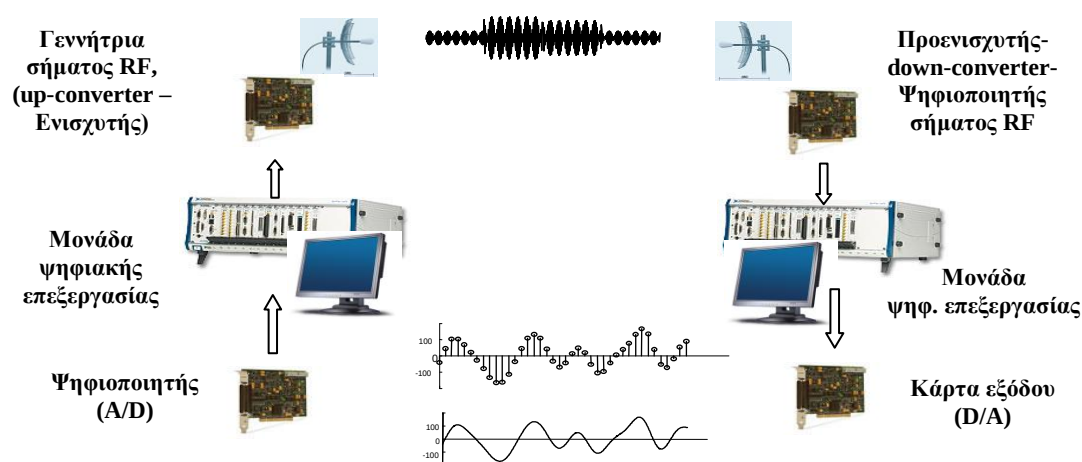


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: Η ψηφιακή επεξεργασία σήματος στις τηλεπικοινωνίες

1.1 Εισαγωγή

Ο χώρος και ο χρόνος όπου εξελίσσονται τα φυσικά φαινόμενα είναι συνεχής, τουλάχιστον στη μακροκλίμακα την οποίαν αντιλαμβάνονται τα αισθητήριά μας (στη μικροκλίμακα, βεβαίως, έχει αποδειχθεί η διακριτή-κβαντισμένη υπόσταση ύλης και ενέργειας). Ωστόσο, η παράσταση και επεξεργασία των φυσικών μεγεθών σε διακριτές θέσεις ή στιγμές είναι περισσότερο κατάλληλη της αντίστοιχης συνεχούς. Το κύριο πλεονέκτημα μιας παράστασης διακριτού χώρου-χρόνου είναι η δυνατότητα αποθήκευσης, επεξεργασίας και αναπαραγωγής αυτών των φυσικών μεγεθών υπό μορφή πεπερασμένου πλήθους δειγμάτων με τη χρήση ψηφιακών μηχανών. Σύνθετοι αλγόριθμοι επεξεργασίας καθίστανται δυνατοί επιτρέποντες όχι μόνον αυξημένη ποιότητα, σε σχέση προς τις αντίστοιχες «αναλογικές» τεχνικές, αλλά και εντελώς νέες διεργασίες, όπως για παράδειγμα την κρυπτογράφηση και τη συμπίεση του όγκου των δεδομένων. Επιπλέον, η οικονομία κλίμακας που επιτυγχάνεται με τη χρήση ψηφιακών μηχανών (όμοιων σε πολλά πεδία εφαρμογών), μειώνει ταυτόχρονα και το απαιτούμενο κόστος.

Εξειδικεύοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις στην περιοχή των τηλεπικοινωνιών, θα πρέπει να τονίσουμε τη σύγχρονη τάση για πλήρως ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας, με μόνα αναλογικά μέρη τις μονάδες «δίπλα» στις κεραίες εκπομπής/λήψης και «δίπλα» στις πηγές/προορισμούς της φερόμενης πληροφορίας (δηλαδή τις μονάδες μετατροπής μεταξύ αναλογικού σήματος και ψηφιακής παράστασής του - A/D και D/A- και της τελικής ενίσχυσης ή προενίσχυσης, εάν απαιτείται) όπως δείχνεται στο σχήμα 1.1. Για τον μηχανικό τηλεπικοινωνιακού υλικού αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να ασχοληθεί με τη μελέτη και το σχεδιασμό εξειδικευμένου και δύσκολου hardware. Αρκεί πλέον να γνωρίζει ψηφιακή επεξεργασία σήματος και τη θεωρία, βεβαίως, των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων.



Σχήμα 1.1: Διάταξη συστήματος ψηφιακής επικοινωνίας

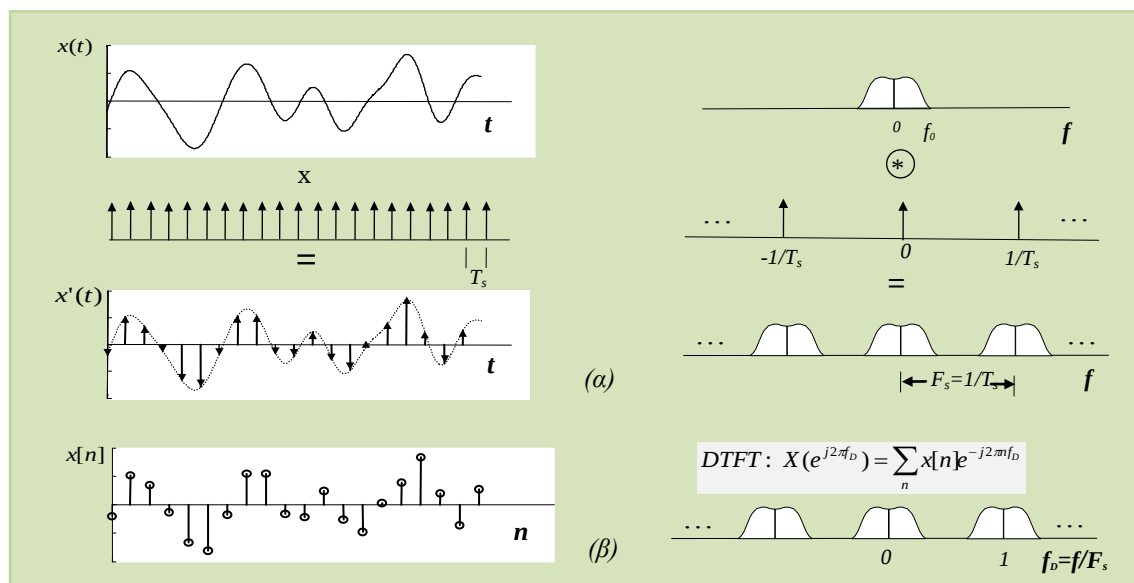
1.2 Δειγματοληψία - Ψηφιοποίηση

Δειγματοληψία είναι η διαδικασία κατά την οποία ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο μέγεθος στο χρόνο ή το χώρο (πίεση, θερμοκρασία, φωτεινή ένταση, ...) απεικονίζεται σε ένα σύνολο δειγμάτων-τιμών σε διακριτές θέσεις του πεδίου ορισμού του εν λόγω φυσικού μεγέθους. Το πλέγμα των σημείων δειγματοληψίας επιλέγεται συνήθως ομοιόμορφο (ομοιόμορφη δειγματοληψία). Το σύνολο των δειγμάτων αποτελεί το *σήμα διακριτού χρόνου (ή χώρου)*. Επειδή το πεδίο τιμών των δειγμάτων είναι εν γένει συνεχές επίσης, για την ψηφιοποίηση χρειάζεται ένα ακόμη βήμα: αυτό της *κβάντισης* των δειγμάτων. Άρα, *δειγματοληψία* και *κβάντιση* είναι τα δύο απαραίτητα βήματα της *ψηφιοποίησης*. Ο όρος «αναλογικό σήμα» αναφέρεται σε σήματα συνεχούς χρόνου (ή χώρου), ενώ το «ψηφιακό σήμα» συγγέεται πολλές φορές εσφαλμένα με το σήμα διακριτού χρόνου (ή χώρου).

1.2.1 Σήματα διακριτού χρόνου

Περιοριζόμαστε στην εξέταση χρονικών σημάτων, ωστόσο τα ίδια ισχύουν και για χωρικά σήματα. Η δειγματοληψία δίνει σήματα διακριτού χρόνου, απαρτιζόμενα από δείγματα σήματος κατά τις χρονικές στιγμές nT_s , όπου n ακέραιος και T_s η *περίοδος δειγματοληψίας*. Για τη φασματική τους παράσταση (στο πεδίο συχνοτήτων) χρησιμοποιούνται οι εναλλακτικές προσεγγίσεις του σχήματος 1.2. Στην (α), παραμένουμε στο συνεχή χρόνο και θεωρούμε μάζες σήματος (κρουστικές) στο διακριτό πλέγμα $\{nT_s\}$. Ο μετασχηματισμός Fourier (συμβολικά $\mathfrak{F}$) του σήματος αυτού προκύπτει ως η περιοδική επανάληψη του φάσματος του αρχικού σήματος στο πλέγμα συχνοτήτων $\{k/T_s\}$, k ακέραιος, όπως φανερώνουν οι παρακάτω σχέσεις.

$$x'(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T_s}} \quad \Leftrightarrow \quad X'(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T_s}) \quad (1.1a)$$



Σχήμα 1.2: Δειγματοληψία - παράσταση διακριτού χρόνου

Εξ άλλου, λόγω της πρώτης ισότητας για το σήμα $x'(t)$ στην (1.1α) είναι:

$$\mathfrak{I}\{x'(t)\} = \mathfrak{I}\left\{\sum_n x[n]\delta(t - nT_s)\right\} = \sum_n x[n] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_n x[n] e^{-j2\pi n f T_s} \quad (1.1\beta)$$

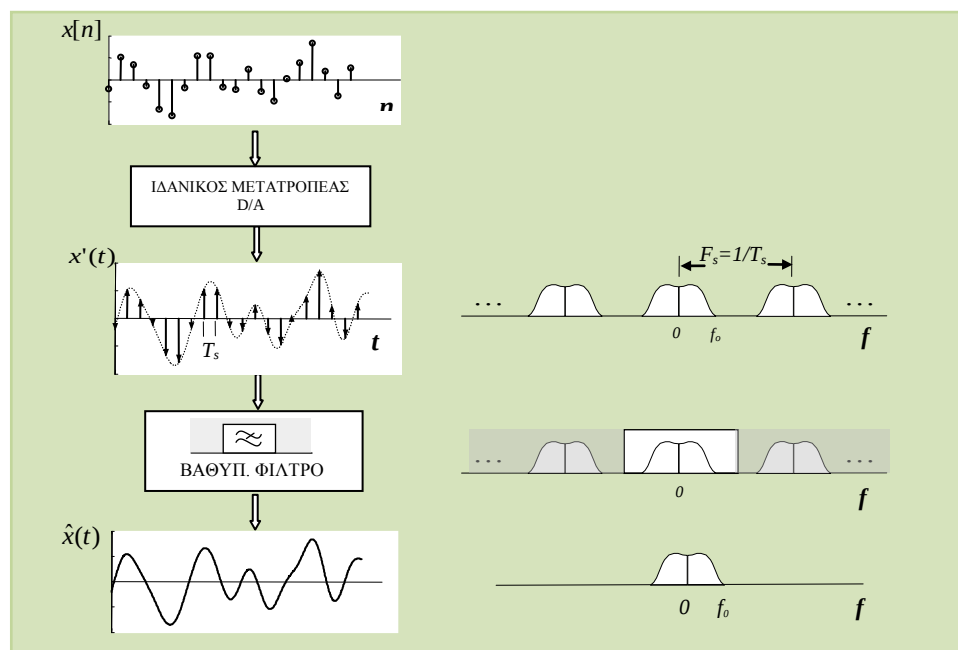
Οι παραπάνω σχέσεις (1.1α) και (1.1β) εγκαθιδρύουν την ισοδυναμία μεταξύ του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου του σήματος $x'(t)$ (σειράς κρουστικών – δειγμάτων σήματος) και του *Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου* (*Discrete-Time Fourier Transform – DTFT*) της ακολουθίας $x[n]$ (τιμών δειγμάτων σήματος), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2(β) και ορίζεται στις παρακάτω σχέσεις.

$$\text{DTFT: } X(e^{j2\pi f_D}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f_D}, \quad \text{IDTFT: } x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi f_D}) e^{j2\pi n f_D} df_D \quad (1.2)$$

Μεταξύ των συχνοτήτων συνεχούς και διακριτού πεδίου ισχύει ο απλή κανονικοποίηση $f_D = fT_s = f/F_s$. Στο Παράρτημα Π1.2 συνοψίζονται οι βασικότερες ιδιότητες του DTFT.

1.2.2 Ανακατασκευή του σήματος συνεχούς χρόνου – Μετατροπή D/A

Η διαδικασία ανακατασκευής του αναλογικού σήματος από το ψηφιακό του ισοδύναμο δείχνεται στο παρακάτω σχήμα. Ένας μετατροπέας *Digital-to-analog (D/A)* παράγει στενούς παλμούς (ιδανικά, κρουστικές συναρτήσεις) ενέργειας ανάλογης των τιμών του σήματος διακριτού χρόνου. Η διέλευση της παραγόμενης παλμοσειράς μέσω βαθυπερατού φίλτρου (*Low-Pass Filter – LPF*) κατάλληλου εύρους διέλευσης W ($f_0 \leq W < F_s/2$) δίνει το αρχικό, αναλογικό σήμα.



Σχήμα 1.3: Ανακατασκευή σήματος συνεχούς χρόνου από την παράσταση διακριτού χρόνου

Μαθηματικά η διαδικασία αυτή αναλύεται ως εξής:

Η κρουστική απόκριση βαθυπερατού φίλτρου συχνότητας αποκοπής W , είναι η *συνάρτηση δειγματοληψίας* (*sampling function*) με πρώτο μηδενισμό στη θέση $1/(2W)$

$$\delta(t) \xrightarrow{LPF} h_w(t) = A \frac{\sin(2\pi W t)}{2\pi W t} \quad (1.3)$$

Λόγω της γραμμικής και χρονικά σταθερής συμπεριφοράς του βαθυπερατού φίλτρου, η απόκρισή του στην παλμοσειρά $x'(t)$ είναι μια σειρά από sampling functions αντίστοιχων υψών. Αν επιλέξουμε τη συχνότητα αποκοπής του φίλτρου ίση με $F_s/2 = 1/2T_s$, τότε είναι

$$\hat{x}(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_{F_s/2}(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT_s)/T_s]}{\pi(t - nT_s)/T_s} \quad (1.4)$$

Η σχέση (1.4) περιγράφει μια εξιδανικευμένη ανακατασκευή του αρχικού σήματος με παρεμβολή (interpolation) συνεχούς χρόνου, όπως φαίνεται σχηματικά στο παράδειγμα του σχ. 1.4 της επομένης παραγράφου. Δύο είναι οι εξιδανικεύσεις στο σχήμα 1.3: οι κρουστικές συναρτήσεις στην έξοδο του D/A και το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο. Σε επόμενη παράγραφο θα δοθούν εναλλακτικές, πρακτικές υλοποιήσεις ανακατασκευής. Συναφείς είναι επίσης οι διαδικασίες της παρεμβολής διακριτού χρόνου ή πύκνωσης του πλέγματος δειγματοληψίας, και της αραίωσης (*decimation*) που εξετάζονται σε επόμενη παράγραφο.

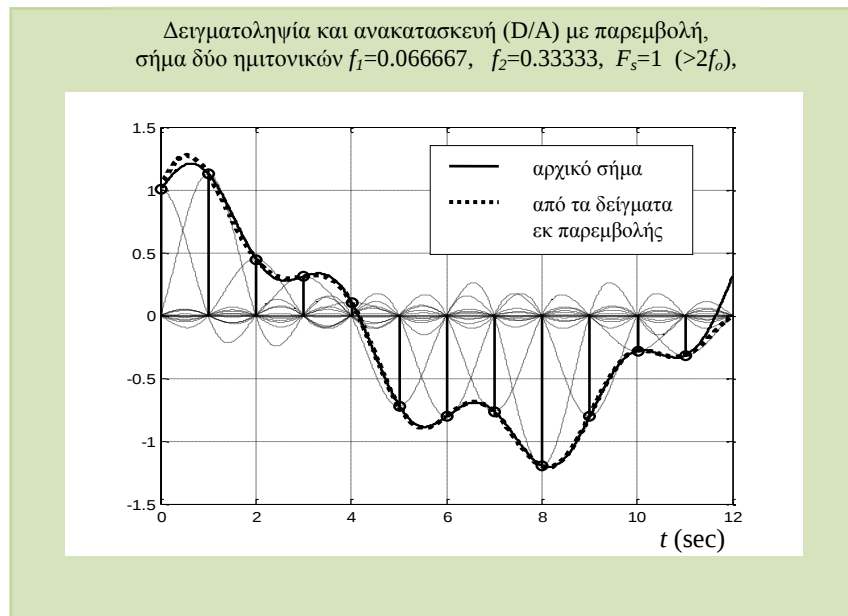
1.2.3 Σφάλμα Επικάλυψης (Aliasing error)

Από το σχήμα 1.2 γίνεται φανερό ότι: αν η δειγματοληψία γίνει με συχνότητα μικρότερη του διπλασίου της ανώτερης συχνότητας f_o του σήματος (*υποδειγμάτιση – undersampling*, κάτω, δηλαδή, της συχνότητας Nyquist $f_N = 2f_o$), τότε εμφανίζονται στην περιοχή συχνοτήτων του σήματος «είδωλα» φάσματος από ανώτερες συχνότητες και δεν επιτρέπουν την ακριβή αποκατάσταση του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *επικάλυψη* (*aliasing*), το δε σφάλμα κατά την αποκατάσταση του αρχικού σήματος *σφάλμα επικάλυψης* (*aliasing error*).

