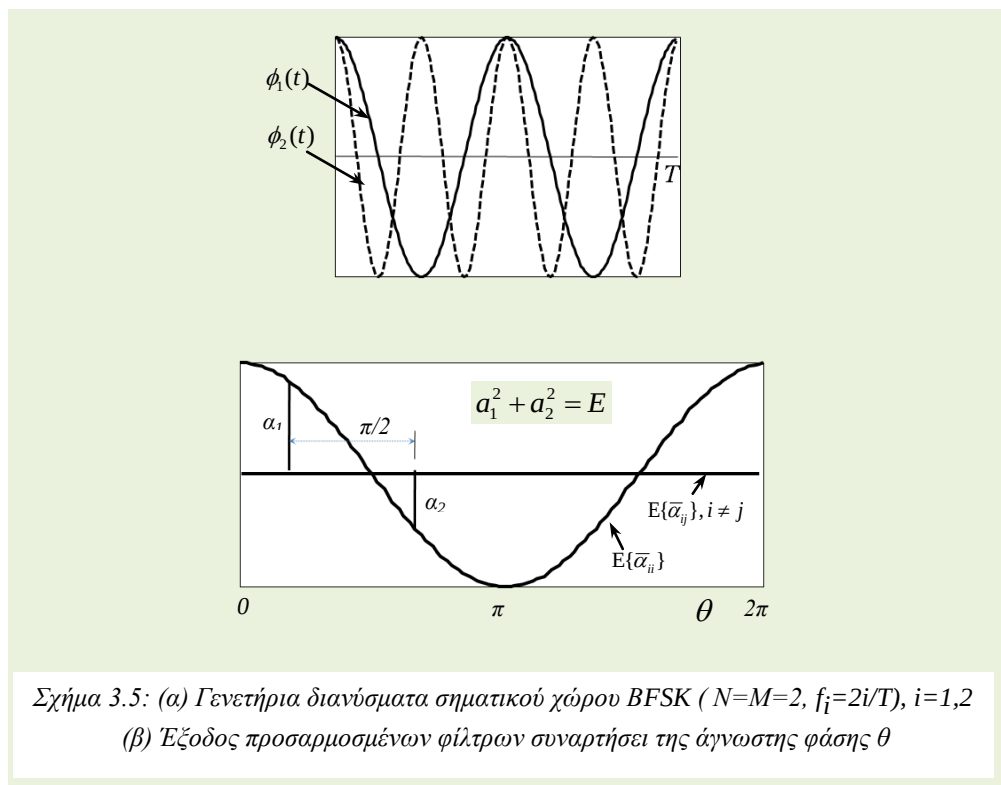
Στο σχήμα 3.5(α) δίδονται τα γενετήρια διανύσματα ϕ_j , $j=1,2$ ενός συστήματος Δυαδικής Μεταλλαγής Συχνότητας (Binary Shift Keying-BFSK), για το οποίο είναι $M=N=2$. Ας υποθέσουμε ότι τα δύο σήματα που κατασκευάζει ο πομπός κατά το σχήμα 3.3(α) είναι συγγραμμικά των ϕ_1 και ϕ_2 . Υποθέτουμε επιπλέον ότι τα σήματα αυτά φθάνουν στο δέκτη με άγνωστη ή/και τυχαία μεταβαλλόμενη φάση θ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, ενώ αγνοούμε προς το παρόν την επίδραση του θορύβου, δηλαδή

$$r_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t + \theta), \quad i=1,2, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.24)$$

Για τον δέκτη ΣΠΦ του σχήματος 3.3(β) έχουμε

$$\bar{\alpha}_{ij} = \sqrt{\frac{2E}{T}} \int_0^T \cos(2\pi f_i t + \theta) \cos(2\pi f_j t) dt, \quad i=1,2, \quad j=1,2 \quad (3.25)$$

Οι συντελεστές $\bar{\alpha}_{ij}$ εξαρτώνται από το θ , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5(β) και είναι φανερό ότι η άγνοια ή/και τυχαία μεταβολή της φάσης θ καταστρέφει την λειτουργία του δέκτη. Οι καμπύλες του σχ. 3.5(β) αναφέρονται στη μέση τιμή των συντελεστών, $E\{\bar{\alpha}_{ij}\}$, για να καλύψουν και την περίπτωση παρουσίας αθροιστικού θορύβου.



Είναι φανερό ότι το κλείδωμα και ως εκ τούτου ο συσχετισμός του σήματος με τους παλμούς αναφοράς του δέκτη δεν είναι εύκολα σε κλίμακα του διαστήματος $[0, T]$.

Η (3.24) γράφεται και ως

$$r_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} [\cos \theta \cos(2\pi f_i t) - \sin \theta \sin(2\pi f_i t)], \quad i=1,2, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.26)$$

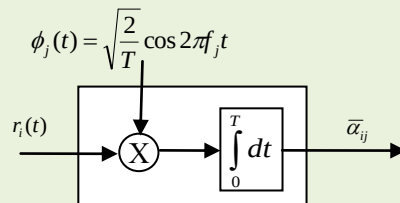
και η σύμφωνη διάταξη του συσχετιστή διασπάται τώρα στην *ασύμφωνη* που περιέχει δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες ϕ_{jd}, ϕ_{jq} για το σήμα αναφοράς ϕ_j , όπως στο σχήμα 3.6(β). Με τον εγκάρσιο (*quadrature*) αυτό συσχετιστή του δέκτη παίρνομε σαν ολοκληρώματα στο διάστημα $[0, T]$ τις ποσότητες $\sqrt{2E/T} \cos \theta$ και $\sqrt{2E/T} \sin \theta$, απ' όπου εύκολα παίρνομε σαν υποτείνουσα την ποσότητα $\sqrt{E}$ που εξαρτάται μόνο από την ενέργεια E του σήματος, χωρίς καμμία επίδραση της φάσης. Η ερμηνεία των παραπάνω με αναφορά στο σχήμα 3.5 είναι ότι: για τις τεταγμένες a_1 και a_2 οποιωνδήποτε σημείων με απόσταση $\pi/2$ ισχύει η σχέση $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = E$ (ανεξάρτητο του θ). Εύκολα επίσης συνάγεται ότι για την άλλη συχνότητα, ο εγκάρσιος συσχετιστής δίνει 0. Μ' αυτόν τον τρόπο, βλέπομε ότι ο εγκάρσιος (ασύμφωνος - *non-coherent*) συσχετιστής λύνει το πρόβλημα της άγνωστης φάσης θ .

