

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

(5^ο Εξάμηνο, Χειμερινό 2012)

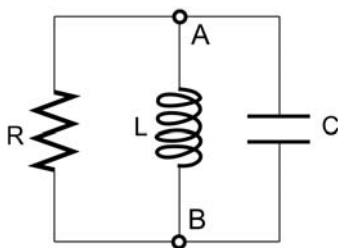
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

Άσκηση 1.

Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος, όπου $R_1=2 \text{ k}\Omega$, $C=5\mu\text{F}$, $L=10 \text{ mH}$, ενώ η θερμοκρασία είναι $T=300^0\text{K}$ (και η σταθερά Boltzmann δίνεται ίση με $k=1,38 \times 10^{-23} \text{ Joule/K}$).

(α) Να υπολογίσετε στην έξοδο AB την πυκνότητα φάσματος ισχύος του θορύβου και να τη σχεδιάσετε.

(β) Να υπολογίσετε στην έξοδο AB τη μέση τετραγωνική τιμή της τάσης θορύβου.



Άσκηση 2.

Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι και με τη βοήθειά του ορίζουμε τη διαδικασία $x(t)$ ως εξής: Αν το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού είναι i ($i=1,2,3$), θεωρούμε ότι προκύπτει το δείγμα $x_i(t)$, όπου οι συναρτήσεις $x_i(t)$ ορίζονται μόνο μέσα στο διάστημα $[0,4]$ ως εξής:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= t \\x_2(t) &= t^2 \\x_3(t) &= t^4\end{aligned}$$

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $E[x(t)]$, καθώς και τη χρονική μέση τιμή κάθε δείγματος, δηλαδή τα $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

(β) Για τη συνάρτηση κατανομής $F(x,t)=\text{Pr}\{X(t) \leq x\}$, να κάνετε τα διαγράμματα των συναρτήσεων $F(x,0)$, $F(x,1)$, $F(x,2)$ και $F(x,3)$ ως προς x .

Άσκηση 3.

Δίνεται το σήμα $x_\Theta(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, όπου η γωνία Θ είναι τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, \pi/10]$.

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του σήματος. Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό που προκύπτει από τη μέση τιμή των δύο ακραίων τιμών του σήματος, δηλαδή αφού υπολογίσετε

το $\varphi(t) = \frac{1}{2}[x_0(t) + x_{\pi/10}(t)]$, να υπολογίσετε το πηλίκο της μέγιστης τιμής του $E[x_\Theta(t)]$ προς

τη μέγιστη τιμή του $\varphi(t)$.

(β) Να υπολογίσετε την αυτοσυσχέτιση του σήματος.

(γ) Να αποφανθείτε αν το σήμα είναι στάσιμο με την ευρεία έννοια.

Άσκηση 4.

Θεωρείστε ένα τυχαίο τηλεπικοινωνιακό σήμα που αναπαρίσταται από μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ που παίρνει τιμές ± 5 . Θεωρείστε ότι $X(0) = \pm 5$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και ότι η $X(t)$ αλλάζει πολικότητα με την εμφάνιση ενός γεγονότος σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $N(t)$ ρυθμού a (υποθέτουμε ότι $N(0) = 0$).

Υπολογίστε:

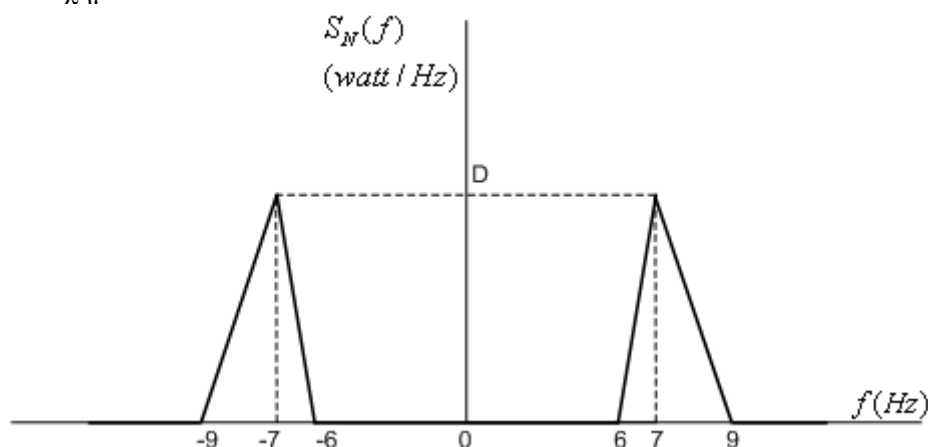
(α) Τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (probability mass function) της $X(t)$.