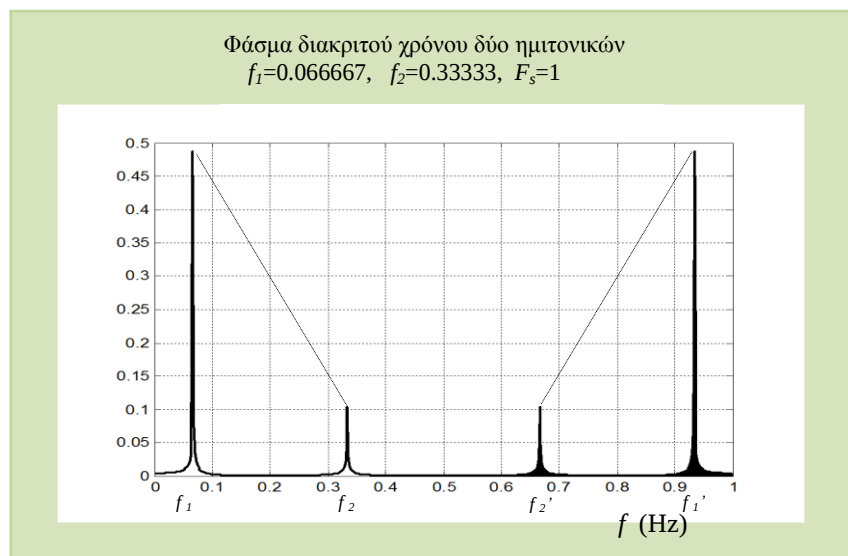
Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το σήμα δύο ημιτονικών στις συχνότητες $f_1 = 1/15$ Hz και $f_2 = 1/3$ Hz

$$x(t) = \cos(2\pi t/15) + 0.25\sin(2\pi t/3)$$

Η υψηλότερη συχνότητα του σήματος αυτού είναι η $f_o = f_2 = 1/3$. Επομένως, επιλέγοντας συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 1$ Hz ($> 2f_o$), μπορούμε να ανακτήσουμε χωρίς σφάλμα το αρχικό σήμα από τα δείγματά του, με βάση τη σχέση αναλογικής παρεμβολής (1.4), όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.4a (η μικρή απόκλιση στην αρχή και στο τέλος του διαστήματος, οφείλεται στις οριακές συνθήκες μηδενισμού του σήματος έξω από το εν λόγω διάστημα).



(α)

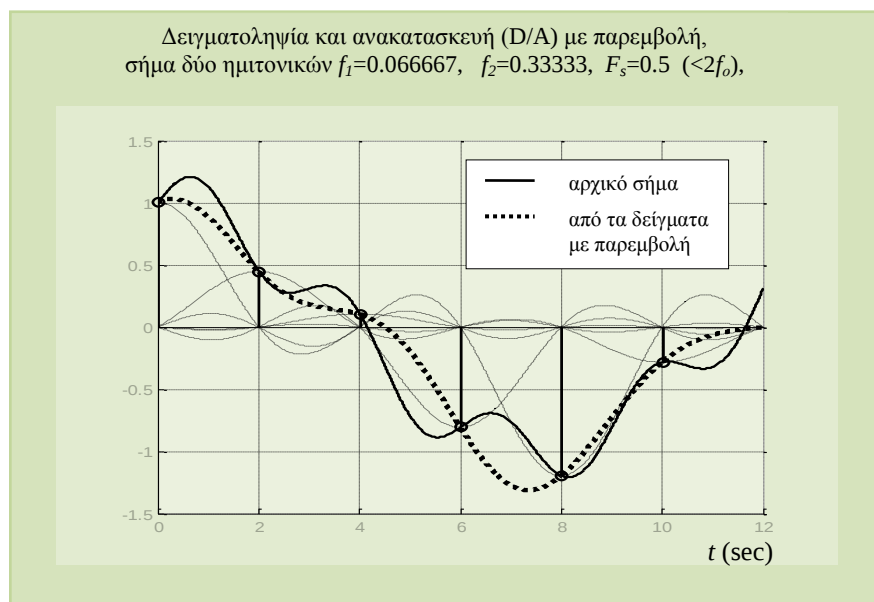


(b)

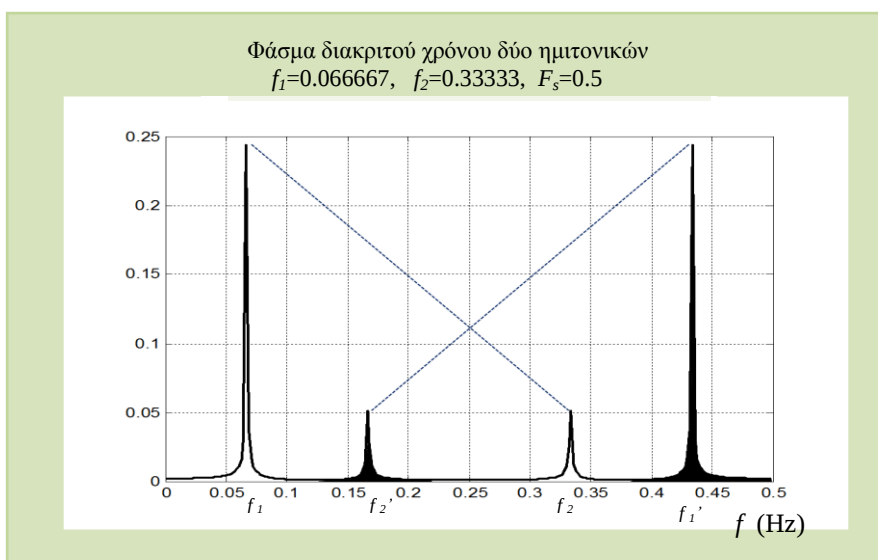
Σχήμα 1.4: (α) Δειγματοληψία και ανακατασκευή αναλογικού σήματος με παρεμβολή συνεχούς χρόνου
(b) φάσμα σήματος διακριτού χρόνου

Εάν, αντί της $F_s=1$, επιλεγεί συχνότητα δειγματοληψίας ίση με 0.5 Hz ($<2f_o$), οι συνθήκες Nyquist δεν ικανοποιούνται πλέον, με αποτέλεσμα να παρατηρείται

σφάλμα επικάλυψης (aliasing) κατά την ανακατασκευή του σήματος (σχ. 1.5a). Στο πεδίο συχνότητας εμφανίζονται είδωλα φάσματος εντός της βασικής ζώνης $[0, F_s/2) = [0, 0.25)$. Συγκεκριμένα, παραμένει η χαμηλή συχνότητα $f_1=0.0666$, εμφανίζεται όμως και η $f_2'=0.5-f_2=0.1666$, ενώ η f_2 βρίσκεται πλέον εκτός βασικής ζώνης.



(a)



(b)

Σχήμα 1.5: Επικάλυψη – aliasing (a) πεδίο χρόνου - σφάλμα επικάλυψης
 (b) πεδίο συχνότητας (με «είδωλο» φάσματος στη βασική ζώνη)

1.2.4 Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων [6],[7]

Ως ζωνοπερατά σήματα ορίζονται εκείνα των οποίων το φάσμα περιορίζεται σε μια ζώνη συχνοτήτων μακράν της μηδενικής. Τέτοια σήματα προκύπτουν με διαμόρφωση άλλων, βασικής ζώνης, προκειμένου αυτά να μεταδοθούν σε συγκεκριμένο, διαθέσιμο δίαυλο.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να διακριτοποιήσουμε το ζωνοπερατό σήμα $s_{bp}(t)$, εύρους ζώνης $W=f_h-f_l$, αρκετά στενού σε σχέση με την ανώτερη συχνότητα f_h , δηλαδή

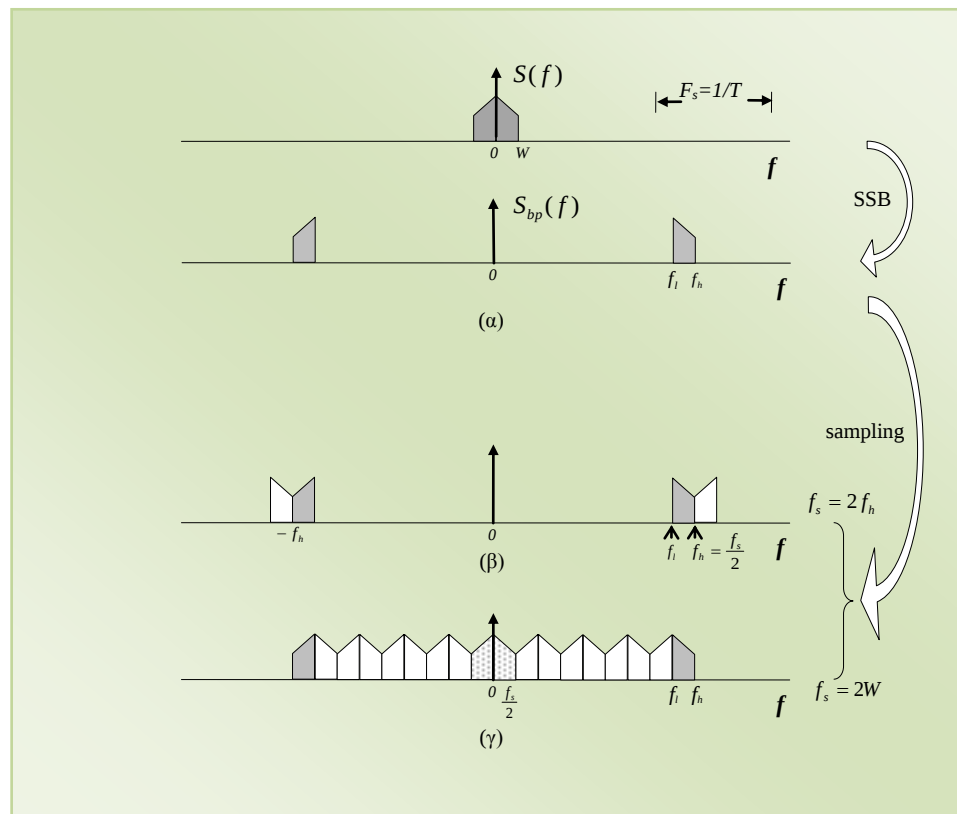
$$f_h = nW, \quad n \gg 1 \quad (1.5)$$

Μπορούμε να υποθέσουμε πιο συγκεκριμένα ότι το $s_{bp}(t)$ προήλθε από σήμα βασικής ζώνης $[0, W]$ με διαμόρφωση πλάτους μονής πλευρικής (SSB), η οποία απλά μετατόπιζε το φάσμα του στην περιοχή $[F_c=f_l, f_h]$ (σχ. 1.6-α).

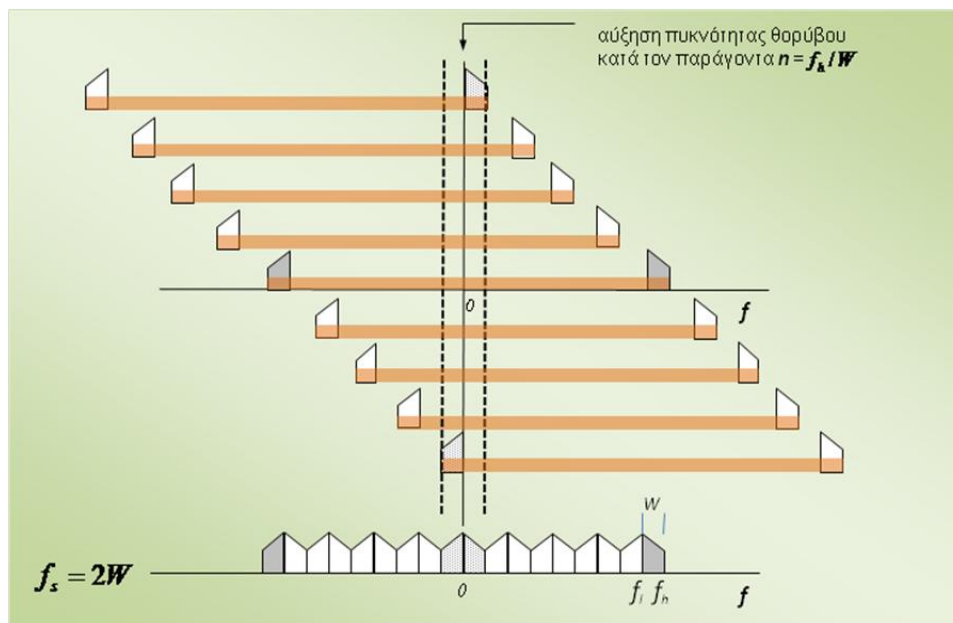
Για ένα οποιοδήποτε σήμα του οποίου το φάσμα εκτείνεται μέχρι τη συχνότητα f_h , η απαιτούμενη συχνότητα δειγματοληψίας, f_s , προκειμένου να μην υπάρχει επικάλυψη (aliasing) θα έπρεπε να είναι ίση με τουλάχιστον $2f_h$ (σχ. 1.6(β)). Στη συγκεκριμένη όμως περίπτωση αρκεί συχνότητα ίση με $2W$, για να δώσει μη επικαλυπτόμενα είδωλα φάσματος, ένα εκ των οποίων εμπίπτει στην αρχική περιοχή βασικής ζώνης, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.6(γ). Ας επισημανθεί ότι το n της σχέσης (1.5) πρέπει να είναι περιττό, έτσι ώστε στη βασική ζώνη να έχουμε κανονικό είδωλο φάσματος, και όχι κατοπτρικό, όπως συμβαίνει με άρτιο n . Στο παράδειγμα του σχήματος 1.6 είναι $n=9$.

Μια τέτοια υποδειγμάτιση ζωνοπερατών σημάτων είναι εξαιρετικά χρήσιμη στις περιπτώσεις διαμόρφωσης στην περιοχή των GHz, όπως των σημάτων κινητών επικοινωνιών, ιδιαίτερα τρίτης γενιάς και πλέον (1.8 GHz) και των συστημάτων Wi-Fi και WiMAX (> 2.4 GHz). Η κανονική δειγματοληψία Nyquist αυτών των σημάτων θα έδινε Gigasamples per second, τα οποία θα ήταν αδύνατον να διαχειριστούμε (ήτοι να αποθηκεύσουμε ή και επεξεργαστούμε).

Υπάρχει ωστόσο ένα πρόβλημα: αυτό του θορύβου. Εάν το φάσμα του θορύβου εκτείνεται σε όλη τη ζώνη $[0, f_h]$, τότε η υποδειγμάτιση με συχνότητα $f_s=2W=2f_h/n$ θα προκαλέσει την υπέρθεση στη βασική ζώνη n ειδώλων θορύβου, με αποτέλεσμα τη χειροτέρευση της σηματοθορυβικής σχέσης κατά $10\log n$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.6(δ). Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να προηγηθεί της δειγματοληψίας κατάλληλο ζωνοπερατό φιλτράρισμα του σήματος στην περιοχή f_h-f_l (βλ σχετικό επεξεργασμένο παράδειγμα 1.3).



Σχήμα 1.6(α),(β),(γ): Δειγματοληψία ζωνοπερατού σήματος

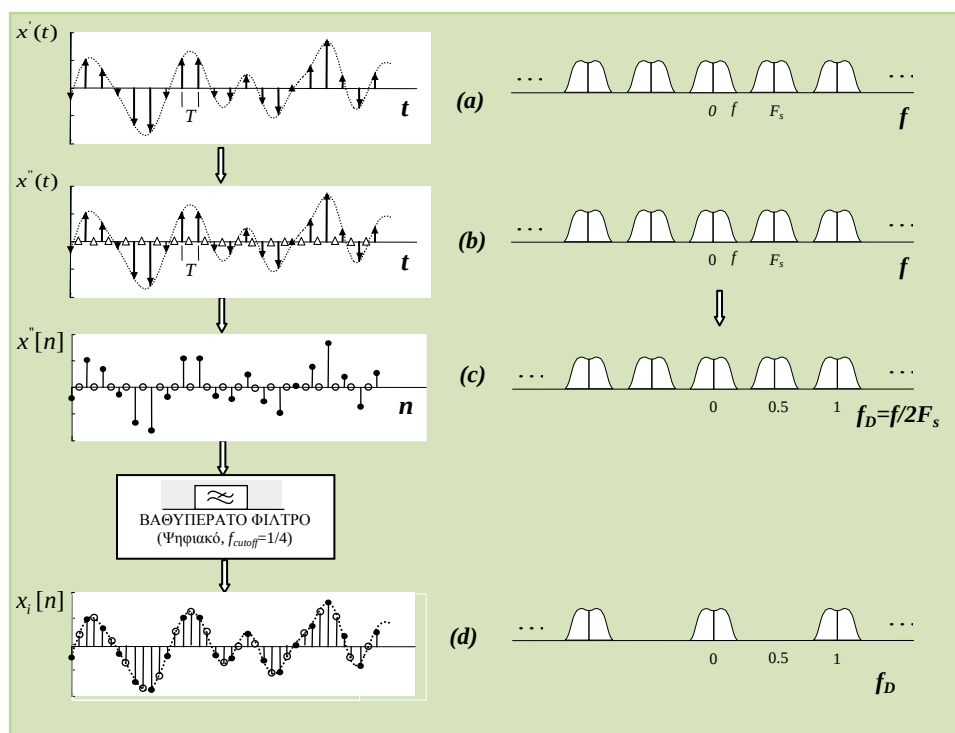


Σχήμα 1.6(δ): Το πρόβλημα του θορύβου

1.2.5 Διακριτή Παρεμβολή & Αραίωση - Πολυ-ρυθμικά συστήματα (multirate systems) [2],[3]

Πολλές φορές υπάρχει η ανάγκη αλλαγής της πυκνότητας του πλέγματος δειγματοληψίας, είτε προς τα πάνω (πύκνωση) είτε προς τα κάτω (αραίωση). Αυτό μπορεί να γίνει απ' ευθείας στο ψηφιακό σήμα, χωρίς την ενδιάμεση ανακατασκευή του σήματος συνεχούς χρόνου.