Η ισοδυναμία συσχετιστή και προσαρμοσμένου φίλτρου, όπως παρατηρήθηκε στην ενότητα 3.2 για το ΣΠΦ, ισχύει και εδώ, έτσι ώστε οι δύο εγκάρσιοι συσχετιστές του Σχήματος 3.6(β) να μπορούν να αντικατασταθούν με προσαρμοσμένα φίλτρα. Πιο ενδιαφέρονσα είναι η ισοδυναμία σε κλίμακα όχι του καθ'αυτό σήματος αλλά της περιβάλλουσάς του, με το λεγόμενο ασύμφωνο προσαρμοσμένο φίλτρο (*noncoherent matched filter*) κατά το σχήμα 3.6(γ). Με κρουστική απόκριση $g_j(t) = \sqrt{2/T} \cos[2\pi f_j(T-t)]$, που είναι προσαρμοσμένη μόνον για τη φάση $\theta=0$, και είσοδο $r_i(t) = \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_i t + \theta)$, παίρνομε ως απόκριση του φίλτρου

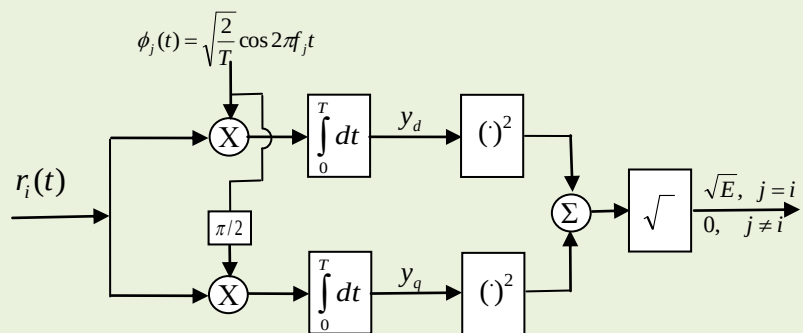
$$y_{ij}(t) = \frac{2}{T} \sqrt{E} \cos 2\pi f_i t \otimes \cos 2\pi f_j (T-t) = \begin{cases} Y(t) \cos(2\pi f_i + \theta), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.27\alpha)$$

$$\text{όπου} \quad Y(t) = \begin{cases} \sqrt{E} \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ \sqrt{E} (2 - \frac{t}{T}), & T \leq t \leq 2T \\ 0, & t \geq 2T \end{cases} \quad (3.27\beta)$$

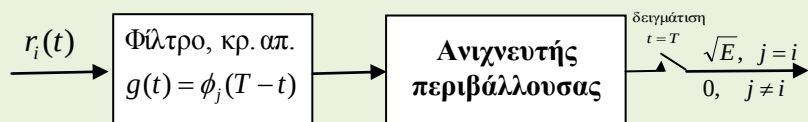
Για τις παραπάνω σχέσεις έχομε υποθέσει ότι $T = 2\pi f_i k$, $k \gg 1$.



(α) Συσχετιστής σε σύμφωνο δέκτη



(β) Εγκάρσια διάταξη συσχετιστή σε ασύμφωνο δέκτη



(γ) Ασύμφωνο προσαρμοσμένο φίλτρο

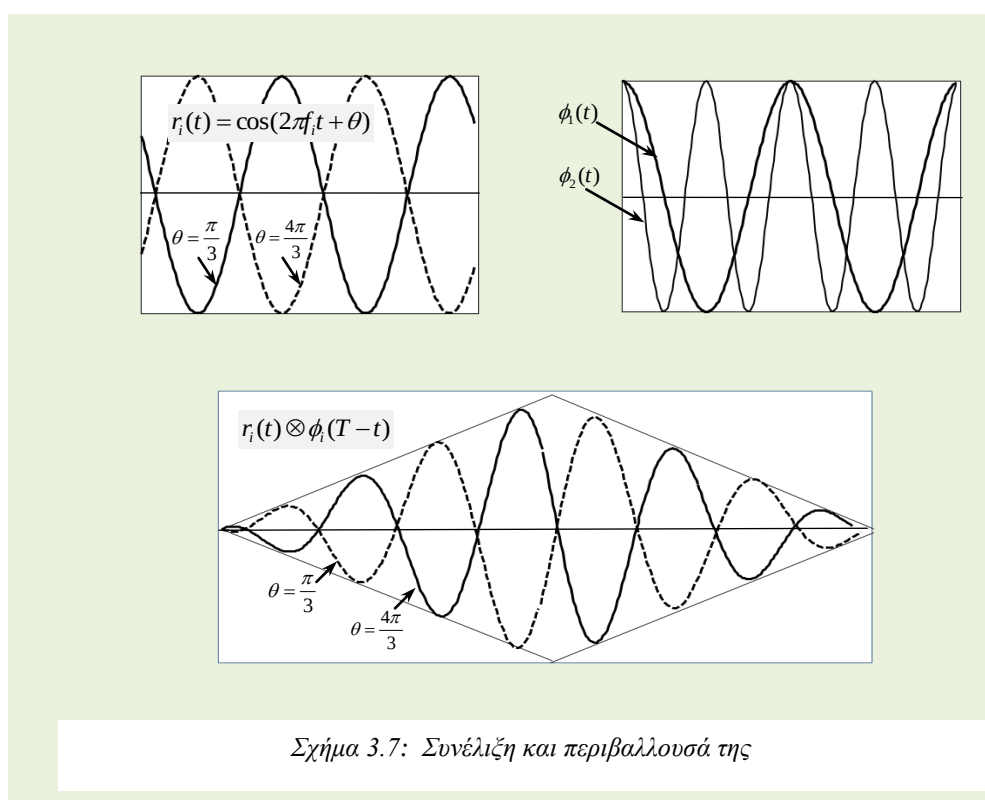
Σχήμα 3.6: Μετάβαση από τον σύμφωνο (α) στον ασύμφωνο (β,γ) δέκτη