(β) Τη μέση τιμή της $X(t)$.

(γ) Τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) $R_X(t_1, t_2)$ και αυτοδιασποράς (autocovariance function) $C_X(t_1, t_2)$ της $X(t)$. Σχολιάστε τη συσχέτιση δειγμάτων της $X(t)$ καθώς η διαφορά των χρόνων ανάμεσά τους αυξάνει.

Άσκηση 5.

Η πυκνότητα φάσματος ισχύος θορύβου στενής ζώνης $n(t)$ είναι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(α) Βρείτε και σχεδιάστε τις πυκνότητες φάσματος ισχύος της συμφασικής και ορθογωνικής συνιστώσας του $n(t)$.

(β) Βρείτε και σχεδιάστε τις ετεροφασματικές πυκνότητες.

Άσκηση 6.

Θεωρείστε στοχαστική ανέλιξη $X(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t + \Theta)$, όπου f_c είναι σταθερά, ενώ A και Θ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στα διαστήματα $(-1, 1)$ και $(0, 2\pi)$ αντιστοίχως.

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X(t)]$ και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_X(t_1, t_2)$ της στοχαστικής ανέλιξης $X(t)$. Είναι η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ στατική με την ευρεία έννοια; Αιτιολογίστε.

(β) Έστω $Y(t)$ είναι η στοχαστική ανέλιξη, η οποία προκύπτει στην έξοδο διάταξης κρουστικής απόκρισης $h(t) = \text{sgn}(t) + \exp(-at) \cdot u(t)$, όπου $a > 0$, εάν εφαρμοστεί στην είσοδό της διάταξης αυτής η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$. Υπολογίστε και σχεδιάστε την πυκνότητα φάσματος ισχύος της στοχαστικής ανέλιξης $Y(t)$.

Άσκηση 7.

Θεωρείστε δυαδική τυχαία μεταβλητή X , η οποία λαμβάνει τις τιμές -1 και $+1$ με ίση πιθανότητα. Στην τυχαία αυτή μεταβλητή προστίθεται θόρυβος Gauss που αναπαριστάται με τυχαία μεταβλητή N , η οποία ακολουθεί κατανομή Gauss μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς σ^2 . Προκύπτει επομένως τυχαία μεταβλητή $Y = X + N$.

Ζητείται να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y .

Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι ίση με τη συνέλιξη των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και N .

Άσκηση 8.

Θεωρείστε εργοδική στοχαστική ανέλιξη $X(t) = A \cos(2\pi Ft + \Theta)$, όπου A είναι σταθερά, ενώ F και Θ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στα διαστήματα $[F_l, F_h]$ και $[0, 2\pi]$ αντιστοίχως.

(α) Να αποδειχθεί ότι η αυτοσυσχέτιση της στοχαστικής ανέλιξης $X(t)$, δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$R_x(t + \tau, t) = R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} E[\cos 2\pi F \tau] = \frac{A^2}{4} \int_{-F_h}^{-F_l} \frac{1}{F_h - F_l} e^{j2\pi f \tau} df + \frac{A^2}{4} \int_{F_l}^{F_h} \frac{1}{F_h - F_l} e^{j2\pi f \tau} df$$

(β) Να υπολογιστεί η πυκνότητα φάσματος ισχύος της στοχαστικής ανέλιξης $X(t)$.