Παράδειγμα πύκνωσης κατά δύο (παρεμβολής, δηλαδή, ενός δείγματος μεταξύ γειτονικών δειγμάτων του αρχικού σήματος) δείχνεται στο σχ. 1.7, με τις αντίστοιχες φασματικές μεταβολές στη δεξιά πλευρά του σχήματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι το «ψηφιακό» φάσμα του σήματος $x_i[n]$ (μετά την παρεμβολή, ζεύγος (d) στο σχήμα 1.7) είναι συμπιεσμένο στο μισό σε σχέση με αυτό του αρχικού σήματος, λόγω της αναγωγής ως προς διπλάσια συχνότητα δειγματοληψίας.



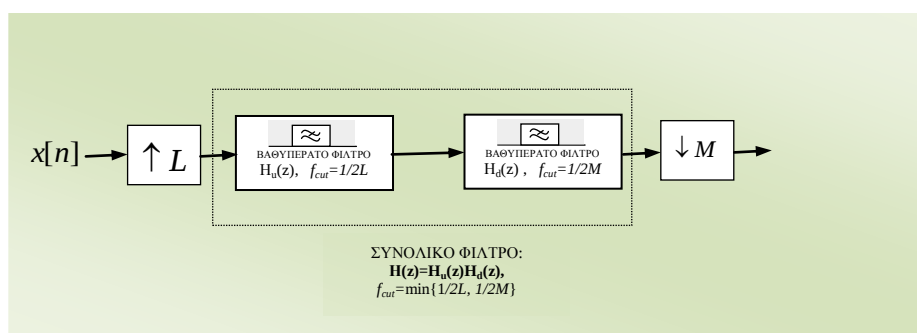
Σχήμα 1.7: Πύκνωση κατά 2 πλέγματος δειγματοληψίας σήματος

Αντίστροφη είναι η διαδικασία της αραίωσης (*decimation*), κατά την οποία παραλείπονται δείγματα από το αρχικό σήμα, με την προϋπόθεση ότι το νέο αραιωμένο πλέγμα δεν δημιουργεί σφάλμα επικάλυψης, διαφορετικά θα πρέπει να προηγηθεί κατάλληλο βαθυπερατό φιλτράρισμα.

Η διαδικασία του σχ. 1.7 γενικεύεται για πύκνωση κατά $L > 2$, με παρεμβολή $L-1$ δειγμάτων μεταξύ γειτονικών του αρχικού σήματος. Το βαθυπερατό φίλτρο που θα δώσει το τελικό σήμα $x_i[n]$ είναι ένα L^{th} -band φίλτρο (*half-band*, για $L=2$, όπως στο σχ. 1.7) εκ του γεγονότος ότι έχει συχνότητα αποκοπής $1/2L$.

Μια ειδική κατηγορία τέτοιων φίλτρων, τα οποία δεν αλλοιώνουν τα δείγματα του αρχικού σήματος, είναι τα φίλτρα Nyquist. Η κρουστική απόκριση αυτών των φίλτρων έχει μηδενική τιμή στα σημεία του αρχικού πλέγματος (ή στα σημεία kL του τελικού πλέγματος). Τα φίλτρα Nyquist θα τα ξανασυναντήσουμε κατά τη συζήτηση της μετάδοσης παλμών με μηδενική παρεμβολή μεταξύ τους.

Τέλος, μπορεί να γίνει αλλαγή της πυκνότητας πλέγματος κατά οποιονδήποτε ρητό παράγοντα L/M (αλλαγή, δηλαδή, της συχνότητας δειγματοληψίας από F_s σε $F_s \frac{L}{M}$), με συνδυασμό πύκνωσης κατά L και αραίωσης κατά M , όπως δείχνει το σχ. 1.8. Πρακτική εφαρμογή τέτοιων διατάξεων έχουμε στα λεγόμενα πολυ-ρυθμικά συστήματα (*multirate systems*).



Σχήμα 1.8: Αλλαγή πλέγματος δειγματοληψίας – συνδυασμός πύκνωσης και αραίωσης

1.2.6 Δειγματοληψία στο πεδίο συχνότητας – Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT)

Είδαμε ότι η δειγματοληψία σήματος συνεχούς χρόνου δημιουργεί στο πεδίο συχνοτήτων άπειρα είδωλα φάσματος σε αποστάσεις ίσες με τη συχνότητα δειγματοληψίας, F_s . Υπό συγκεκριμένες συνθήκες (Nyquist), τα είδωλα αυτά δεν επικαλύπτονται και η αντίστροφη διαδικασία D/A δίνει το αρχικό σήμα χωρίς σφάλμα επικάλυψης. Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) συσχετίζει το διακριτό σήμα με το φάσμα του στη βασική περιοχή συχνοτήτων, που σε ανηγμένη (ως προς F_s) κλίμακα είναι το διάστημα $[-1/2, 1/2]$.

Για μια πλήρως ψηφιοποιημένη διαδικασία υπολογισμών, απαιτείται ψηφιοποίηση και στο πεδίο συχνοτήτων. Κατ' αναλογία προς τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου, η δειγματοληψία στο πεδίο συχνότητας σε πλέγμα σημείων $\{k/\tau_s\}$ προκαλεί τη δημιουργία ειδώλων σήματος σε χρονικό πλέγμα $\{k\tau_s\}$. Για να μην υπάρξει επικάλυψη (στο πεδίο του χρόνου πλέον) θα πρέπει η διάρκεια του σήματος, έστω τ , να είναι πεπερασμένη και μάλιστα μικρότερη του τ_s ($\tau < \tau_s$). Ο μετασχηματισμός που συνδέει τα δύο διακριτά πεδία είναι ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform- DFT) και ορίζεται ως εξής:

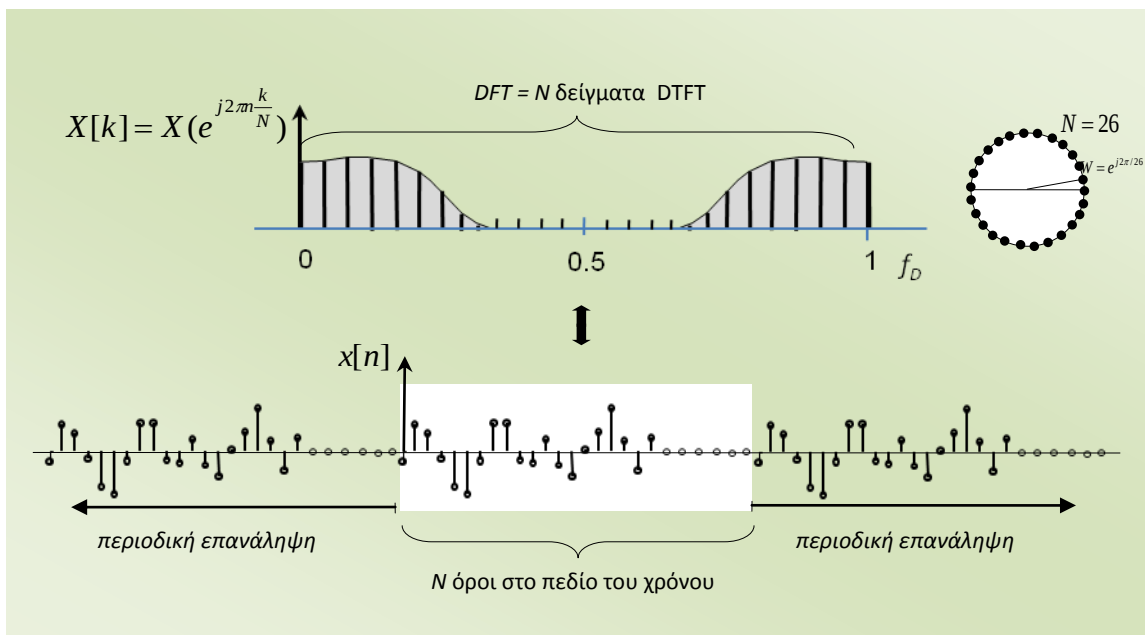
$$\mathcal{DFT}: \quad X[k] \equiv \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k \in [0, N-1], \quad W_N \equiv e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (1.6\alpha)$$

$$\mathcal{IDFT}: \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \quad n \in [0, N-1], \quad W_N \equiv e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (1.6\beta)$$

Είναι προφανές ότι ο DFT συνίσταται στη δειγματοληψία του $DTFT$ σε N ισαπέχοντα σημεία στην (ανηγμένη) περιοχή συχνοτήτων $[0, 1)$:

$$\mathcal{DFT} \equiv \mathcal{DTFT}|_{f_D = k/N}: \quad X[k] = X(e^{j2\pi f_D}) \Big|_{f_D = \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f_D n} \Big|_{f_D = \frac{k}{N}} \quad (1.6\gamma)$$

Σχηματικά, η δειγματοληψία του $DTFT$ και η σχέση του με τον DFT , δείχνεται στο σχήμα 1.9.



Σχήμα 1.9: $DTFT$ και DFT

Ο υπολογισμός του DFT (και του αντιστρόφου του, $IDFT$) απαιτεί εν γένει N^2 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και $N(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις. Όμως έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι γρήγορου υπολογισμού (με $M \log_2 N$ πράξεις) που ονομάζονται *Fast Fourier Transforms (FFT)*.

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι για σήματα πραγματικών τιμών, υπάρχει συμμετρία ως προς το μηδέν στο πεδίο συχνότητας, και, στις περιπτώσεις αυτές, αρκούν μόνον $N/2$ (μιγαδικά) δείγματα.

1.2.7 Ο Μετασχηματισμός Z

Ο μετασχηματισμός Z είναι κατά βάση μια γενίκευση του *DTFT*, μετασχηματίζοντας το διακριτού χρόνου σήμα σε μια μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού όλο το μιγαδικό επίπεδο, και όχι μόνον την μοναδιαία περιφέρεια $e^{j2\pi f}$. Συγκεκριμένα ορίζεται ως

$$\text{Μετασχηματισμός Z:} \quad X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (1.7\alpha)$$

$$\text{και προφανώς} \quad X(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} = \text{DTFT}\{x[n]\} \quad (1.7\beta)$$

Ο μετασχηματισμός Z αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την παράσταση και υλοποίηση διακριτών συστημάτων και σημάτων. Έτσι ένα ψηφιακό φίλτρο δίνεται με τη συνάρτηση μεταφοράς του στο πεδίο Z, όπως θα αναλυθεί περαιτέρω στην επόμενη παράγραφο.

1.2.8 Σχέση μετασχηματισμών FT-DTFT-DFT-Z

Συνοψίζοντας τη σχέση των μετασχηματισμών Fourier, Discrete-Time Fourier, Discrete Fourier κα.ζ έχουμε:

- Ο μετασχηματισμός Fourier συσχετίζει τα δύο συνεχή πεδία. Δίνει, δηλαδή, το συνεχές φάσμα συνεχών σημάτων. Δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στο πλέγμα $\{nT_s\}$ δίνει περιοδική επανάληψη του συνεχούς φάσματος στο πλέγμα $\{n/T_s\}$. Δεν έχουμε επικάλυψη στο πεδίο συχνοτήτων όταν το φάσμα του σήματος περιορίζεται σε συχνότητες κάτω της $1/(2T_s)$.
- Ο *DTFT* συσχετίζει το διακριτό πεδίο χρόνου με το συνεχές πεδίο συχνοτήτων, στην κανονικοποιημένη περιοχή $[0, 1)$. Προκύπτει δηλαδή από τον *FT* του διακριτοποιημένου σήματος, αφού τεθεί $T_s=1$.
- Δειγματοληψία στο πεδίο συχνοτήτων στο πλέγμα $\{k/T_s\}$ δίνει περιοδική επανάληψη στο πεδίο του χρόνου στο πλέγμα $\{kT_s\}$. Δεν έχουμε επικάλυψη στο πεδίο του χρόνου αν το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας μικρότερης του T_s .
- Ο *DFT* συσχετίζει τα δύο διακριτά πεδία: σήμα N δειγμάτων με φάσμα N δειγμάτων (δειγματοληψίας του *DTFT*).
- Οι *FFT* είναι αλγόριθμοι γρήγορου υπολογισμού του *DFT*.
- Για την αντίστροφη μετάβαση, δηλαδή από τους διακριτούς μετασχηματισμούς (*DTFT* και *DFT*) στον μετασχηματισμό Fourier φυσικής κλίμακας χρόνου και συχνότητας, αρκεί να καθοριστεί επιπλέον η συχνότητα

δειγματοληψίας $F_s = 1/T_s$, οπότε καθορίζεται: τόσο η διάρκεια σήματος, $\tau = NT_s$, όσο και το εύρος συχνοτήτων του φάσματός του, $(0, F_s)$.

- Ο *DTFT* προκύπτει από τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Z στη μοναδιαία μιγαδική περιφέρεια ($z = e^{j2\pi f_D}$) και ο *DFT* σε N διακριτά σημεία επί της περιφέρειας αυτής ($z = e^{j2\pi k/N}$).
- Ο *DTFT* προκύπτει από τον *DFT* με παρεμβολή, όπως ακριβώς και το συνεχές σήμα από τα δείγματά του.

1.3 Ψηφιακά Φίλτρα

Φίλτρο στην ορολογία των σημάτων και συστημάτων είναι οποιοσδήποτε μηχανισμός ή σύστημα, σε υλικό ή λογισμικό, που σκοπό έχει την απόρριψη ανεπιθύμητων σημάτων ή απλώς το διαχωρισμό σημάτων. Αν και ο ορισμός αυτός είναι γενικός, συνήθως οι προδιαγραφές διαχωρισμού ή απόρριψης τίθενται στο πεδίο συχνοτήτων με αποτέλεσμα να έχουμε τις γνωστές κατηγορίες φίλτρων: βαθυπερατά, υψιπερατά, ζώνης διέλευσης ή ζώνης αποκλεισμού.

Από τις πρώτες εφαρμογές της ψηφιακής τεχνολογίας ήταν η υλοποίηση ψηφιακών φίλτρων, τα οποία δέχονται στην είσοδό τους ψηφιοποιημένα σήματα και δίνουν στην έξοδο «φιλτραρισμένα» σήματα, πάλι σε ψηφιακή μορφή. Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση ψηφιακών φίλτρων κάθε κατηγορίας είναι πλέον ένας καλά εδραιωμένος τομέας της επεξεργασίας σημάτων [3],[4].

1.3.1 Μαθηματική περιγραφή και υλοποίηση

Κατ' αντιστοιχία της περιγραφής των αναλογικών φίλτρων μέσω διαφορικών εξισώσεων, η γενική μαθηματική περιγραφή ενός γραμμικού, χρονικά σταθερού (*Linear, Time Invariant – LTI*) ψηφιακού φίλτρου είναι μέσω μιας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y[n] + \sum_{k=1}^N d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M p_k x[n-k] \quad (1.8)$$

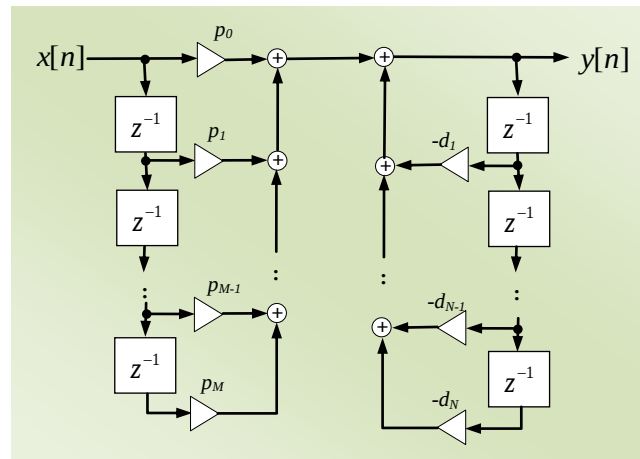
ή, ισοδύναμα, της συνάρτησης μεταφοράς στο πεδίο του μετασχηματισμού Z :

$$H(z) \equiv \frac{Z\{y\}}{Z\{x\}} = \frac{\sum_{k=0}^M p_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N d_k z^{-k}} \quad (1.9)$$

Για την (1.9) πρέπει να διασφαλιστούν κατάλληλες συνθήκες ευστάθειας: οι πόλοι της πρέπει να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Όπως αναφέρθηκε και στη σχετική παράγραφο για το μετασχηματισμό Z , η απόκριση συχνότητας του φίλτρου προκύπτει από τον υπολογισμό της $H(z)$ πάνω στη μοναδιαία περιφέρεια (αν θέσουμε δηλαδή όπου z το $e^{j2\pi f}$). Αυτό σημαίνει ότι η μοναδιαία περιφέρεια θα πρέπει να βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης της $H(z)$, ήτοι να περικλείει τους πόλους της.