Σχηματικά, η διαδικασία της συνέλιξης της σχέσης 3.27α φαίνεται στο Σχήμα 3.7: η γραμμική αύξηση/μείωση της περιβάλλουσας της συνάρτησης είναι αυτή που ενδιαφέρει και προέρχεται από την πεπερασμένη διάρκεια των ταλαντώσεων της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης. Για $t=T$ η περιβάλλουσα παίρνει τη μέγιστη τιμή. Εξ άλλου, η έξοδος της διάταξης του σχήματος 3.6(β) είναι

$$I_{ij} = \begin{cases} Y(T) = \sqrt{E}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.28)$$

Αρκεί λοιπόν η ανίχνευση της περιβάλλουσας του σήματος (3.27) (ανόρθωση και βαθυπερατό φίλτρο, μαζί με δειγματοσί της στο μέγιστο, $t=T$), έτσι ώστε η χρήση του ασύμφωνου προσαρμοσμένου φίλτρου να αποτελεί μια ισοδύναμη δυνατότητα πραγματοποίησης του δέκτη κατά το Σχήμα 3.6(γ).

Τονίζεται εδώ ότι κάθε μια από τις διατάξεις του σχήματος 3.6 αντιστοιχεί μόνον σε έναν κλάδο, τον j , του δέκτη στο σχήμα 3.3(γ).



3.3.7 Επίδραση θορύβου στον ασύμφωνο δέκτη

Είδαμε ότι ο ασύμφωνος δέκτης είναι τεχνολογικά απλούστερος, καθ'όσον δεν απαιτεί εκπομπή σήματος αναφοράς ή κατ' άλλο τρόπο ανακατασκευή της φάσης της εκπεμπόμενης κυματομορφής. Σαν επακόλουθο όμως της λιγότερης πληροφορίας που χρειάζεται ή λαμβάνεται υπ' όψη στον δέκτη, έχουμε δυσμενέστερη συμπεριφορά του δέκτη ως προς το θόρυβο, όπως θα φανεί καθαρά με τη σύγκριση των σχημάτων (σύμφωνης) BPSK και ασύμφωνης BFSK σε επόμενο κεφάλαιο.

Η ανάλυση της επίδοσης του ασύγχρονου δέκτη παρουσία θορύβου [HAYK88, Chap 7] δίνει τα εξής άνω φράγματα για την πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου, κατ' αντιστοιχία των σχέσεων (3.21) και (3.23):

*Πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου
Ασύμφωνης Αναδικής FSK*

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{2N_o}} \quad (3.29)$$

*Άνω φράγμα πιθανότητας εσφαλμένου
συμβόλου Ασύμφωνης MFSK*

$$P_e \leq \frac{M-1}{2} e^{-\frac{E}{2N_o}} \quad (3.30)$$

3.4 Επεξεργασμένα παραδείγματα

3.4.1 Παράδειγμα: Δυαδική μετάδοση με ημιτονικούς παλμούς και αναγνώριση ΣΠΦ

Έστω ότι χρησιμοποιούνται δύο ημιτονικοί παλμοί, s_1 και s_2 , μιάς και δύο πλήρων περιόδων, αντίστοιχα (δυαδική μεταλλαγή συχνότητας).

A. Να γραφεί πρόγραμμα με την εξής λειτουργία

- I. Για δεδομένη ακολουθία δυαδικών ψηφίων $b[k]$, $k=1,2,\dots,K=10$, παράγει παλμοσειρά $S[k]=[s_i]$, $i \in \{1,2\}$, σύμφωνα με την αντιστοιχία $0 \rightarrow s_1$, $1 \rightarrow s_2$. Η $S[k]$ είναι πίνακας $[N_s \times K]$, του οποίου κάθε στήλη είναι παλμός s_i στο διακριτό πεδίο (δείγματα πλήθους N_s).
- II. Παράγει και υπερθέτει στην ψηφιακή παλμοσειρά λευκό, γκαουσιανό θόρυβο, για δεδομένη σηματοθορυβική σχέση.
- III. Υπολογίζει και σχεδιάζει τις αποκρίσεις των προσαρμοσμένων φίλτρων στη θορυβώδη παλμοσειρά εισόδου, με ενδείξεις επί του σχήματος για τις χρονικές στιγμές δειγματοληψίας καθώς και τα κωδικοποιημένα δυαδ. ψηφία. Αυτό να γίνει για δύο τιμές σηματοθορυβικής σχέσης: (α) SNR=10 db (β) SNR=-20db.

B. Μία άλλη έκδοση του παραπάνω προγράμματος και για μία μεγάλη ακολουθία εισόδου $b[k]$ (μήκους π.χ. $K=50000$) να επαληθεύσει ότι η βελτίωση της σηματοθορυβικής σχέσης ισούται με το πλήθος, N_s , των δειγμάτων των παλμών s_i (εντός της βασικής περιόδου T).

Υλοποίηση

Κώδικες 3.1 και 3.2.