Αν έχουμε διαθέσιμη την εξίσωση διαφορών (1.8), η υλοποίηση του φίλτρου είναι προφανής, σε λογισμικό είτε σε υλικό, όπως δείχνεται στο σχ. 1.10. Άλλες εναλλακτικές υλοποιήσεις που βελτιστοποιούν επιμέρους χαρακτηριστικά, είναι δυνατές [3, sec. 8.4]. Στην πράξη, όμως, η (1.8) δεν είναι γνωστή. Όπως προαναφέρθηκε, δίνονται συνήθως φασματικές προδιαγραφές πλάτους (ενίσχυσης ή

απόσβεσης περιοχών συχνοτήτων) και ο σχεδιαστής καλείται να βρεί μια εξίσωση στη μορφή (1.8) ή μια συνάρτηση του τύπου (1.9) που να τις προσεγγίζει, όπως σκιαγραφείται στις επόμενες παραγράφους.



Σχήμα 1.10: Δομή άμεσης υλοποίησης φίλτρου με συνάρτηση μεταφοράς όπως στην (1.9)

1.3.2 Φίλτρα FIR και IIR

Μια γενική κατηγοριοποίηση των ψηφιακών φίλτρων είναι σε *φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης* (*Finite Impulse Response – FIR*) και σε *φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης* (*Infinite Impulse Response – IIR*). Σύμφωνα με την τυποποίηση των σχέσεων (1.8) και (1.9), η συνάρτηση μεταφοράς των *FIR* έχει παρονομαστή 1 (απουσιάζει το δεξιό μισό τμήμα στη δομή του σχήματος 1.10), επομένως η έξοδος είναι απλά ένας γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου αριθμού δειγμάτων εισόδου. Εξ αυτού, το μεγάλο πλεονέκτημα των *FIR* φίλτρων είναι η διασφαλισμένη ευστάθεια και η απολύτως γραμμική φάση (εφ' όσον η κρουστική απόκριση είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική ως προς το μέσον της), ιδιότητες στις οποίες οφείλεται και η ευρεία χρήση τους στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα. Μειονέκτημα αποτελεί η ανάγκη για μεγάλο μήκος φίλτρου (άρα η αυξημένη υπολογιστική ισχύς και η μεγάλη καθυστέρηση ομάδας – ίση με το μισό μήκος του φίλτρου) για επιθυμητή προσέγγιση της απόκρισης πλάτους. Τα *IIR*, αντίθετα, μπορούν να πετύχουν πολύ καλή προσέγγιση της επιθυμητής απόκρισης πλάτους με μικρό σχετικά μέγεθος (μικρά N και M στην (1.8)), όμως δεν έχουν εξασφαλισμένη ευστάθεια ούτε γραμμική φάση, με αποτέλεσμα να εισάγουν παραμορφώσεις.

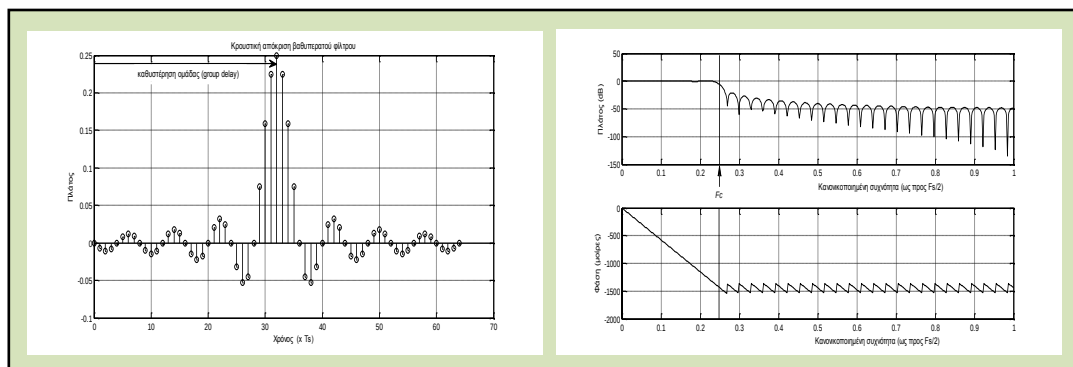
1.3.3 Σχεδιασμός *FIR* φίλτρων

Τα ιδανικά φίλτρα διέλευσης/αποκοπής ζωνών συχνότητας (βαθυπερατά, ζωνοπερατά κλπ) είναι μη πραγματοποιήσιμα. Γενικά, είναι γνωστό ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε ζεύγη μετασχηματισμού Fourier πεπερασμένου μήκους και στα δύο πεδία [1 p. 111]. Ξεκινώντας, λοιπόν, από ιδανικές προδιαγραφές διέλευσης/αποκοπής,

οδηγούμαστε σε απείρου μήκους κρουστικές αποκρίσεις, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι μόνον προσεγγιστικές *FIR* υλοποιήσεις μπορούμε να έχουμε.

1.3.3.1 Σχεδιασμός *FIR* φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων

Εάν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση ενός ιδανικού φίλτρου (π.χ. αναλυτικά ή μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού), ένας εύκολος τρόπος *FIR* υλοποίησης είναι με άμεση περικοπή της διαθέσιμης κρουστικής απόκρισης σε πεπερασμένο μήκος, L , συμμετρικά ως προς το μηδέν. Επειδή, βεβαίως, ένα πραγματικό σύστημα είναι και αιτιατό (έχει μηδενική έξοδο, πριν την εφαρμογή οποιασδήποτε διέγερσης), εισάγουμε μια καθυστέρηση ομάδας (group delay), με ολίσθηση της κρουστικής απόκρισης προς τα δεξιά κατά το μισό της μήκος. Αυτό, στο πεδίο συχνότητας, ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό της προσεγγιζόμενης συνάρτησης πλάτους με τον όρο $e^{j2\pi f(L-1)/2}$. Στο σχήμα 1.3.2 δείχνεται περικομμένη η κρουστική απόκριση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου ($F_{cutoff} = 0.125F_s$) και η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας. Παρατηρούμε υψηλούς πλευρικούς λοβούς, πράγμα που αποτελεί και το βασικό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου. Η εξήγηση είναι απλή: περικοπή της κρουστικής απόκρισης είναι πρακτικά πολλαπλασιασμός της με ορθογωνικό χρονικό παράθυρο. Στο πεδίο συχνότητας αυτό ισοδυναμεί με συνέλιξη της προσεγγιζόμενης ιδανικής συνάρτησης με τη συνάρτηση δειγματοληψίας, $\frac{\sin \pi L f}{\pi L f}$, της οποίας πράγματι οι πλευρικοί λοβοί παραμένουν για μεγάλο διάστημα υψηλοί και αυτό αντανακλάται, μέσω της συνέλιξης, και στην τελική απόκριση συχνότητας του φίλτρου.

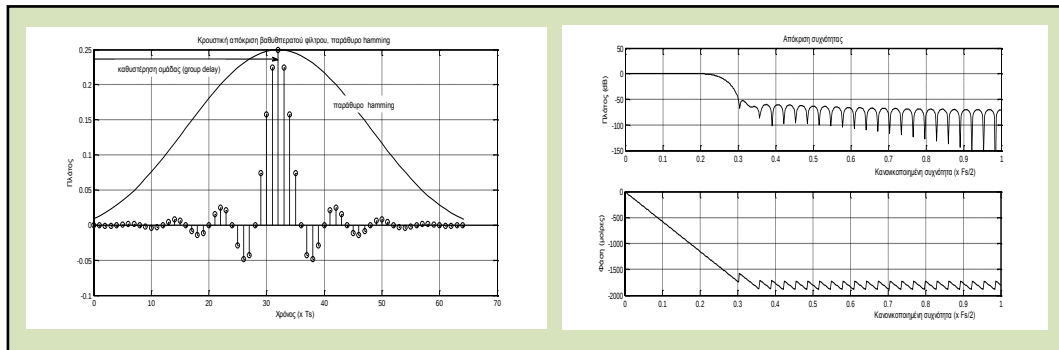


Σχήμα 1.11: Περικομμένη κρουστική απόκριση βαθυπερατού φίλτρου και απόκριση συχνότητας

Ένας τρόπος διόρθωσης του παραπάνω μειονεκτήματος των περικομμένων ιδανικών κρουστικών αποκρίσεων είναι η χρήση άλλων παραθύρων, αντί του ορθογωνικού, πολλά δε τέτοια έχουν προταθεί και χρησιμοποιούνται στην πράξη: hamming, Kaiser, κ.α. Στο σχήμα 1.12 δείχνονται οι αποκρίσεις (χρόνου και συχνότητας) του βαθυπερατού φίλτρου του σχ. 1.11, τώρα σχεδιασμένου με παράθυρο hamming. Στο αριστερό σχήμα έχει υπερτεθεί η συνάρτηση παραθύρου hamming (κωδωνοειδής).

Ο σχεδιασμός με παράθυρο Kaiser, ειδικότερα, είναι βέλτιστος, υπο την έννοια ότι η λαμβανόμενη πεπερασμένη κρουστική απόκριση έχει τη μικρότερη ενέργεια πέραν

μιας ορισμένης συχνότητας. Οι παρακάτω σχέσεις (1.10) δίνουν έναν εμπειρικό, παραμετρικό τρόπο υπολογισμού της τάξης του φίλτρου (μήκους κρουστικής απόκρισης), L , με βάση το ανεκτό εύρος μετάβασης, $\Delta f = f_s - f_p$, τη σχετική απόσβεση των πλευρικών λοβών, α , καθώς και την παράμετρο β που υπεισέρχεται στην αναλυτική σχέση υπολογισμού του παραθύρου $w_k[n]$.



Σχήμα 1.12 Κρουστική απόκριση και απόκριση συχνότητας βαθυπερατού φίλτρου, σχεδιασμένου με παράθυρο hamming

$$L = \frac{a - 8}{2.285\Delta\omega}$$

$$\Delta\omega = 2\pi(f_s - f_p)$$

$$a = -20\log_{10}\delta \quad (1.10\alpha)$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(a - 8.7) & a > 50 \\ 0.5842(a - 21)^{0.4} + 0.07886(a - 21) & 21 < a < 50 \\ 0 & a < 21 \end{cases}$$

$$w_k[n] = \frac{I_o(\beta\sqrt{1 - [2n/(L-1)]^2})}{I_o(\beta)}, \quad -\left(\frac{L-1}{2}\right) \leq n \leq \frac{L-1}{2} \quad (1.10\beta)$$

όπου $I_o(x)$ η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης.

1.3.3.2 Σχεδιασμός FIR ισοϋψών κυματώσεων (equiripple design)

Μια άλλη μέθοδος σχεδιασμού FIR φίλτρων, η οποία και έχει γίνει λίγο-πολύ de facto standard, είναι αυτή των ισοϋψών κυματώσεων, γνωστή και ως Parks-McClellan (από τα ονόματα των εμπνευστών της). Οδηγεί σε βέλτιστα φίλτρα κατά την έννοια της

μέσης τετραγωνικής απόκλισης από την επιθυμητή απόκριση. Τα φίλτρα που προκύπτουν παρουσιάζουν ισοϋψείς κυματώσεις τόσο στις ζώνες διέλευσης, όσο και στις ζώνες αποκοπής. Το μήκος των φίλτρων Parks-McClellan δύο ζωνών (π.χ. βαθυπερατών ή υψιπερατών) προσδιορίζεται από την παρακάτω εμπειρική σχέση

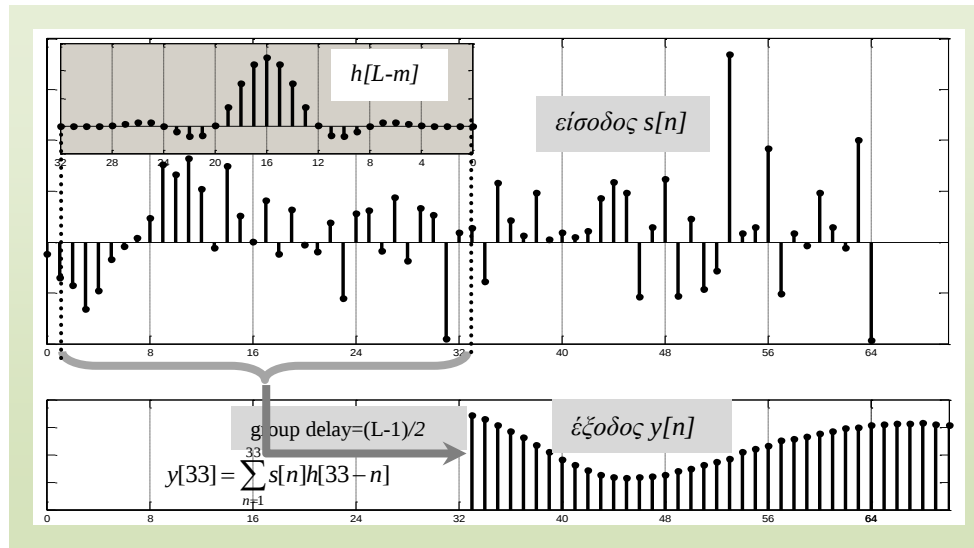
$$L = \frac{-10 \log_{10}(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324 \Delta \omega}, \quad \Delta \omega = 2\pi(f_s - f_p) \quad (1.11)$$

όπου δ_1 και δ_2 τα σχετικά ύψη των κυματώσεων στις δύο ζώνες.

Όλα τα γνωστά πακέτα σχεδιασμού ψηφιακών φίλτρων, του MATLAB συμπεριλαμβανόμενου, διαθέτουν έτοιμες συναρτήσεις παραθύρων και άλλων μεθόδων σχεδιασμού *FIR* φίλτρων. Στο εργαστηριακό μέρος του κεφαλαίου αυτού δίνονται επεξεργασμένα παραδείγματα με σχεδιασμό και χρήση τέτοιων φίλτρων.

1.3.4 Υλοποίηση FIR φίλτρων

Εφόσον έχει προσδιοριστεί η κρουστική απόκριση ενός φίλτρου και είναι πεπερασμένη, η έξοδος για συγκεκριμένο σήμα εισόδου δίνεται από τη συνέλιξη κρουστικής απόκρισης και εισόδου, όπως δείχνει το σχήμα 1.13.



Σχήμα 1.13 : Έξοδος FIR φίλτρου, ως η συνέλιξη της (πεπερασμένης) κρουστικής του απόκρισης, $h[n]$, με το σήμα εισόδου, $s[n]$

Πρακτικά, είναι άμεσα εφαρμόσιμη η γενική δομή υλοποίησης του σχ. 1.8 (περιορισμένη, βεβαίως, στο αριστερό μισό της). Άλλες υλοποιήσεις είναι επίσης δυνατές, όπως σε *τμήματα σειράς* (cascade form), αφού προηγηθεί παραγοντοποίηση

της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ σε πρωτοβάθμιους και δευτεροβάθμιους παράγοντες [3, sec. 8.3, p. 432].

Τα φίλτρα *FIR* γραμμικής φάσης, ειδικότερα, έχουν κρουστική απόκριση συμμετρική ή αντισυμμετρική ως προς το μέσον της, ισχύει δηλαδή:

$$h[n] = h[L - n], \quad \text{ή} \quad h[n] = -h[L - n] \quad (1.12)$$

Για τα φίλτρα αυτά, οι ίσοι (ή αντίθετοι) όροι της κρουστικής απόκρισης συνδυάζονται ανά δύο, με αποτέλεσμα να μειώνεται στο μισό ο αριθμός των απαιτούμενων πολλαπλασιαστών. Η *καθυστέρηση ομάδας* (*group delay*) που εισάγουν τα φίλτρα αυτά είναι ίση με το μισό του μήκους τους, $(L-1)/2$, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

Στο MATLAB, η συνάρτηση `conv(s, h)` δίνει τη συνέλιξη μεταξύ των διανυσμάτων s και h , υλοποιώντας έτσι το φίλτρο κρ. απόκρισης h στο σήμα s .

1.4 Ψηφιακή Φασματική Ανάλυση

Η *φασματική ανάλυση* σήματος συνίσταται στην επεξεργασία εκείνη που δίνει την κατανομή της ενέργειας του σήματος στις συχνότητες. Στο Παράρτημα Π1.4 δίνεται συνοπτικό θεωρητικό υπόβαθρο του ορισμού και των ιδιοτήτων του φάσματος σημάτων διαφόρων κατηγοριών (ενέργειας, ισχύος, ντετερμινιστικών ή στοχαστικών). Σε πρακτικό επίπεδο, οι αλγόριθμοι FFT αποτελούν το κατάλληλο εργαλείο της φασματικής ανάλυσης με ψηφιακό τρόπο. Χρειάζεται, ωστόσο, προσοχή, τόσο κατά την ψηφιοποίηση όσο και κατά τη μετέπειτα επεξεργασία, ώστε να μην εξαχθούν εσφαλμένα συμπεράσματα.

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα σήμα του οποίου ζητείται το φάσμα. Εάν δεν γνωρίζουμε το εύρος ζώνης του σήματος, θα πρέπει να το περάσουμε από αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο, αλλιώς υπάρχει ο κίνδυνος *aliasing* κατά τη δειγματοληψία, με εμφάνιση ειδώλων φάσματος από ανώτερες συχνότητες στη βασική ζώνη ενδιαφέροντος. Στη συνέχεια μπορούμε να προχωρήσουμε στην ψηφιοποίηση και την περαιτέρω επεξεργασία. Ο απευθείας υπολογισμός του FFT σε όλο το μήκος του σήματος παρουσιάζει ορισμένα προβλήματα: Πρώτον, για μεγάλα μήκη, είναι δαπανηρός σε υπολογιστική ισχύ και άλλους πόρους (μνήμη). Δεύτερον, δεν ενδείκνυται για επεξεργασία *on-line*, δηλαδή κατά τη στιγμή λήψης του σήματος και πριν αυτό είναι διαθέσιμο στην ολότητά του. Τέλος, ως εκτιμητής της φασματικής πυκνότητας δεν συγκλίνει, δεν μειώνεται δηλαδή η μεταβλητότητα (*variance*) της εκτίμησης σε συγκεκριμένη συχνότητα αυξανομένου του αριθμού των δειγμάτων σήματος. Για όλα τα προηγούμενα, και με την υπόθεση ότι οι στατιστικές ιδιότητες του υπό μελέτη σήματος δεν αλλάζουν με το χρόνο (το σήμα είναι *εργοδικό*), η μέθοδος που ακολουθείται συνήθως είναι αυτή του τεμαχισμού του σήματος σε τμήματα συγκεκριμένης διάρκειας (σε δύναμη του 2, ώστε να διευκολυνθεί ο FFT), ο υπολογισμός του φάσματος κάθε τμήματος (*περιοδογράμματος*) και ο υπολογισμός της μέσης τιμής του φάσματος των τμημάτων.

Επειδή, όμως, ο τεμαχισμός είναι στην ουσία πολλαπλασιασμός του σήματος με ορθογωνικό χρονικό παράθυρο, έχουμε στο πεδίο της συχνότητας όλα τα ανεπιθύμητα παρεπόμενα της συνέλιξης της ζητούμενης φασματικής απόκρισης με την sampling function, τα οποία είδαμε και κατά τη μελέτη των ψηφιακών φίλτρων. Το κυριότερο πρόβλημα είναι η «φασματική διαρροή» (spectral leakage), ο συνυπολογισμός δηλαδή στην ισχύ μιας συχνότητας και μέρους της ισχύος γειτονικών συχνοτήτων, στις οποίες απλώνονται οι υψηλοί πλευρικοί λοβοί της sampling function. Το πρόβλημα αυτό αμβλύνεται με τη χρήση κατάλληλων συναρτήσεων παραθύρων, όπως ακριβώς και κατά το σχεδιασμό ψηφιακών φίλτρων. Το τίμημα βεβαίως είναι ότι, λόγω του ευρύτερου κυρίου λοβού των μη ορθογωνικών παραθύρων, μειώνεται η διακριτική ικανότητα (ο διαχωρισμός, δηλαδή, πολύ κοντινών συχνοτήτων) σε σχέση με το ορθογωνικό παράθυρο.

Όλα τα πακέτα ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων διαθέτουν συναρτήσεις φασματικής ανάλυσης. Η `pwelch()` του MATLAB είναι μια τέτοια συνάρτηση. Τεμαχίζει το σήμα σε επικαλυπτόμενα τμήματα, για τα οποία υπολογίζει το φάσμα, αφού κάνει χρήση κατάλληλης (ή υποδεικνυόμενης) συνάρτησης παραθύρου. Στο τέλος υπολογίζει τη μέση τιμή των φασμάτων των τμημάτων [9].

1.5 Επεξεργασμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1 – Παραγωγή και μέτρηση θορύβου

A. Σε ημιτονικό σήμα να υπερτεθεί λευκός, γκαουσιανός θόρυβος ώστε $SNR=10\text{db}$. Να σχεδιαστεί το ιστόγραμμα των δειγμάτων θορύβου καθώς και τμήμα του θορυβώδους σήματος. Να επαληθευθεί η καθορισθείσα σηματοθορυβική σχέση. Να υπολογιστεί και σχεδιαστεί επίσης η φασματική πυκνότητα του θορυβώδους σήματος (α) με απ'ευθείας υπολογισμό του DFT (FFT) (β) με χρήση της συνάρτησης `pwelch()` του MATLAB. Τι παρατηρείτε ως προς τις δύο προσεγγίσεις;

B. Να παραχθεί στοχαστικό, μιγαδικό σήμα QAM 16 σημείων, $\tilde{u}[n] = x[n] + jy[n]$, $x[n], y[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$, ομοιόμορφης κατανομής. Να υπερτεθεί λευκός, γκαουσιανός θόρυβος και να δειχθεί το θορυβώδες σήμα στο μιγαδικό επίπεδο με τη βοήθεια της συνάρτησης `scatterplot()` του MATLAB για (α) $SNR=20\text{db}$, (β) $SNR=10\text{db}$.

Απάντηση

A. Η ισχύς διανύσματος σήματος $x[n]$, μήκους έστω N , είναι $P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x[n]|^2$.

Συνεπώς, η ισχύς ισομήκους διανύσματος θορύβου που ζητείται να παραχθεί θα

πρέπει να είναι ίση με $P_n = P_x 10^{-\frac{SNR}{10}}$, ή $[P_x(\text{dBW}) - SNR(\text{dB})] \text{ dBW}$.

Το παρακάτω τμήμα προγράμματος MATLAB υλοποιεί τις ζητούμενες λειτουργίες.

```
1. % Παραγωγή και επίδειξη θορυβώδους ημιτονικού σήματος
2. % καθορισμένου SNR
3. %
4. close all; clear all;
5. f0=100; % συχνότητα σήματος
6. Fs=8000; % συχνότητα δειγματοληψίας
7. t=0:1/Fs:2; % χρονικό πλέγμα δειγματοληψίας, διάρκειας 2 sec
8. N=length(t);
9. x=sqrt(2)*sin(2*pi*f0*t); % διάνυσμα δειγμάτων ημιτονικού σήματος
10. Px=sum(x.^2)/N % ισχύς σήματος: περίπου 1 watt (0 dBW)
11. n=wgn(1,N,-10); % διάνυσμα δειγμάτων λευκού γκαουσιανού θορύβου
12. Pn= sum(n.^2)/length(n) % ισχύς θορύβου: περίπου 0.1 (-10 dBW)
13. % Υπολογισμός και σχεδίαση ιστογράμματος
14. [m,H]=hist(n,30);
15. figure; bar(H,m/length(n));
16. y=x+n; % το θορυβώδες σήμα
17. figure;
18. plot(t(1:500),y(1:500)); % Σχεδίαση τμήματος θορυβώδους σήματος
19. % Φασματική ανάλυση θορυβώδους σήματος
20. figure; pwelch(y,[],[],[],Fs);
21. h=fft(y)/sqrt(N);
22. figure; plot(20*log10(abs(h)));
```

Κώδικας 1.1

Β. Το παρακάτω τμήμα προγράμματος (Κώδικας 1.2) παράγει αναλυτικό σήμα QAM με δείγματα ομοιόμορφα κατανομημένα σε 16 σημεία του μιγαδικού επιπέδου $\{(\pm 1, \pm 3) + j(\pm 1, \pm 3)\}$, καθώς και λευκό, γκαουσιανό θόρυβο για το ζητούμενο SNR, τον οποίο και υπερθέτει στο σήμα. Ας σημειωθεί ότι οι ισχύεις των δύο συνιστωσών (συμφασικής και εγκάρσιας), σήματος ή θορύβου, δίνουν αθροιζόμενες τη συνολική ισχύ του μιγαδικού σήματος (ή θορύβου, αντίστοιχα). Το αποτέλεσμα, δηλαδή, της γραμμής 11 του κώδικα ισούται με το άθροισμα των αποτελεσμάτων των γραμμών 9 και 10. Ως αποτέλεσμα αυτού, η σηματοθορυβική σχέση ισχύει η ίδια τόσο για την κάθε μια συνιστώσα χωριστά, όσο και για το μιγαδικό σήμα.

```

1. % Παραγωγή αναλυτικού σήματος QAM (βασικής ζώνης)
2. %
3. clear all; close all;
4. N=30000; % αριθμός δειγμάτων σήματος
5. SNR=20; % SNR για κάθε μια από τις δύο εγκάρσιες συνιστώσες
6. x=2*randint(1,N,4)-3; % τυχαίοι ακέραιοι από τους {-3,-1,1,3}
7. y=2*randint(1,N,4)-3; % "
8. u=x+i*y; % αναλυτικό σήμα QAM
9. Px=sum(x.^2)/length(x) % ισχύς συμφασικής συνιστώσας (in-phase)
10. Py=sum(y.^2)/length(y) % ισχύς εγκάρσιας συνιστώσας (quadrature)
11. Pu=u*u'/length(u) % ισχύς μιγαδικού σήματος

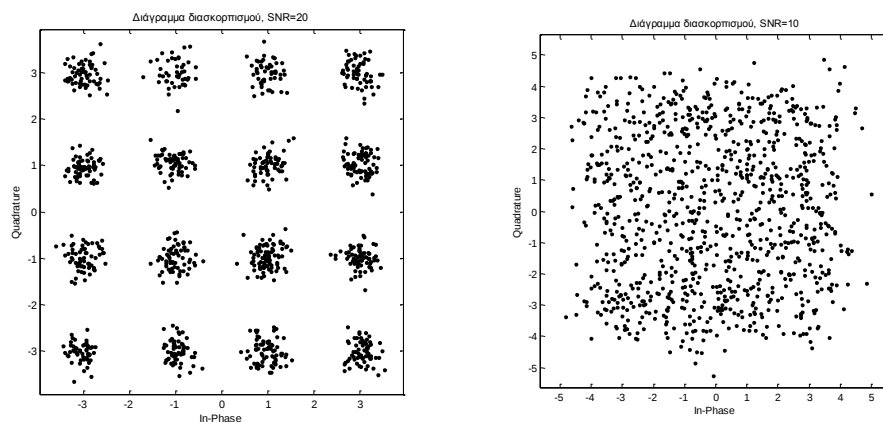
12. nx=wgn(1,length(x),10*log10(Px)-SNR);
13. ny=wgn(1,length(x),10*log10(Py)-SNR);
14. n=nx+i*ny; % σήμα μιγαδικού θορύβου

15. Pn=n*n'/length(n);
16. % η πραγματική σηματοθορυβική σχέση του μιγαδ. σήματος (σε db)
17. SNRcomplex=10*log10(Pu/Pn)

18. unoisy=u+n; % το μιγαδικό θορυβώδες σήμα
19. scatterplot(unoisy(1:1000)); % διάγραμμα διασκορπισμού
20. title(['Διάγραμμα διασκορπισμού, SNR=',num2str(SNR)]);

```

Κώδικας 1.2



Σχήμα 1.14 Διαγράμματα διασκορπισμού θορυβώδους αναλυτικού σήματος QAM

Παράδειγμα 1.2 – Ψηφιακά φίλτρα FIR, σχεδιασμός με παράθυρα

A. Αφού υπολογιστεί η κρουστική απόκριση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου συχνότητας αποκοπής $0.125F_s$ για ένα μεγάλο σχετικά μήκος (π.χ. $L=2^{13}+1$), στη συνέχεια, αυτή να περικοπεί σε μήκη $32+1$, $64+1$ και $128+1$ δειγμάτων και να σχεδιαστούν οι αντίστοιχες αποκρίσεις συχνότητας.

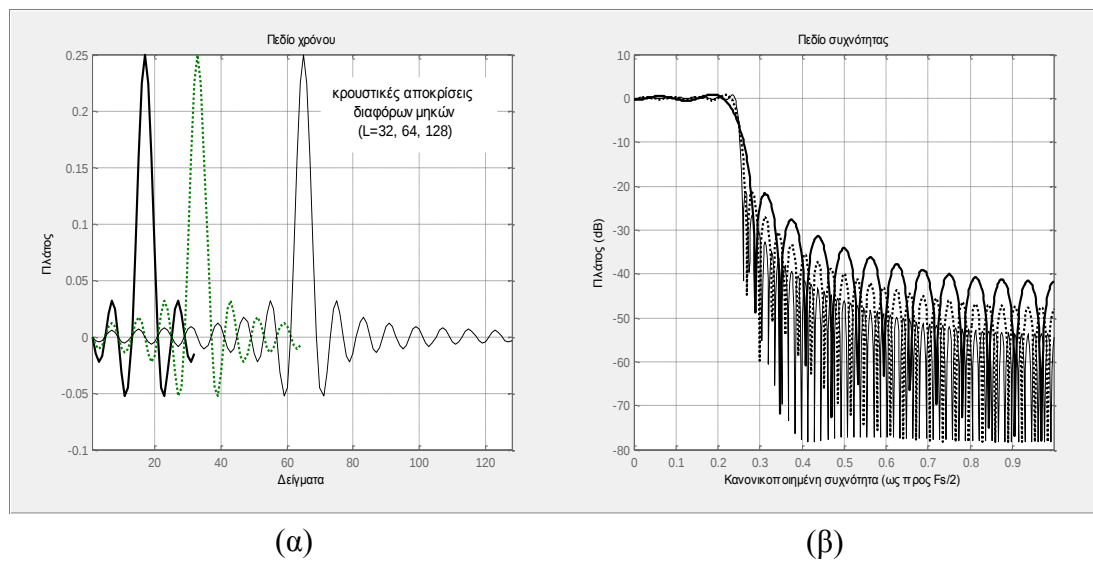
B. Να τροποποιηθεί μία από τις περικομμένες κρουστικές αποκρίσεις (π.χ. αυτή με μήκος $64+1$) με παράθυρα hamming και Kaiser και να σχεδιαστούν οι αντίστοιχες αποκρίσεις συχνότητας. Να εφαρμοστεί για φιλτράρισμα δοσμένου σήματος.

Απάντηση

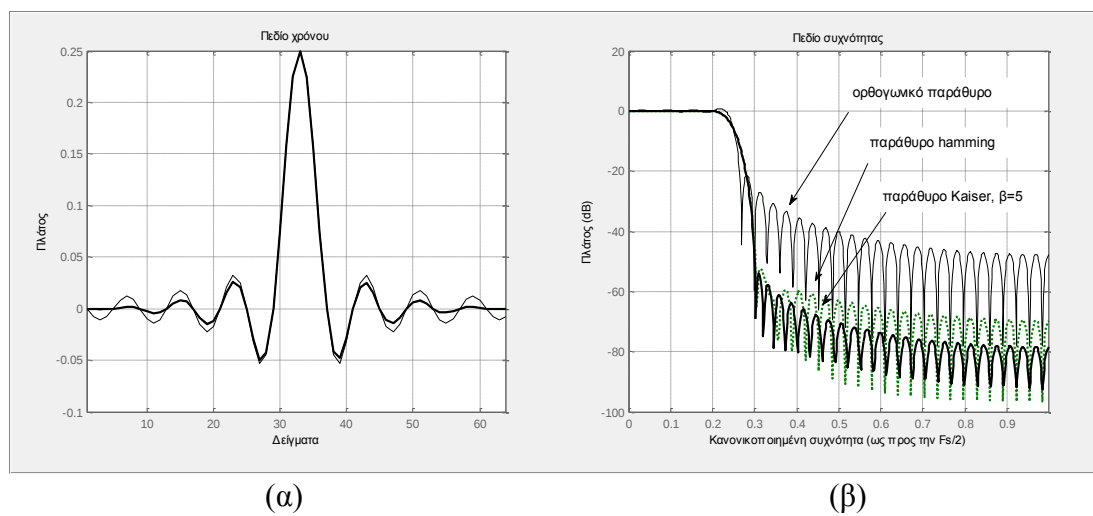
Ο Κώδικας 1.3 υλοποιεί τις ζητούμενες λειτουργίες.

```
1 clear all; close all;
2 % Το αρχείο "sima.mat" περιέχει το σήμα s και τη συχνότητα
3 % δειγματοληψίας Fs. Το φάσμα του σήματος εκτείνεται σχεδόν σε όλη την
4 % περιοχή συχνοτήτων μέχρι 4 KHz. Πάνω από 1 KHz, όμως, είναι θόρυβος
5 % και πρέπει να φιλτραριστεί.
6 load sima;
7 figure; pwelch(s,[],[],[],Fs);
8 % Ορίζεται η ιδανική βαθυπερατή συνάρτηση H, με συχνότητα αποκοπ. Fs/8.
9 H=[ones(1,Fs/8) zeros(1,Fs-Fs/4) ones(1,Fs/8)];
10 % Υπολογίζεται η κρουστική απόκριση με αντίστροφο μετασχ. Fourier
11 % Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αναλυτική σχέση Sa(x)
12 h=ifft(H,'symmetric');
13 middle=length(h)/2;
14 h=[h(middle+1:end) h(1:middle)];
15 h32=h(middle+1-16:middle+17);
16 h64=h(middle+1-32:middle+33);
17 h128=h(middle+1-64:middle+65);
18 % figure; stem([0:length(h64)-1],h64); grid;
19 % figure; freqz(h64,1); % σχεδιάζουμε την απόκριση συχνότητας της h64
20 wvtool(h32,h64,h128); % αποκρίσεις συχνότητας των περικομμένων h
21 % Οι πλευρικοί λοβοί είναι υψηλοί!
22 % Πολλαπλασιάζουμε την περικομμένη κρουστική απόκριση με κατάλληλο
23 % παράθυρο. Χρησιμοποιούμε την h64 και παράθυρα hamming και kaiser
24 wh=hamming(length(h64));
25 wk=kaiser(length(h64),5);
26 figure; plot(0:64,wk,'r',0:64,wh,'b'); grid;
27 h_hamming=h64.*wh';
28 % figure; stem([0:length(h64)-1],h_hamming); grid;
29 % figure; freqz(h_hamming,1);
30 h_kaiser=h64.*wk';
31 wvtool(h64,h_hamming,h_kaiser);
32 % Φιλτράρουμε το σήμα μας με καθένα από τα τρία φίλτρα
33 y_rect=conv(s,h64);
34 figure; pwelch(y_rect,[],[],[],Fs);
35 y_hamm=conv(s,h_hamming);
36 figure; pwelch(y_hamm,[],[],[],Fs);
37 y_kais=conv(s,h_kaiser);
38 figure; pwelch(y_kais,[],[],[],Fs);
39 %
40 % Βαθυπερατό Parks-MacClellan
41 hpm=firpm(64, [0 0.10 0.15 0.5]*2, [1 1 0 0]);
42 % figure; freqz(hpm,1);
43 s_pm=conv(s,hpm);
44 figure; pwelch(s_pm,[],[],[],Fs);
```