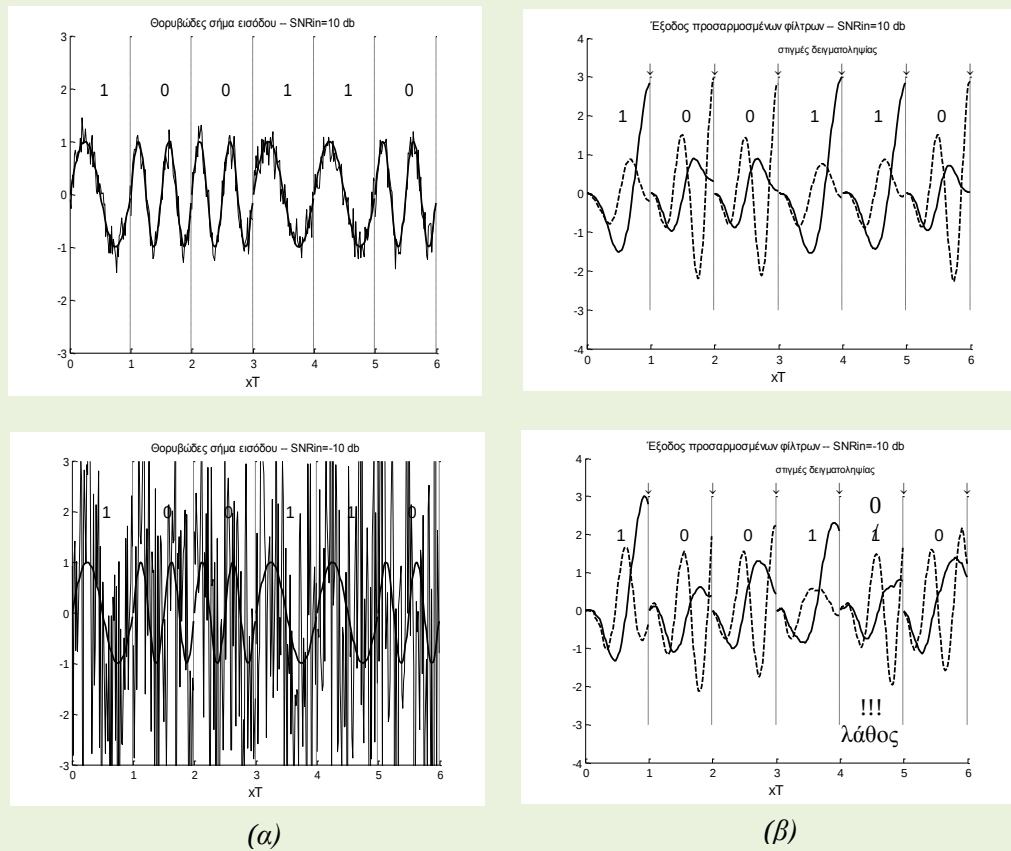
A.

```

3  % Απόκριση Προσαρμοσμένων Φίλτρων -
4  % Δυαδική μετάδοση με ημιτονικούς παλμούς διαφορετικών συχνοτήτων
5  clear all; close all;
6  b=[1 0 0 1 1 0]; % η δυαδική ακολουθία προς μετάδοση
7  t=[0:0.1:2*pi]'; % το χρονικό πλέγμα μιας βασικής περιόδου, T
8  Ns=length(t);
9  s1=sin(t); s2=sin(2*t); % οι δύο παλμοί
10 E1=sum(s1.^2); E2=sum(s2.^2); % η ενέργεια των παλμών
11 for i=0:Ns-1
12     g1(Ns-i)=s1(i+1); % προσαρμοσμένο #1
13     g2(Ns-i)=s2(i+1); % προσαρμοσμένο #2
14 end
15 SNRdb=5; SNRin=10^(SNRdb/10); % επιθυμητό SNR
16 Sin=1/2*(E1+E2)/Ns; % (μέση) ισχύς σήματος εισόδου
17 Nin=Sin/SNRin; % ισχύς θορύβου
18 for k=1:length(b) % για κάθε bit εισόδου επέλεξε αντίστοιχο παλμό
19     if b(k)==1 s=s1;
20     else s=s2;
21     end
22     w=wgn(Ns,1,10*log10(Nin)); % λευκός γκαουσ. θορύβος ισχύος Nin
23     r=s+w; % θορυβώδες σήμα
24     S(:,k)=s; R(:,k)=r;
25     ho=conv(g1,r); Ho1(:,k)=ho(1:Ns);
26     ho=conv(g2,r); Ho2(:,k)=ho(1:Ns);
27     clear s ho;
28 end
29 %%%% plots
30 m=max([max(max(Ho1)); max(max(Ho2))] );
31 Ho1=3*Ho1/m; Ho2=3*Ho2/m;
32 figure; ylim([-3,3]); hold;
33 for k=1:length(b)
34     t1=t/2/pi+(k-1);
35     tmax=t1(length(t1));
36     line(t1,S(:,k),'Color','black','Linewidth',2);
37     plot(t1,R(:,k),'k');
38     line([tmax,tmax],...
39         [-3,3],'Color','black','Linestyle',':','Linewidth',1);
40     text(tmax-0.5,2,int2str(b(k)),'FontSize',14);
41 end
42 title(['Θορυβώδες σήμα εισόδου -- SNRin=',num2str(SNRdb),' db']);
43 xlabel('xT','FontSize',12);
44 hold; figure;
45 ylim([-4,4]); hold;
46 for k=1:length(b)
47     t1=t/2/pi+(k-1);
48     tmax=t1(length(t1));
49     plot(t1,Ho1(:,k),'color','black','Linewidth',2);
50     plot(t1,Ho2(:,k),'color','black','Linestyle','--','Linewidth',2);
51     line([tmax,tmax],[-3,3],'Color','black',...
52         'Linestyle',':','Linewidth',1);
53     text(tmax-0.5,2,int2str(b(k)),'FontSize',14);
54     text(t1(length(t1)-3),3.2,'\downarrow','FontSize',10);
55 end
56 text(t1(length(t1))/2,3.7,'στιγμές δειγματοληψίας','FontSize',8);
57 title(['Εξόδος προσαρμοσμένων φίλτρων -- SNRin=',num2str(SNRdb),' db']);
58 xlabel('xT','FontSize',12);
59 hold;

```

Κώδικας 3.1: Εξομοίωση προσαρμοσμένων φίλτρων για θορυβώδη ημιτονικά σήματα μιας και δύο περιόδων



Σχήμα 3.8: Εξαγόμενα Κώδικα 3.1. (α) θορυβώδες σήμα εισόδου
(β) αποκρίσεις προσαρμοσμένων φίλτρων

B.

```

3  % Εκτίμηση βελτίωσης SNR προσαρμοσμένου φίλτρου
4  clear all;
5  b=randint(1,50000); % το δυαδικό σήμα προς μετάδοση
6  t=[0:0.1:2*pi]; % χρονικό πλέγμα βασικής περιόδου , T
7  Ns=length(t);
8  s1=sin(t); % παλμός #1
9  s2=sin(2*t); % παλμός #2
10 E1=sum(s1.^2); % ενέργεια παλμού #1
11 E2=sum(s2.^2); % ενέργεια παλμού #2
12 SNRdb=10; % επιθυμητό SNR εισόδου, σε db
13 SNRin=10^(SNRdb/10);
14 Sin=1/2*(E1+E2)/Ns; % μέση ισχύς σήματος εισόδου
15 Nin=Sin/SNRin; % ισχύς θορύβου εισόδου

16 for k=1:length(b) % για κάθε bit εισόδου επέλεξε αντίστοιχο παλμό
17     if b(k)==1 s=s1;
18     else s=s2;
19     end
20     w=randn(1,Ns)*sqrt(Nin); % θόρυβος εισόδου
21     W(k)=sum(w.^2)/Ns;
22     r=s+w;
23     Ho(k)=sum(s.^2); % σήμα εξόδου, ho(T), σε χρόνους t=kT
24     Wo(k)=sum(s*r')-Ho(k); % θόρυβος εξόδου
25     clear s w;
26 end
27 Nin_measured=sum(W)/length(W);
28 SNRout=sum(Ho.^2)/sum(Wo.^2);

29 SNRin_measured=10*log10(Sin/Nin_measured)
30 SNR_improvement=SNRout/SNRin
31 Ns

```

Κώδικας 3.2: Εκτίμηση της βελτίωσης της σηματοθορυβικής σχέσης με χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου

Με τα δεδομένα του παραπάνω παραδείγματος παίρνουμε απόκριση παρόμοια με την ακόλουθη

```

SNRin_measured = 10.0046    (db)
SNR_improvement = 62.6033
Ns =63

```

Κάθε ανεξάρτητη εκτέλεση του προγράμματος θα μας δίνει ενδεχομένως ελαφρώς διαφοροποιημένα αποτελέσματα. Αυτό είναι φυσικό, λόγω των διαφορετικών, κάθε φορά, στιγμιότυπων θορύβου.

Επαληθεύεται συνεπώς ότι η βελτίωση του σηματοθορυβικού λόγου με το ΣΠΦ είναι περίπου ίση με το N_s . Να σημειωθεί ότι δεν απαιτείται η συνθήκη Γκαουσιανής κατανομής για την αλήθεια του συμπεράσματος αυτού, παρά μόνον ότι ο θόρυβος είναι λευκός, αθροιστικός, στατιστικά ανεξάρτητος του σήματος (θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί π.χ. ομοιόμορφη κατανομή).

3.4.2 Παράδειγμα: Πιθανότητα εσφαλμένης ανίχνευσης συμβόλων L-ASK

A. Έστω αστερισμός L σημείων, κείμενων επί ευθείας γραμμής στις θέσεις $\{\pm\sqrt{E_1}, \pm 3\sqrt{E_1}, \dots, \pm(L-1)\sqrt{E_1}\}$.

Για ισοπίθανα σύμβολα, να υπολογιστεί θεωρητικά η πιθανότητα εσφαλμένης ανίχνευσης συμβόλου (ή το *Symbol Error Rate* - SER) για λευκό αθροιστικό θόρυβο Gauss, συναρτήσει των L και $\frac{E_{b,av}}{N_o}$.

B. Να γραφεί πρόγραμμα-συνάρτηση σε MATLAB με την εξής λειτουργία:

a) Παράγει σήμα εκ τυχαίων συμβόλων, με ορθογωνικούς παλμούς διάρκειας T και πλάτους εκ του συνόλου $\{\pm A, \pm 3A, \dots, \pm(L-1)A\}$, υπερθέτει δε θόρυβο

AWGN συγκεκριμένου ανηγμένου σηματοθορυβικού λόγου, $\frac{E_{b,av}}{N_o}$.

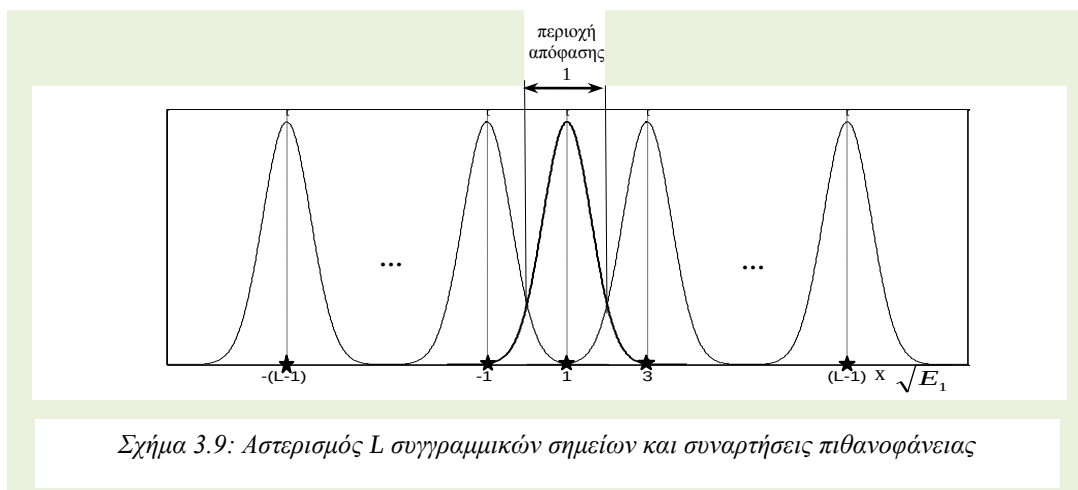
b) Εξομοιώνει δέκτη σύμφωνου προσαρμοσμένου φίλτρου για τη φώραση της ως άνω παλμοσειράς και υπολογίζει το ρυθμό εσφαλμένων συμβόλων (SER).