Κώδικας 1.3



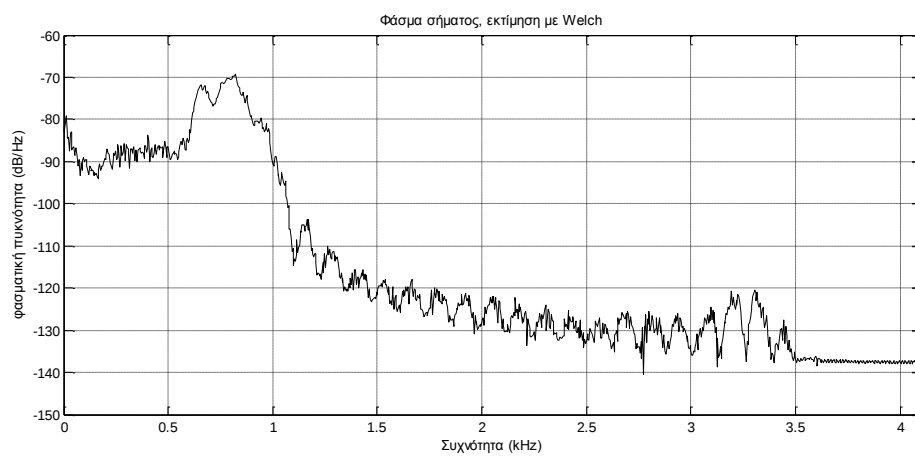
Σχήμα 1.15: Βαθυπερατά FIR φίλτρα ορθογ. παραθύρου, διαφόρων μηκών
(α) κρουστικές αποκρίσεις (β) αποκρίσεις συχνότητας



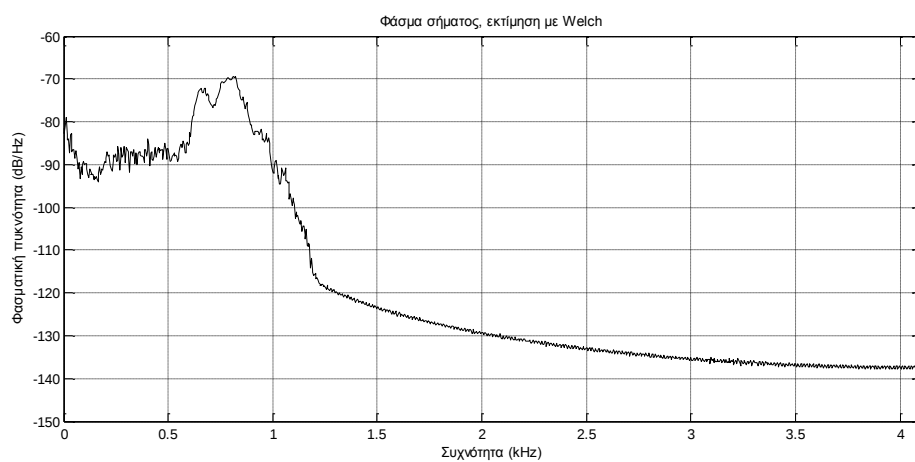
Σχήμα 1.16: Βαθυπερατό FIR φίλτρο, τάξης 65, με διάφορα παράθυνα
(α) κρουστικές αποκρίσεις (β) αποκρίσεις συχνότητας



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 1.17: Φασματική πυκνότητα σήματος (α) αρχικό
(β) μετά από βαθυπερατό φίλτρο ορθογ. παραθύρου
(γ) μετά από βαθυπερατό φίλτρο παραθύρου Kaiser

Παράδειγμα 1.3 -- Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων

Σε περιβάλλον MATLAB να γίνουν τα ακόλουθα:

- A. Να παραχθεί ζωνοπερατό σήμα δύο ημιτονικών, σε συχνότητες $f_1=108$ Hz και $f_2=110$ Hz. Να υπερτεθεί λευκός, γκαουσιανός θόρυβος συγκεκριμένης στάθμης και να σχεδιαστεί η πυκνότητα φάσματος ισχύος (α) με πυκνό πλέγμα δειγματοληψίας $f_s=8*256$ Hz, (β) με πλέγμα $f_s=256$ Hz (περίπου Nyquist).
- B. Να γίνει υποδειγμάτιση του παραπάνω ζωνοπερατού σήματος στη συχνότητα $256/17$ Hz και να επιδειχθεί και ερμηνευτεί η άνοδος της φασματικής πυκνότητας ισχύος θορύβου.
- Γ. Να επαναληφθεί το (B), αφού προηγηθεί ζωνοπερατό φιλτράρισμα στην περιοχή $[105, 113]$ Hz.

Απάντηση

Ο Κώδικας 1.4 υλοποιεί τις ζητούμενες λειτουργίες.

Κατ αρχήν σχηματίζεται το διακριτό σήμα των δύο ημιτονικών στο πυκνό πλέγμα σημείων $8*256$ Hz. Προστίθεται στη συνέχεια θόρυβος με τη βοήθεια της έτοιμης συνάρτησης `awgn()` έτσι ώστε $SNR=10$ db. Η πυκνότητα φάσματος ισχύος του θορυβώδους σήματος δείχνεται στο σχήμα 1.18(α) με το θόρυβο στο επίπεδο των -43 db. Πράγματι, αφού η ισχύς του σήματος είναι $(1^2+0.25^2)/2=0.53$, η ισχύς θορύβου για το ζητούμενο SNR θα πρέπει να είναι ίση με $0.53/10$. Αλλά η ισχύς αυτή, για το εύρος ζώνης των $8*256/2$ Hz (μονόπλευρο), είναι ίση με $N_o*8*256/2$. Οπότε:

$$N_o*8*256/2=0.053, \text{ ή } N_o=0.053/1024 \approx -43 \text{ db}$$

Στη συνέχεια, γίνεται υποδειγμάτιση του θορυβώδους σήματος στο πλέγμα Nyquist, 256 Hz. Η πυκνότητα φάσματος ισχύος θορύβου για το πλέγμα αυτό ανεβαίνει πλέον κατά $10\log 8 \approx 9$ db, δηλαδή στα -34 db, όπως πράγματι φαίνεται στο σχήμα 1.18(β).

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, δίνεται χρήσιμο εύρος ζώνης 8 Hz στην περιοχή $[105, 113]$ Hz. Κατά τη θεωρία, η υποδειγμάτιση του ζωνοπερατού αυτού σήματος σε πλέγμα $256/17$ ($n=17$), οδηγεί σε αύξηση του επιπέδου θορύβου κατά $10\log 17 = 12.3$ db. Αυτό επιβεβαιώνεται από το σχήμα 1.20(α), όπου η πυκνότητα θορύβου είναι πράγματι γύρω στα -22db, 12db υψηλότερη του σχ. 1.18(β).

Αν, ωστόσο, πριν την υποδειγμάτιση φιλτράρουμε τον εκτός χρήσιμης ζώνης $[105-113]$ Hz θόρυβο με τη βοήθεια κατάλληλου ζωνοπερατού φίλτρου, τότε στη βασική ζώνη θα εμφανισθεί μόνον ένα είδωλο φάσματος θορύβου, φασματικής πυκνότητας ίσης με αυτήν του ζωνοπερατού, σχήματα 1.20 (α),(β),(γ).

```

% Υποδειγμάτιση ζωνοπερατού σήματος
%-----
% Εύρος ζώνης W=7.5 Hz στην περιοχή γύρω από τη συχνότητα 109 Hz
% Σήμα: δύο ημιτονικές + θόρυβος
clear all; close all;
f1=108; f2=110; % οι συχνότητες των δύο ημιτονικών
Fs=256; Ts=1/Fs; % συχνότητα και περίοδος δειγματοληψίας - περίπου Nyquist
N=2^14; % αριθμός δειγμάτων στο πλέγμα Nyquist
nsamp=8; Dt=Ts/nsamp; t=Dt*[1:1:N*nsamp]; % πυκνό πλέγμα, 8*Nyquist

SNR=10; % σηματοθορυβική σχέση 10 db
x=cos(2*pi*f1*t)+0.25*sin(2*pi*f2*t); % πυκνή δειγματοληψία
xn=awgn(x,SNR,'measured'); % προσθήκη θορύβου

td=t(1:nsamp:length(t)); % πλέγμα Nyquist
xd=xn(1:nsamp:length(xn)); % διακριτό σήμα, με θόρυβο, πλέγμα Nyquist
figure; pwelch(x,[],[],[],Fs*nsamp); % fig1: φάσμα, χωρίς θόρυβο, πυκνό πλέγμα
figure; pwelch(xn,[],[],[],Fs*nsamp); % fig2: φάσμα με θόρυβο, πυκνό πλέγμα
figure; pwelch(xd,[],[],[],Fs); % fig3: φάσμα με θόρυβο, πλέγμα Nyquist

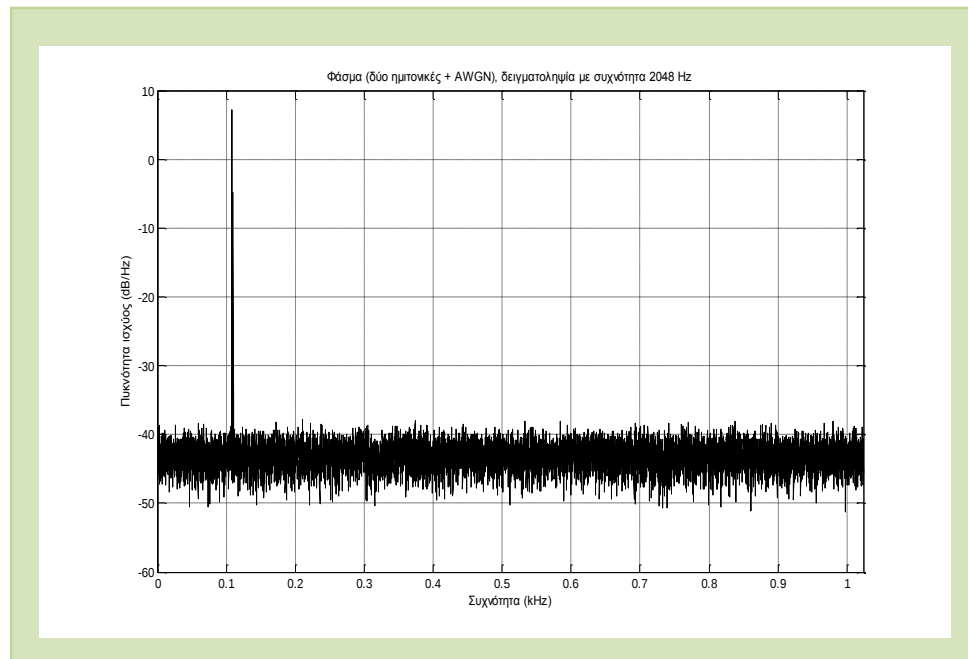
%
% ζωνοπερατό φιλτράρισμα στο πυκνό πλέγμα
f01=f1-3; f11=f1-1; f12=f2+1; f02=f2+3;
order=256*nsamp;
fpts=[0 [f01 f11 f12 f02]/Fs/nsamp 0.5]*2;
mag=[0 0 1 1 0 0];
wt=[1 1 1];
b = firpm(order,fpts,mag,wt); a=1; % FIR filter Parks Mclellan
yn=filter(b,a,xn);
% fig4: φάσμα μετά το ζωνοπερατό φιλτράρισμα, πυκνό πλέγμα
figure; pwelch(yn,[],[],[],Fs*nsamp);
%
% ζωνοπερατό φιλτράρισμα στο πλέγμα Nyquist
order=256;
fpts=[0 [f01 f11 f12 f02]/Fs 0.5]*2;
mag=[0 0 1 1 0 0];
wt=[1 1 1];
b = firpm(order,fpts,mag,wt); a=1;
yd=filter(b,a,xd);
% fig5: φάσμα μετά το ζωνοπερατό φιλτράρισμα, πλέγμα Nyquist
figure; pwelch(yd,[],[],[],Fs);
%
% υποδειγμάτιση σήματος πριν και μετά το ζωνοπερατό φιλτράρισμα
sub=17; Fs2=Fs/sub; Ts2=1/Fs2; %
td2=t(1:sub*nsamp:length(t)); % πλέγμα υποδειγμάτισης
xd2=xn(1:sub*nsamp:length(xn));
% fig6: φάσμα σήματος χωρίς ζωνοπερατό φιλτράρισμα,
% πλέγμα υποδειγμάτισης
figure; pwelch(xd2,[],[],[],Fs2);

yd2=yn(1:sub*nsamp:length(yn));
% fig7: φάσμα σήματος μετά ζωνοπερατό φιλτράρισμα (στο πυκνό πλέγμα),
% πλέγμα υποδειγμάτισης
figure; pwelch(yd2,[],[],[],Fs2);

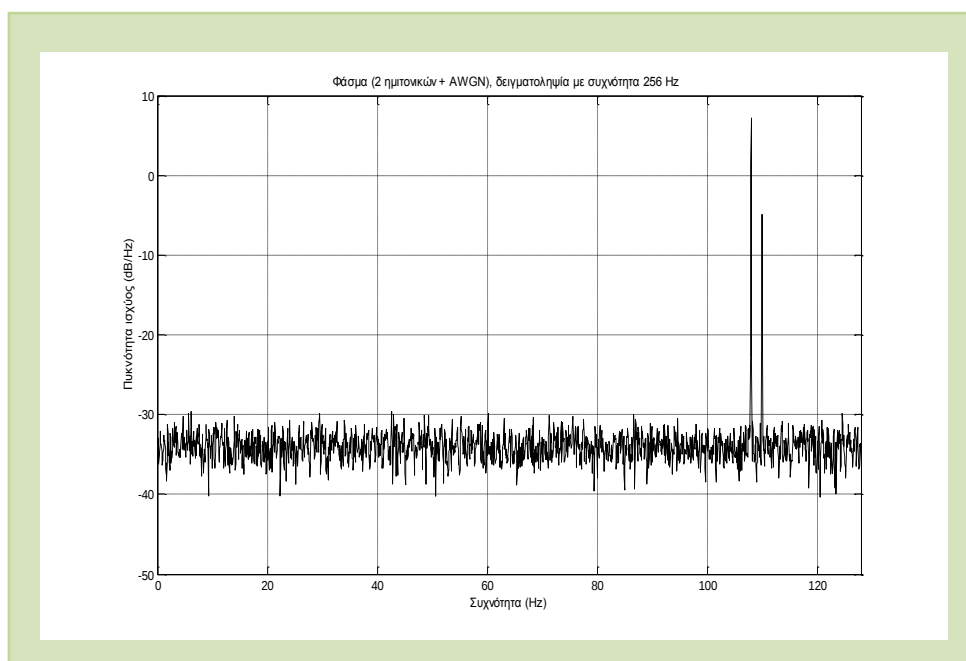
yd3=yd(1:sub:length(yd));
% fig8: φάσμα σήματος μετά ζωνοπερατό φιλτράρισμα (στο πλέγμα Nyquist),
% πλέγμα υποδειγμάτισης
figure; pwelch(yd3,[],[],[],Fs2);