Γ. Να σχεδιαστούν θεωρητικές καμπύλες BER για $L=4,8,16$ και, με χρήση της συνάρτησης εξομοίωσης του ερωτήματος B.b και του bertool του MATLAB, να υπολογιστούν και υπερτεθούν σημεία εξομοίωσης για διάφορες τιμές του $\frac{E_{b,av}}{N_o}$ στην περιοχή 1,...20 db.

Υλοποίηση:

A.

Στο σχήμα 3.9 έχει σχεδιαστεί ο σηματικός χώρος συγγραμμικών σημείων και έχουν υπερτεθεί γκαουσιανές συναρτήσεις πιθανοφάνειας. Λόγω του αθροιστικού (ανεξάρτητου από το σήμα) θορύβου, οι συναρτήσεις αυτές είναι ίδιου εύρους και, συνεπώς, τέμνονται στα μεσοδιαστήματα των σημείων του αστερισμού, ορίζοντας έτσι ίσα διαστήματα απόφασης γύρω από τα σημεία.



Με τους συμβολισμούς

- p_i : η πιθανότητα εκπομπής του συμβόλου s_i , $i=1, 2, \dots, L$
- $p_{e,i}$: η πιθανότητα σφάλματος, δεδομένου ότι εστάλει το σύμβολο s_i

η πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου, P_e , εκφράζεται ως εξής:

$$P_e = \sum_{i=1}^L p_i p_{e,i} = \frac{1}{L} \left\{ 2 \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_1}{N_o}} \right) + \sum_{i=1}^{L-2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_1}{N_o}} \right) \right\} = \frac{L-1}{L} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_1}{N_o}} \right) \quad (3.31)$$

Η μέση ενέργεια συμβόλου εκφράζεται, συναρτήσει των E_1 και L , ως εξής

$$\underline{\text{Μέση ενέργεια συμβ. } L\text{-ASK}} \quad E_{av} = \sum_{i=1}^L p_i (2i-1)^2 E_1 = \frac{2E_1}{L} \sum_{i=1}^{L/2} (2i-1)^2 = E_1 \frac{L^2-1}{3} \quad (3.32)$$

$$\text{και ανηγμένη ανά bit} \quad E_{b,av} = \frac{E_{av}}{\log_2 L} = \frac{E_1}{\log_2 L} \frac{L^2-1}{3}$$

Λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς E_1 και αντικαθιστώντας στην (3.31) παίρνουμε

$$\underline{\text{Πιθανότητα Εσφαλμένου Συμβόλου } L\text{-ASK}} \quad P_e = \frac{L-1}{L} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 L}{L^2-1} \frac{E_{b,av}}{N_o}} \right) \quad (3.33)$$

B.

Η ζητούμενη συνάρτηση MATLAB δίνεται από τον κώδικα 3.3. Σε σχέση με τη γενικότερη διατύπωση του ερωτήματος (Α) και με τους εξής πρόσθετους συμβολισμούς

- T : η διάρκεια κάθε παλμού,
- $nsamp$: ο αριθμός δειγμάτων σήματος στη διάρκεια T ενός παλμού.

εδώ είναι $E_1 = A^2 T$.

Στον κώδικα 3.3 και χωρίς βλάβη της γενικότητας, έχει ληφθεί το πλάτος του μικρότερου παλμού, A , ίσο με 1. Αφού παραχθεί διάνυσμα συμβόλων (τυχαίων τιμών, ομοιόμορφα κατανεμημένων στα L πλάτη), έστω $\mathbf{x}(1 \times K)$, δημιουργείται αντίστοιχο διάνυσμα σήματος ορθογωνικών παλμών, $\mathbf{y}(1 \times nsamp \cdot K)$, με επανάληψη κάθε συμβόλου του $\mathbf{x}$, $nsamp$ φορές [με χρήση της `rectpulse(x, nsamp)`].

Η ισχύς θορύβου, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε δείγμα του $\mathbf{y}$ ώστε να εξασφαλισθεί συγκεκριμένη τιμή ανηγμένου σηματοθορυβικού λόγου, $E_{b,av}/N_o$, υπολογίζεται ως εξής, λαμβανομένου υπόψη ότι το μέγιστο εύρος ζώνης (σήματος και θορύβου) είναι ίσο με τη συχνότητα δειγματοληψίας $F_{samp}/2$:

$$N = \frac{N_o}{2} F_{samp} = \frac{N_o}{2T_{samp}} = \frac{N_o}{2T / nsamp} = \frac{N_o nsamp}{2T},$$

η δε σηματοθορυβική σχέση είναι

$$\frac{S}{N} = \frac{2ST}{N_o nsamp} = \frac{2E_{av}}{N_o nsamp} = \frac{2 \log_2 L}{nsamp} \frac{E_{b,av}}{N_o}$$

Δεδομένου ότι η ισχύς της παλμοσειράς είναι (λόγω της 3.5)

$$S = E_{av} / T = A^2 \frac{L^2 - 1}{3},$$

ο συνδυασμός των παραπάνω σχέσεων δίνει

$$\frac{\text{Ισχύς διακριτού θορύβου}}{\text{(προστίθεται σε κάθε δείγμα)}} \quad N = A^2 \frac{(L^2 - 1)}{3} \frac{2 \log_2 L}{nsamp} \frac{E_{b,av}}{N_o}$$

Η συνάρτηση του κώδικα 3.3 μπορεί να κληθεί για διάφορες τιμές των k και E_b/N_o για τον υπολογισμό και σχεδιασμό καμπυλών BER- E_b/N_o . Αυτό μπορεί να γίνει και μέσω του ειδικού εργαλείου του MATLAB, BERTOOL, με τη βασική του συνάρτηση υπολογισμού του BER να διαμορφώνεται όπως στον Κώδικα 3.4. Με bold δείχνονται τα τμήματα κώδικα που εισάγονται στο έτοιμο template του BERTOOL:

```

1. function [errors, symbols]=ask_errors(k,M,nsamp,EbNo)
2. % Η συνάρτηση αυτή εξομοιώνει την παραγωγή και αποκωδικοποίηση
3. % θορυβώδους σήματος L-ASK και μετρά τον αριθμό των εσφαλμένων συμβόλων.
4. % Υπολογίζει επίσης τη θεωρητική πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου, Pe.
5. % Επιστρέφει τον αριθμό των εσφαλμένων συμβόλων, καθώς και τον συνολικό
6. % αριθμό των συμβόλων που παρήχθησαν.
7. % k είναι ο αριθμός των bits/σύμβολο, ώστε L=2^k,
8. % M ο αριθμός των παραγόμενων συμβόλων (μήκος ακολουθίας L-ASK)
9. % nsamp ο αριθμός των δειγμάτων ανά σύμβολο (oversampling ratio)
10. % EbNo είναι ο λόγος Eb/No, σε db
11. L=2^k;
12. SNR=EbNo-10*log10(nsamp/2/k); % SNR ανά δείγμα σήματος
13. % Διάνυσμα τυχαίων ακεραίων {±1, ±3, ... ±(L-1)}. Να επαληθευθεί
14. x=2*floor(L*rand(1,M))-L+1;
15. Px=(L^2-1)/3; % θεωρητική ισχύς σήματος
16. sum(x.^2)/length(x); % μετρούμενη ισχύς σήματος (για επαλήθευση)
17. y=rectpulse(x,nsamp);

18. n=wgn(1,length(y),10*log10(Px)-SNR);
19. ynoisy=y+n; % θορυβώδες σήμα

20. y=reshape(ynoisyy,nsamp,length(ynoisyy)/nsamp);
21. matched=ones(1,nsamp);
22. z=matched*y/nsamp;
23. l=[-L+1:2:L-1];
24. for i=1:length(z)
25.     [m,j]=min(abs(l-z(i)));
26.     z(i)=l(j);
27. end
28. err=not(x==z);
29. errors=sum(err);
30. symbols=length(err);
31. end

```

Κώδικας 3.3: Υπολογισμός πιθανότητας εσφαλμένου συμβόλου σύμφωνης ASK, με ορθογωνικούς παλμούς

το μεν (A) για την αρχικοποίηση των παραμέτρων (k , N_{symb} , $nsamp$), το δε (B) για την κλήση της συνάρτησης υπολογισμού των λαθών (`ask_errors` του κώδικα 3.3) για συγκεκριμένη ακολουθία συμβόλων. Η συνάρτηση αυτή καλείται επαναληπτικά, έως ότου είτε ο σωρευτικός αριθμός των λαθών που έχουν καταμετρηθεί ξεπεράσει ένα ελάχιστο όριο (`maxNumErrs`), είτε ο αριθμός των bits που «έτρεξαν» με την εξομοίωση φθάσει ένα μέγιστο όριο (`maxNumBits`). Και τα δύο όρια τίθενται εξ αρχής στο ειδικό GUI του BERTOOL. Οι λαμβανόμενες καμπύλες δείχνονται στο σχ. 3.10 (οι θεωρητικές παίρνονται με την επιλογή PAM από το BERTOOL).

Ας σημειωθεί ότι για κωδικοποίηση Gray ισχύει $BER \approx \frac{SER}{k}$, $k = \log_2 L$: αριθμός

bits ανά σύμβολο. Πρέπει να διευκρινιστεί επίσης ότι αυτό που υπολογίζεται στην πραγματικότητα είναι η πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου ή εσφαλμένου bit που εκ παραδρομής έχει επικρατήσει να ονομάζεται SER ή BER. Για να πάρουμε ρυθμό λαθών, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τις ως άνω πιθανότητες με τον αντίστοιχο ρυθμό εκπομπής (συμβόλων ή δ.ψ.).

```

function [ber,numBits] = ask_ber_func(EbNo, maxNumErrs, maxNumBits)

% Import Java class for BERTool.
import com.mathworks.toolbox.comm.BERTool;

% Initialize variables related to exit criteria.
totErr = 0; % Number of errors observed
numBits = 0; % Number of bits processed

% A. --- Set up parameters. ---
% --- INSERT YOUR CODE HERE.
k=3; % number of bits per symbol
Nsymb=2000; % number of symbols in each run
nsamp=16; % oversampling,i.e. number of samples per T

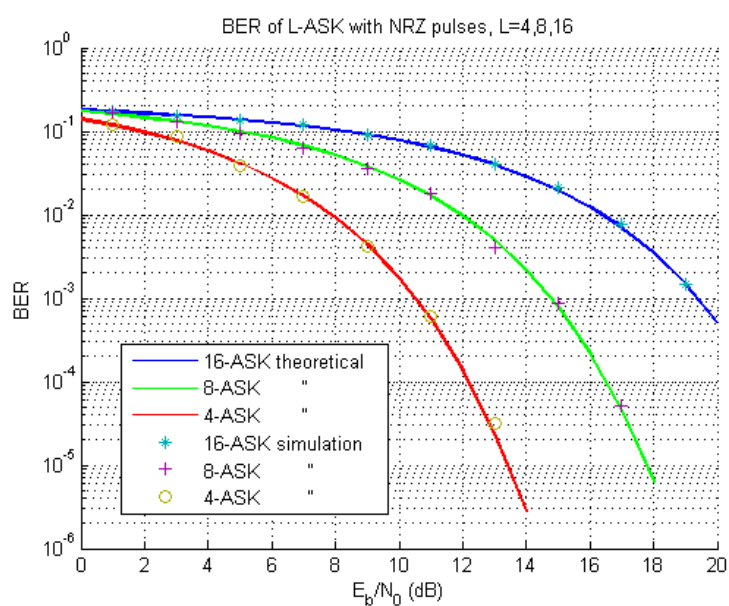
% Simulate until number of errors exceeds maxNumErrs
% or number of bits processed exceeds maxNumBits.

while((totErr < maxNumErrs) && (numBits < maxNumBits))
    % Check if the user clicked the Stop button of BERTool.
    if (BERTool.getSimulationStop)
        break;
    end
    % B. --- INSERT YOUR CODE HERE.
    errors=ask_errors(k,Nsymb,nsamp,EbNo);
    % Assume Gray coding: 1 symbol error ==> 1 bit error
    totErr=totErr+errors;
    numBits=numBits + k*Nsymb;
end % End of loop

% Compute the BER
ber = totErr/numBits;