```

Κώδικας 1.4

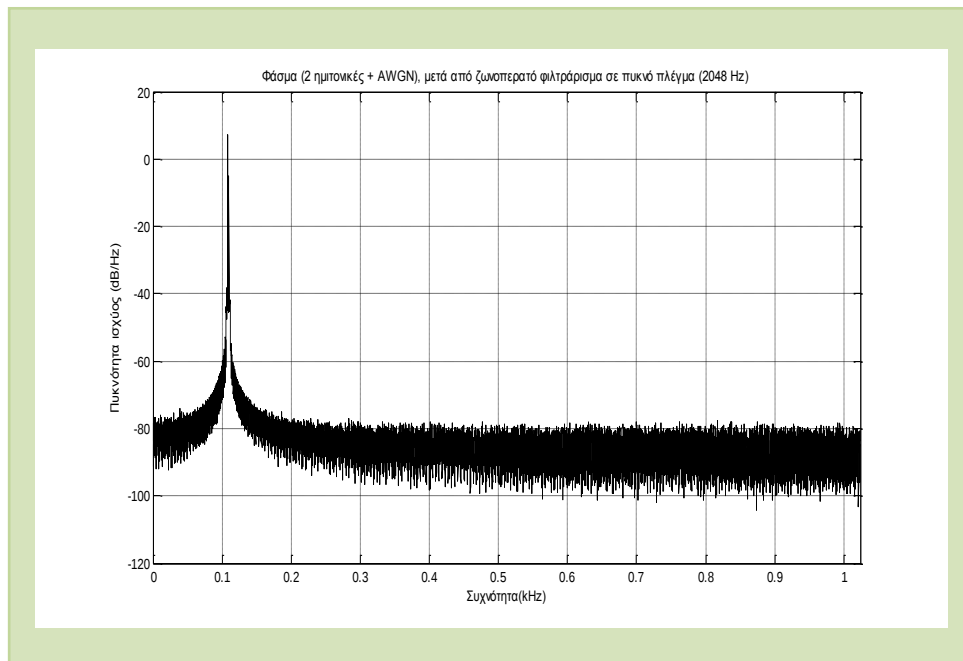


(α)

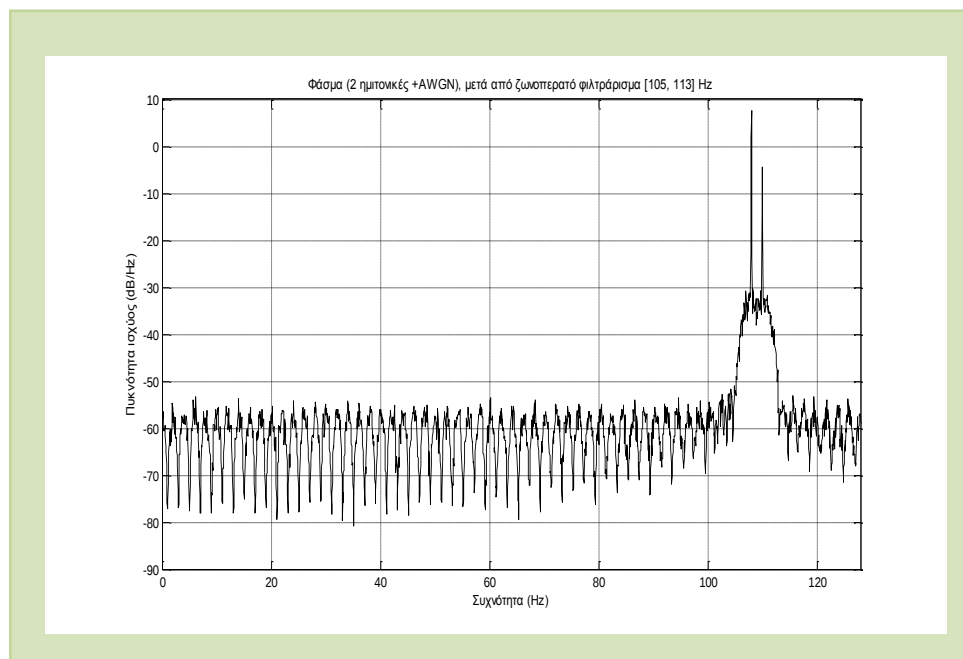


(β)

Σχήμα 1.18: Φασματική πυκνότητα θορυβώδους σήματος δύο ημιτονικών
(α) δειγματοληψία πυκνού πλέγματος (β) δειγματοληψία πλησίον Nyquist

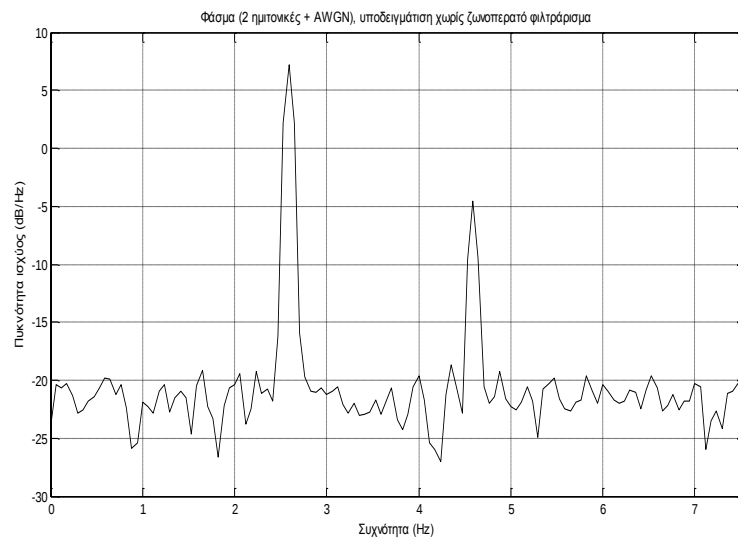


(α)

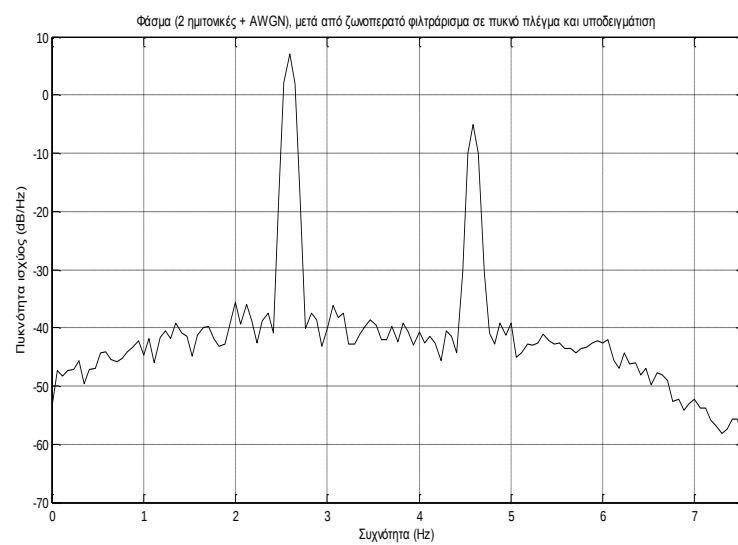


(β)

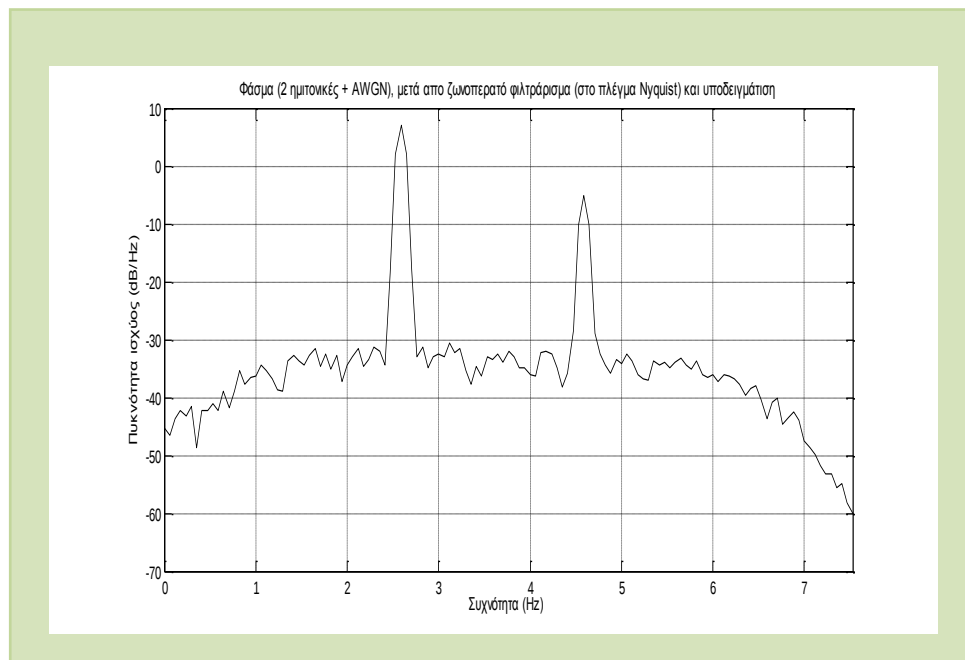
Σχήμα 1.19: Φασματική πυκνότητα μετά από ζωνοπερατό φιλτράρισμα



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 1.20: Φασματική πυκνότητα στη βασική ζώνη, μετά από υποδειγμάτιση του ζωνοπερατού σήματος (α) χωρίς ζωνοπερατό φιλτράρισμα (β) με ζωνοπερατό φιλτράρισμα στο πυκνό πλέγμα (γ) με ζωνοπερατό φιλτράρισμα στο πλέγμα Nyquist

1.6 Ασκήσεις προς εκτέλεση

Άσκηση 1.1 Ένας απλός ψηφιακός αναλυτής φάσματος

Να γραφεί σε MATLAB συνάρτηση φασματικής ανάλυσης, παρόμοια με την `pwelch()`: θα δέχεται ως είσοδο διάνυσμα πραγματικού σήματος καθώς και τη συχνότητα δειγματοληψίας, F_s , και θα σχεδιάζει τη μονόπλευρη φασματική πυκνότητα του σήματος στην περιοχή $[0-F_s/2)$. Το σήμα θα τεμαχίζεται σε τμήματα μήκους ίσου με τη δύναμη του 2 την πλησιέστερη στο $1/8$ του συνολικού του μήκους, αλλά όχι μικρότερου από 256. Τα τμήματα θα είναι επικαλυπτόμενα κατά 50%. Το τελευταίο τμήμα, εάν υπολείπεται σε μήκος των άλλων, θα αγνοείται. Θα υπολογίζεται με FFT το φάσμα κάθε τμήματος και θα λαμβάνεται η μέση τιμή όλων των τμημάτων. Η συνάρτηση να δοκιμαστεί με το σήμα του παραδείγματος 1.1 και να συγκριθεί το αποτέλεσμα με το αντίστοιχο της `pwelch()`.

Άσκηση 1.2 Σχεδιασμός και υλοποίηση ψηφιακού ζωνοπερατού φίλτρου

Να σχεδιαστεί και υλοποιηθεί ψηφιακό φίλτρο ζώνης διέλευσης, τέτοιο ώστε εφαρμοζόμενο στο σήμα του παραδείγματος 1.2 να αποκόβει κάθε συνιστώσα κάτω των 600 Hz και άνω των 900 Hz. Να δοκιμαστούν δύο προσεγγίσεις σχεδιασμού: με παράθυρα και ισοϋψών κυματώσεων (βλέπε και επεξεργασμένο παράδειγμα 1.3).

Παραδοτέα

Τυπωμένα σε χαρτί, ο κώδικας των παραπάνω εφαρμογών, καθώς και σχήματα με τη λαμβανόμενη, σε κάθε περίπτωση, φασματική πυκνότητα. Στον τίτλο των σχημάτων να είναι τυπωμένο και το ονοματεπώνυμό σας.

Παράρτημα Π1.1

Σειρές Fourier - Μετασχηματισμός Fourier (συνεχούς χρόνου)

Η πληροφορία μεταφέρεται από σύστημα σε σύστημα εγγραφόμενη σε αναγνώσιμα χαρακτηριστικά ενός κατάλληλου μέσου.

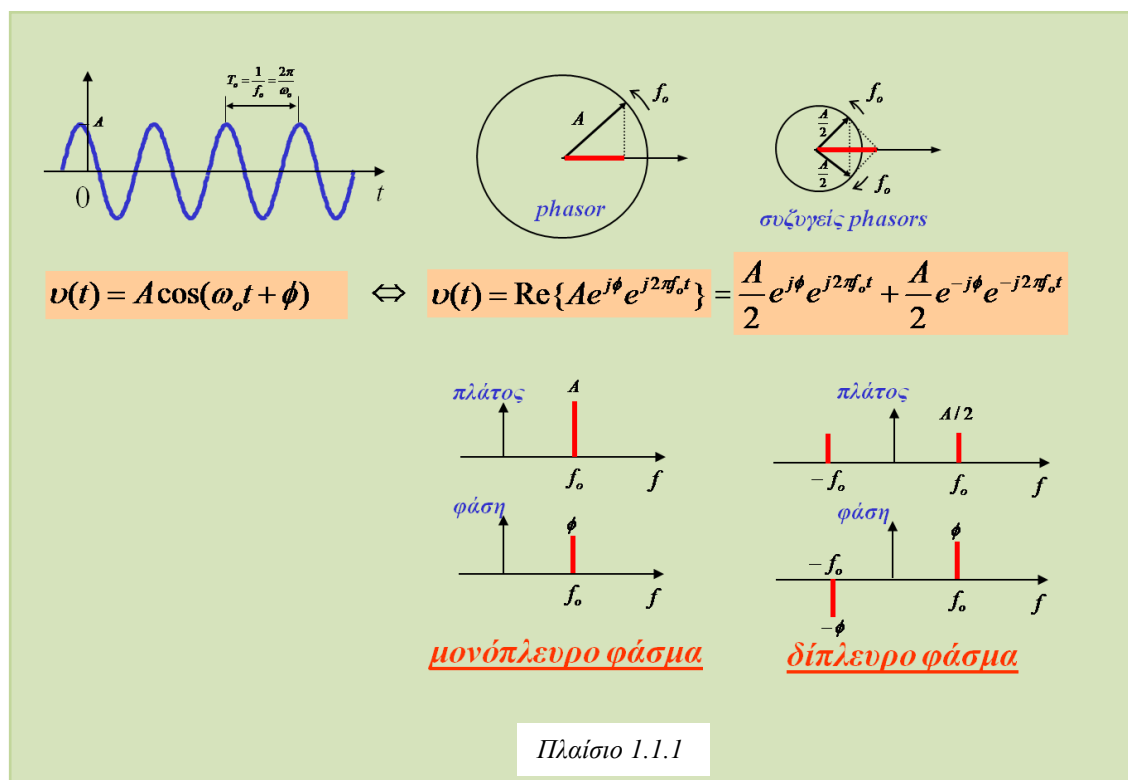
Προκειμένου για **μετάδοση**, γίνεται εγγραφή σε κατάλληλο **σήμα** που μπορεί να τεξιδέψει υπό μορφή **κύματος** από τον πομπό στο δέκτη.

Η παράσταση των σημάτων στο πεδίο κάποιου μετασχηματισμού (Fourier, Laplace, Z) διευκολύνει τη μαθηματική τους ανάλυση και το σχεδιασμό των συστημάτων που τα παράγουν, τα μεταφέρουν ή και τα επεξεργάζονται.

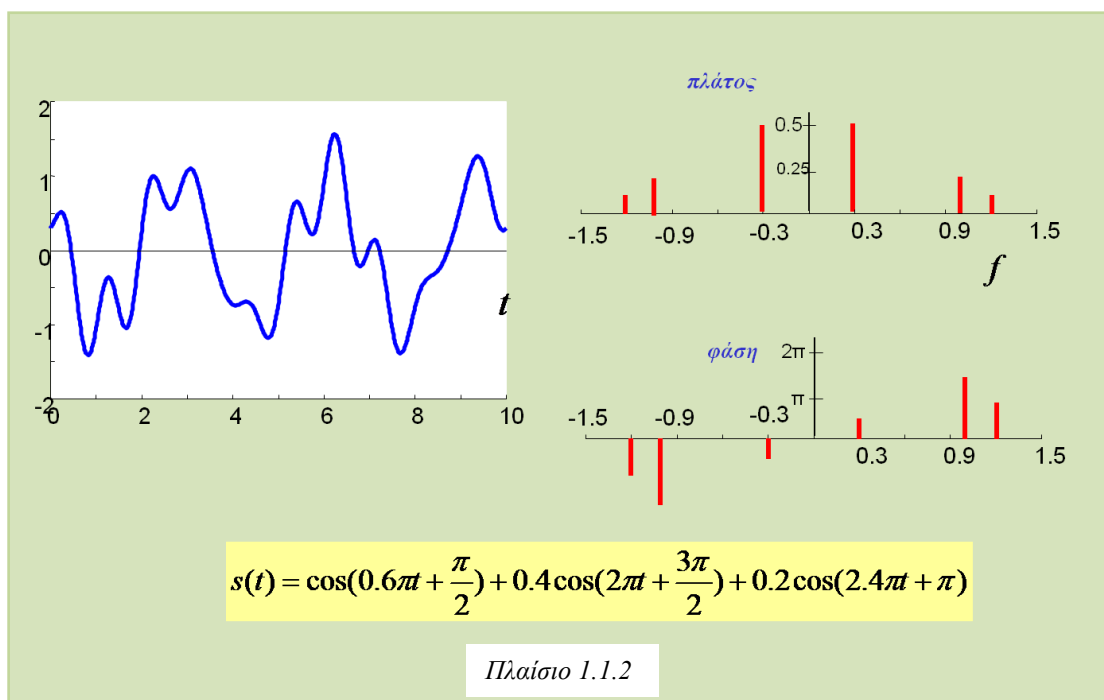
Ειδικά για τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, το **μυγαδικό πεδίο μετασχηματισμού Fourier** (πεδίο συχνοτήτων: σειρές Fourier, μετασχηματισμός Fourier) είναι αυτό που χρησιμοποιείται κυρίως.

Ας θεωρήσουμε ένα απλό ημιτονικό σήμα πολύ μεγάλης (θεωρητικά άπειρης) διάρκειας. Περιγράφεται με τρεις παραμέτρους: **πλάτος**, **συχνότητα** και **φάση**. Με χρήση της ταυτότητας Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$, μπορεί επίσης να γραφεί με τη βοήθεια ενός μιγαδικού **phasor** που κινείται με σταθερή κυκλική συχνότητα αντίστροφα προς τη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Στο επίπεδο συχνότητας περιγράφεται από το πλάτος και την αρχική φάση του phasor στη συγκεκριμένη συχνότητα περιστροφής του. Το ίδιο αποτέλεσμα θα πάρουμε αν θεωρήσουμε δύο συζυγείς phasors μισού πλάτους που κινούνται (αντίστροφα ο ένας του άλλου) με την ίδια συχνότητα.

Έτσι έχουμε την παράσταση **δίπλευρου φάσματος**. Για πραγματικά σήματα, λοιπόν (συζυγείς phasors), το φάσμα είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν: το μεν πλάτος έχει άρτια συμμετρία, η δε φάση περιττή (βλέπε Πλαίσιο Π1.1.1)



Μπορούμε να συνθέσουμε σήματα με υπέρθεση πολλών απλών ημιτονικών σημάτων. Τα σήματα αυτά είναι **γραμμικού φάσματος**, αφού η ενέργειά τους είναι εκ κατασκευής συγκεντρωμένη σε διακριτές συχνότητες (Πλαίσιο 1.1.2)



Αντίστροφα, οποιοδήποτε περιοδικό σήμα (ισχύος), $v(t)$, μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα απλών ημιτονικών σημάτων, ως σειρά Fourier (Πλαίσια 1.1.3 - 1.1.5)

$v(t) = v(t + T_o), \quad \forall t \Leftrightarrow$

$\downarrow$ $v(t)$ πραγματικό

$c_n^* = c_{-n} = |c_n| e^{-j\phi_n} \Rightarrow$

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi f_o t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

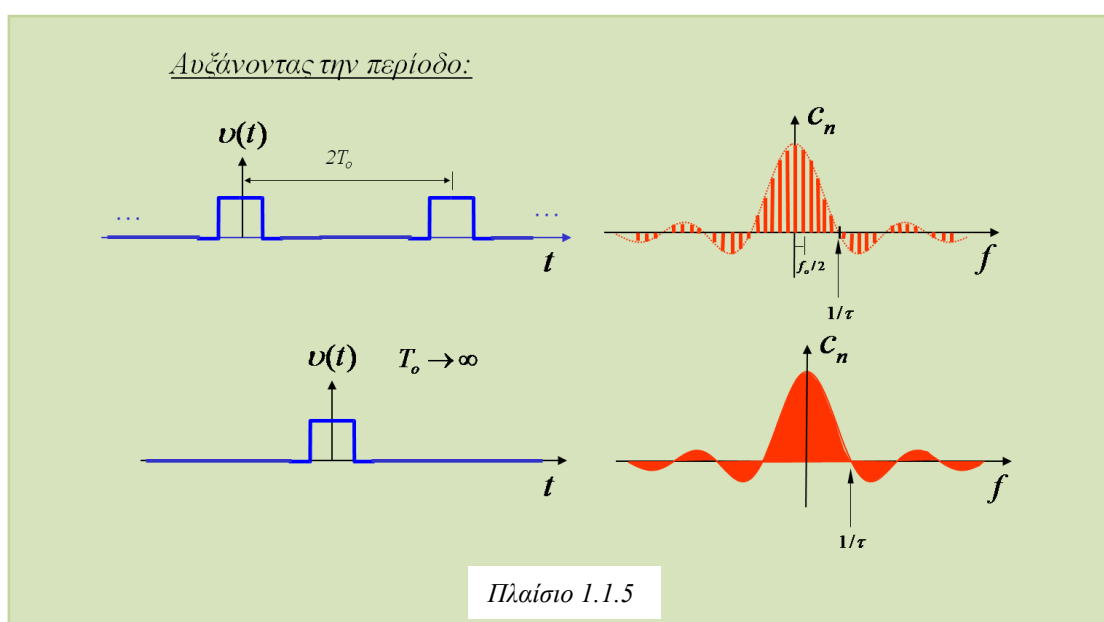
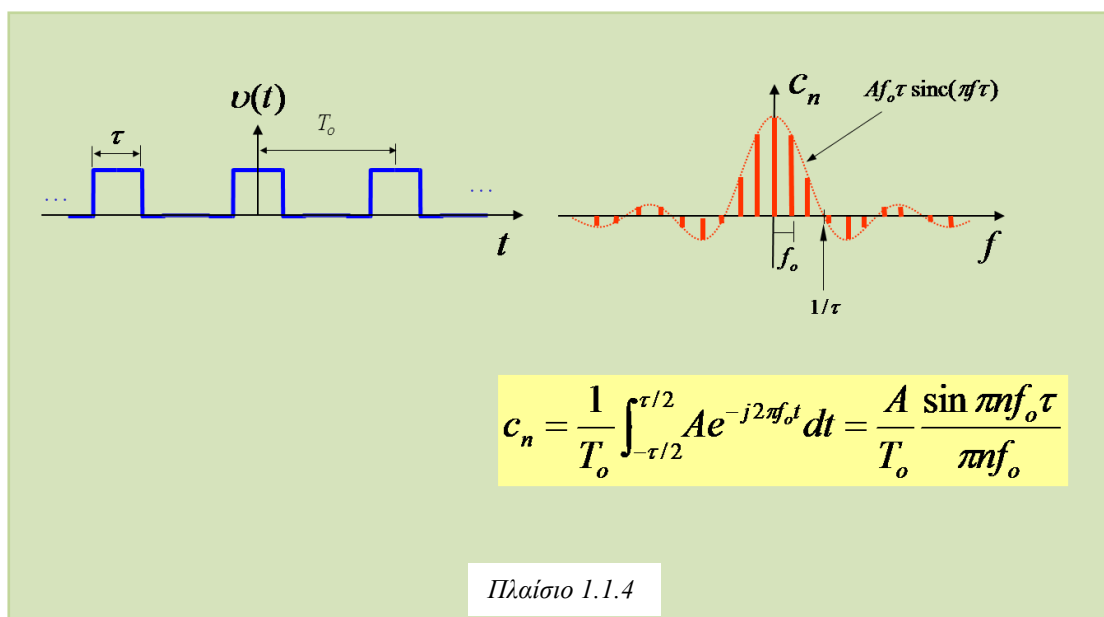
$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} v(t) e^{-j2\pi f_o t} dt \quad f_o = \frac{1}{T_o}$$

(Εκθετική) Σειρά Fourier

$$v(t) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} |2c_n| \cos(2\pi f_o t + \phi_n)$$

Τριγωνομετρική Σειρά Fourier

Πλαίσιο 1.1.3



Στο Πλαίσιο 1.1.5, ειδικότερα, παρατηρούμε ότι:

Ξεκινώντας από ένα περιοδικό σήμα διακριτών παλμών (π.χ. ορθογωνικών παλμών), αν αυξήσουμε την περιόδo του χωρίς να αλλάξουμε το μέγεθος των παλμών, οι γραμμές του φάσματος θα πυκνώσουν παραμένοντας εντός μιας **σταθερής περιβάλλουσας** που εξαρτάται μόνον από τον απλό παλμό. Στο όριο, καθώς η περίοδος τείνει στο άπειρο, η περιβάλλουσα «γεμίζει». Η περιβάλλουσα αυτή είναι ο μετασχηματισμός Fourier του παλμού.

Ορισμός μετασχηματισμού Fourier και αντιστρόφου

$$FT: \quad \mathfrak{T}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} h(t) dt = H(f)$$

$$IFT: \quad \mathfrak{T}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} H(f) df = h(t)$$

Ενεργειακές σχέσεις – θεωρήματα Parseval & Rayleigh

$$Integral\ theorem: \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} U(f)V^*(f)df$$

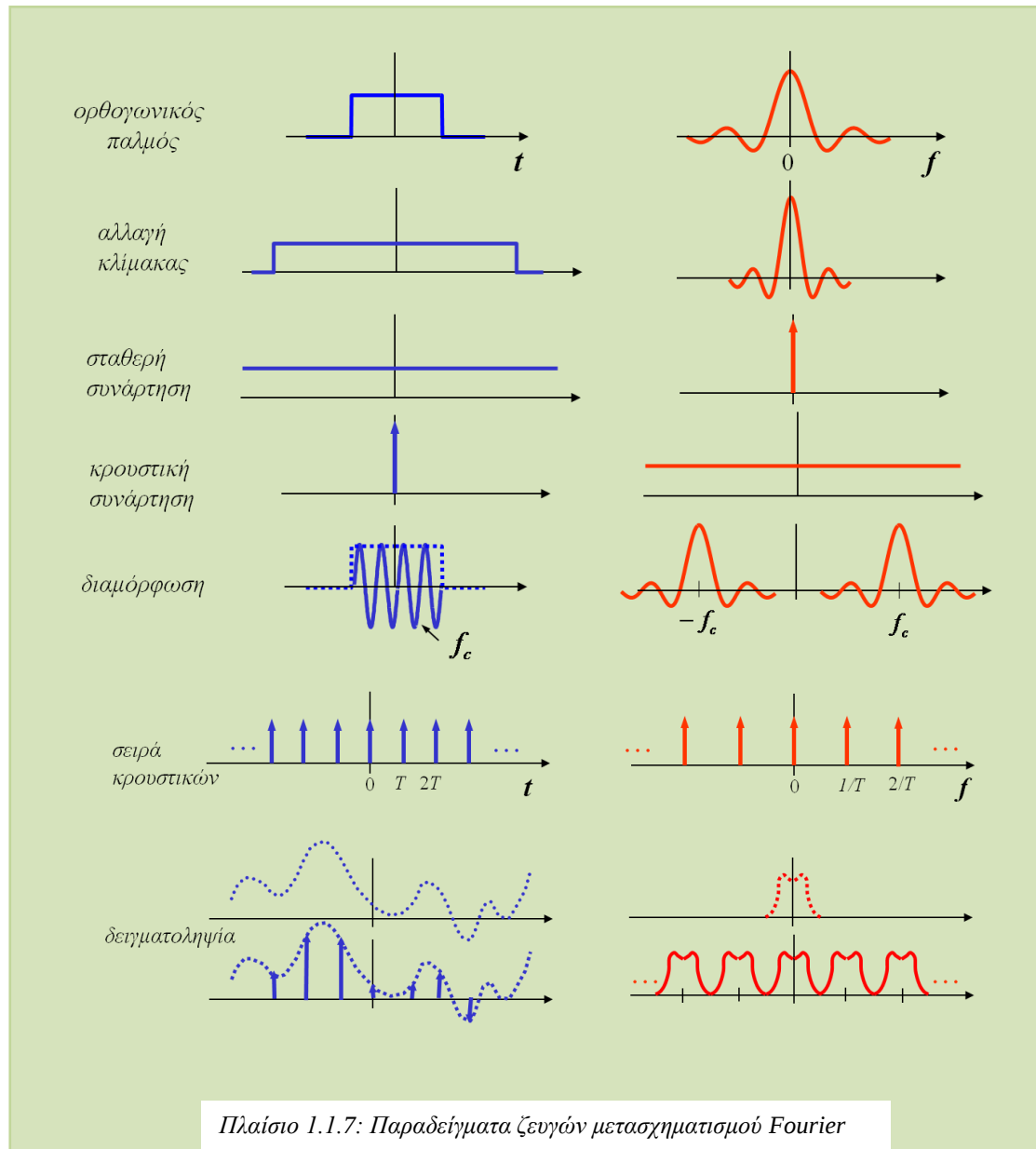
$$Θεώρημα\ Parseval: \quad P = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} |v(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$Θεώρημα\ Rayleigh: \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

	$h(t)$	$H(f)$
υπέρθθεση	$ah_1(t) + bh_2(t)$	$aH_1(f) + bH_2(f)$
αλλαγή κλίμακας	$h(at)$	$\frac{1}{ a } H\left(\frac{f}{a}\right)$
ολίσθηση συχνότητας	$e^{j2\pi f_c t} h(t)$	$H(f - f_c)$
καθυστέρηση	$h(t - \tau)$	$e^{-j2\pi f \tau} H(f)$
διαμόρφωση	$h(t) \cos(2\pi f_c t + \phi)$	$\frac{1}{2} [H(f - f_c)e^{j\phi} + H(f + f_c)e^{-j\phi}]$
διαφόριση	$\frac{d^n h(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n H(f)$
ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t h(u) du$	$\frac{1}{j2\pi f} H(f) + \frac{1}{2} H(0) \delta(f)$
πολλαπλασιασμός επί t^n	$t^n h(t)$	$(-j2\pi f)^{-n} \frac{d^n H(f)}{df^n}$
συνέλιξη	$\int_{-\infty}^{\infty} h(u)g(t-u) du$	$H(f)G(f)$

Πλαίσιο 1.1.6: Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Στο Πλαίσιο ΠΙ.1.7 συνοψίζονται ζεύγη μετασχηματισμού Fourier, τα οποία παίζουν ιδιαίτερο ρόλο στην ψηφιοποίηση των σημάτων και τις επικοινωνίες.



Παράρτημα Π1.2

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)

Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου Ορίζεται από τις σχέσεις (ευθεία και αντίστροφη):

$$\text{Ορισμός DTFT:} \quad X(e^{j2\pi f_D}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi f_D n}, \quad x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi f_D}) df_D \quad (\text{Π1.1})$$

Πίνακας 1-1: Βασικά θεωρήματα DTFT

Θεώρημα	Πεδίο διακριτού χρόνου	Πεδίο συχνότητας
	$x[n]$	$X(e^{j2\pi f_D})$
	$y[n]$	$Y(e^{j2\pi f_D})$
Γραμμικότητα	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j2\pi f_D}) + bY(e^{j2\pi f_D})$
Χρονική αντιστροφή	$x[-n]$	$X(e^{-j2\pi f_D})$
Χρονική ολίσθηση	$x[n - n_o]$	$e^{-j2\pi f_D n_o} X(e^{j2\pi f_D})$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j2\pi f_o n} x[n]$	$X(e^{j2\pi(f_D - f_o)})$
Διαφόριση κατά συχνότητα	$nx[n]$	$-\frac{1}{j2\pi} \frac{dX(e^{j2\pi f_D})}{df_D}$
Συνέλιξη	$x[n] \oplus y[n]$	$X(e^{j2\pi f_D})Y(e^{j2\pi f_D})$
Διαμόρφωση	$x[n]y[n]$	$\int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi f_D})Y(e^{j2\pi f_D})df_D$

Πίνακας 1-2: Συνήθη ζεύγη DTFT

Πεδίο διακριτού χρόνου	Πεδίο συχνότητας
$\delta[n]$	1
$u[n] \equiv \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{1 - e^{-j2\pi f_D}} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f_D + k)$
$e^{j2\pi f_o n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f_D - f_o + k)$
$a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f_D}}$

Πίνακας 1-3: Ιδιότητες συμμετρίας DTFT

Πεδίο διακριτού χρόνου	Πεδίο συχνότητας
$x[n] = x_{ev}[n] + x_{od}[n]$	$X(e^{j2\pi f_D}) = X_{re}(e^{j2\pi f_D}) + jX_{im}(e^{j2\pi f_D})$
$x_{ev}[n]$	$X_{re}(e^{j2\pi f_D})$
$x_{od}[n]$	$X_{im}(e^{j2\pi f_D})$
Ιδιότητες συμμετρίας	$X(e^{j2\pi f_D}) = X^*(e^{-j2\pi f_D})$ $X_{re}(e^{j2\pi f_D}) = X_{re}(e^{-j2\pi f_D})$ $X_{im}(e^{j2\pi f_D}) = -X_{im}(e^{-j2\pi f_D})$ $ X(e^{j2\pi f_D}) = X(e^{-j2\pi f_D}) $ $\angle \{X(e^{j2\pi f_D})\} = -\angle \{X(e^{-j2\pi f_D})\}$

Βιβλιογραφία-Αναφορές

- [1] Carlson A. Bruce, Crilly B. Paul, Rutledge C. Janet, *Communication Systems*, 4th ed., Mc Graw Hill, 2002
- [2] Harris, F., *Multirate Signal Processing*, Prentice-Hall, 2004.
- [3] Mitra K. Sanjit, *Digital Signal Processing*, 3rd ed., Mc Graw Hill, 2006
- [4] Openheim A.V., Schafer R.W., Bruck J.R., *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed., Prentice Hall, 1998.
- [5] Sklar B., *Digital Communications*, 2nd ed., Prentice-Hall 2001.
- [6] Akos, D. M., et al., "Direct Bandpass Sampling of Multiple Distinct RF Signals," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, pp. 983-988, July 1999.
- [7] Vaughan, R. G., Scott, N. L. and White D. R., "The Theory of Bandpass Sampling," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 39, pp. 1973-1984, Sept. 1991.
- [8] Harris, F., "On the use of windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform," *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, no. 1, 1978.
- [9] Welch, P. D., "The use of Fast Fourier Transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms", *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-15, pp. 70-73.