```

Κώδικας 3.4: Συνάρτηση εκτίμησης λαθών – καλείται από το BERTOOL



Σχήμα 3.10: Πιθανότητα εσφαλμένου bit για την L-ASK με ορθογωνικούς παλμούς

3.5 Ασκήσεις προς εκτέλεση

Άσκηση 3.1 (να εκτελεστεί στο εργαστήριο)

- I. Να επαληθευθεί, με υπολογισμό και προβολή σχετικού ιστογράμματος, ότι τα στοιχεία του διανύσματος x της εντολής 14 του Κώδικα 3.3 ακολουθούν πράγματι την ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο των ακεραίων $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(L-1)\}$.
- II. Να επαληθευθεί η ορθή λειτουργία του βρόχου 24-27 του Κώδικα 3.3 ως ανιχνευτή ελάχιστης απόστασης για την L -ASK.
- III. Να επαληθευθεί η καμπύλη του σχήματος 3.10 για την 8-ASK με κλήση της συνάρτησης `ask_errors()` του Κώδικα 3.3, (α) μέσα από δικό σας κύριο πρόγραμμα, (β) μέσα από το BERTOOL του MATLAB. Να υπερτεθεί και η θεωρητική καμπύλη με χρήση της σχέσης (3.33) και την προσέγγιση $BER \approx P_e / \log_2 L$.

Άσκηση 3.2

Να διατυπωθούν αναλυτικά οι κρουστικές αποκρίσεις των δύο ΣΠΦ, του παραδείγματος 3.4.1 καθώς και η απόκριση του καθενός στον αντίστοιχο παλμό (στον οποίο είναι προσαρμοσμένο).

Άσκηση 3.3

Δίνεται σηματικός αστερισμός 4 σημείων (QPSK) ως εξής:

$$s_i(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta_i), \quad \theta_i = \pm\theta, \pm(180 - \theta), \quad 30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$$

- a) Να ευρεθεί και σχεδιαστεί συναρτήσει της γωνίας θ μια καλή προσέγγιση της πιθανότητας εσφαλμένου συμβόλου, P_e , με την υπόθεση λευκής ακολουθίας εισόδου, δέκτη προσαρμοσμένου φίλτρου και λευκό αθροιστικό θόρυβο, με ανηγμένο σηματοθορυβικό λόγο E/N_0 16 db.
- b) Με τα δεδομένα του ερωτήματος (a) να ευρεθούν τα ακρότατα (μέγιστο και ελάχιστο) της P_e και οι αντίστοιχες τιμές της γωνίας θ .

Άσκηση 3.4

Εξειδικεύοντας το Παράδειγμα 3.4.2 με $L=4$, να υποτεθεί ότι τα μεγαλύτερα κατ' απόλυτη τιμή πλάτη εμφανίζονται με πιθανότητα $1/8$ το καθένα, ενώ τα άλλα δύο με πιθανότητα $3/8$, αντίστοιχα. Εξ άλλου, η ισχύς θορύβου κατά τη μετάδοση των δύο μεγαλύτερων πλατών είναι διπλάσια αυτής που αντιστοιχεί στα άλλα δύο πλάτη ($2N_0$, έναντι N_0), ενώ σε κάθε περίπτωση ο θόρυβος είναι λευκός, αθροιστικός.

(I) Να προσδιοριστούν οι περιοχές απόφασης στο σηματικό χώρο.

(II) Να εκφρασθεί η πιθανότητα λάθους συναρτήσει του $\frac{1}{\sqrt{N_0}}$

(III) Να εξομοιωθεί ο δέκτης ΣΠΦ και να εκτιμηθεί το SER.

3.6 Παράρτημα Π3.1

Συνάρτηση λάθους (error function)

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

Συμπληρωματική συνάρτηση λάθους (complementary error function):

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

Η συμπληρωματική συνάρτηση λάθους, $\operatorname{erfc}(x)$, μπορεί να βρεθεί από πίνακες ή με χρήση προσεγγιστικών αναπτυγμάτων σε σειρές.

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{(2x^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2x^2)^3} + \dots \right)$$

Για μεγάλα θετικά x , μπορούμε να πάρουμε τα άνω φράγματα:

$$\operatorname{erfc}(x) < \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} < \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

u	$\operatorname{erf}(u)$	u	$\operatorname{erf}(u)$
0.00	0.00000	1.10	0.88021
0.05	0.05637	1.15	0.89612
0.10	0.11246	1.20	0.91031
0.15	0.16800	1.25	0.92290
0.20	0.22270	1.30	0.93401
0.25	0.27633	1.35	0.94376
0.30	0.32863	1.40	0.95229
0.35	0.37938	1.45	0.95970
0.40	0.42839	1.50	0.96611
0.45	0.47548	1.55	0.97162
0.50	0.52050	1.60	0.97635
0.55	0.56332	1.65	0.98038
0.60	0.60386	1.70	0.98379
0.65	0.64203	1.75	0.98667
0.70	0.67780	1.80	0.98909
0.75	0.71116	1.85	0.99111
0.80	0.74210	1.90	0.99279
0.85	0.77067	1.95	0.99418
0.90	0.79691	2.00	0.99532
0.95	0.82089	2.50	0.99959
1.00	0.84270	3.00	0.99998
1.05	0.86244	3.30	0.999998