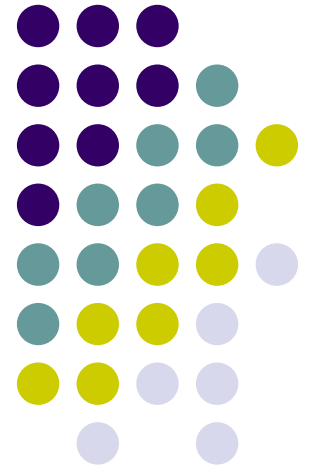


Διαμόρφωση Συχνότητας

Frequency Modulation (FM)



Τι συμβαίνει με τις γραμμικές διαμορφώσεις;



- Στη **γραμμική διαμόρφωση** CW (Carrier Wave) δηλαδή, AM, DSB, SSB, VSB
 - Το πλάτος ενός ημιτονικού φέροντος μεταβάλλεται σύμφωνα με την πληροφορία
 - Το διαμορφωμένο σήμα είναι μια μετατοπισμένη σε συχνότητα εκδοχή του διαμορφώνοντα σήματος
 - τα φάσματα μοιάζουν
 - Το εύρος ζώνης μετάδοσης είναι δεν υπερβαίνει το διπλάσιο του εύρους ζώνης του σήματος $B \leq 2W$

Γραμμικές διαμορφώσεις και θόρυβος



- Όπως θα δούμε στη συνέχεια, δεν υπάρχει βελτίωση σηματοθορυβικής σχέσης
 - Η σηματοθορυβική σχέση δεν μπορεί να είναι καλύτερη από αυτή της μετάδοσης στη βασική ζώνη
 - Για να βελτιωθεί η σηματοθορυβική σχέση πρέπει να αυξηθεί η ισχύς εκπομπής



Τι είναι διαμόρφωση γωνίας;

- Στις **διαμορφώσεις γωνίας** (FM, PM) το πλάτος του φέροντος διατηρείται σταθερό
 - Το σήμα μεταβάλλει τη συχνότητα ή φάση το φέροντος
- Είναι μη γραμμικές
 - Δεν υπάρχει απλή σχέση μεταξύ φάσματος μετάδοσης και φάσματος σήματος
 - Δημιουργούνται νέες συχνότητες
- Προκύπτει **βελτίωση** της επίδοσης σε σχέση με το θόρυβο και τις παρεμβολές

Διαμόρφωση γωνίας και θόρυβος



- Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η σηματοθορυβική σχέση στην έξοδο γίνεται πολύ καλύτερη όταν αυξάνει το εύρος ζώνης
 - Το εύρος ζώνης είναι, εν γένει, μεγαλύτερο του διπλάσιου του εύρους ζώνης του σήματος $B > 2W$
- Στις διαμορφώσεις γωνίας μπορούμε να ανταλλάξουμε εύρος ζώνης με σηματοθορυβική σχέση
 - διατηρώντας την ισχύ σταθερή

Τι χρειάζεται η διαμόρφωση γωνίας;



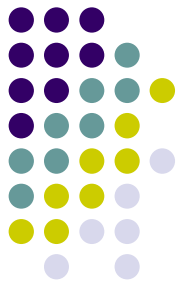
- Καλύτερη απαλοιφή θορύβου
 - Βελτίωση της πιστότητας του σήματος
- Εφαρμογές
 - Ραδιοφωνία FM
 - Ήχος τηλεοπτικού σήματος
 - Ασύρματη (κινητή) επικοινωνία
 - Συνθεσάιζερ (YAMAHA)
 - Εγγραφή αναλογικού βίντεο σε ταινία (VCR)
 - Π.χ. το σήμα φωτεινότητας στο VHS

Ιστορικά στοιχεία

- Η διαμόρφωση FM αποτελεί εφεύρεση του E. Armstrong (1933)
 - Έχει εφεύρει και τον υπερ-ετερόδυνο δέκτη
- Η εισαγωγή και κυριάρχηση της ραδιοφωνίας FM καθυστέρησε πολύ
 - Απειλήσε με εξαφάνιση τη ραδιοφωνία AM (Disruptive technology)
 - Η FCC μετέφερε τη μπάντα των FM από την περιοχή 42 μέχρι 50 MHz στην περιοχή 88 μέχρι 108 MHz ώστε να υπάρξει χώρος για κανάλια TV



EDWIN H. ARMSTRONG
1890 - 1954



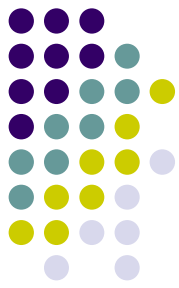


Ορισμοί

- Φέρον $c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi_c] = A_c \cos[\theta_c(t)]$
- Διαμορφωμένο σήμα

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] = A_c \operatorname{Re}\{\exp(j\theta_i(t))\}$$

- Η διαμόρφωση γίνεται **στον εκθέτη ή στη γωνία**



Ορισμοί (συν)

- Μέση συχνότητα για αύξουσα $\theta_i(t)$ είναι

$$f_{\Delta t}(t) = \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t}$$

- Στιγμιαία συχνότητα

$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

- Η στιγμιαία γωνία στην περίπτωση του φέροντος

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c$$

Διαμόρφωση φάσης

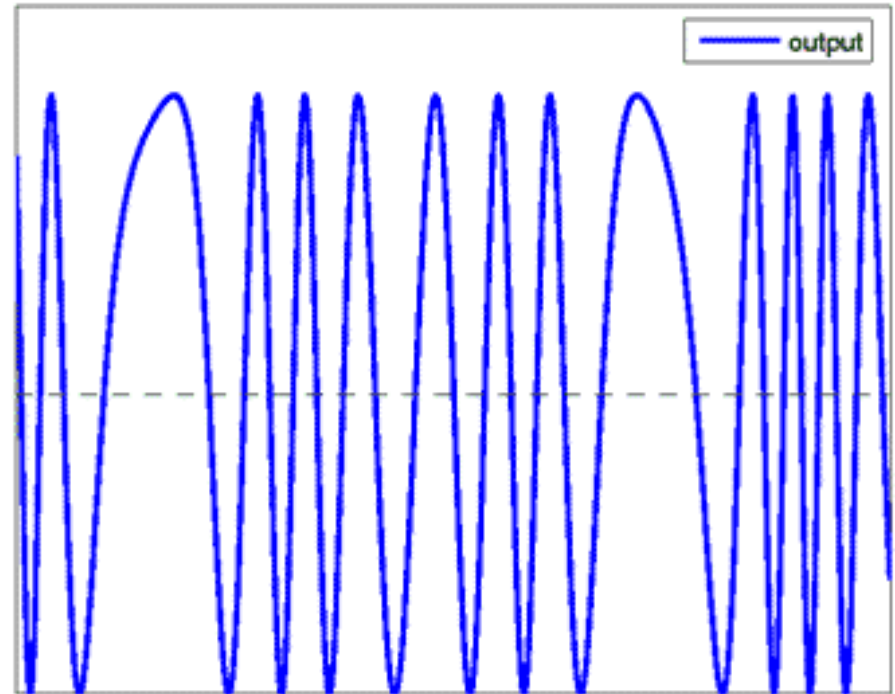
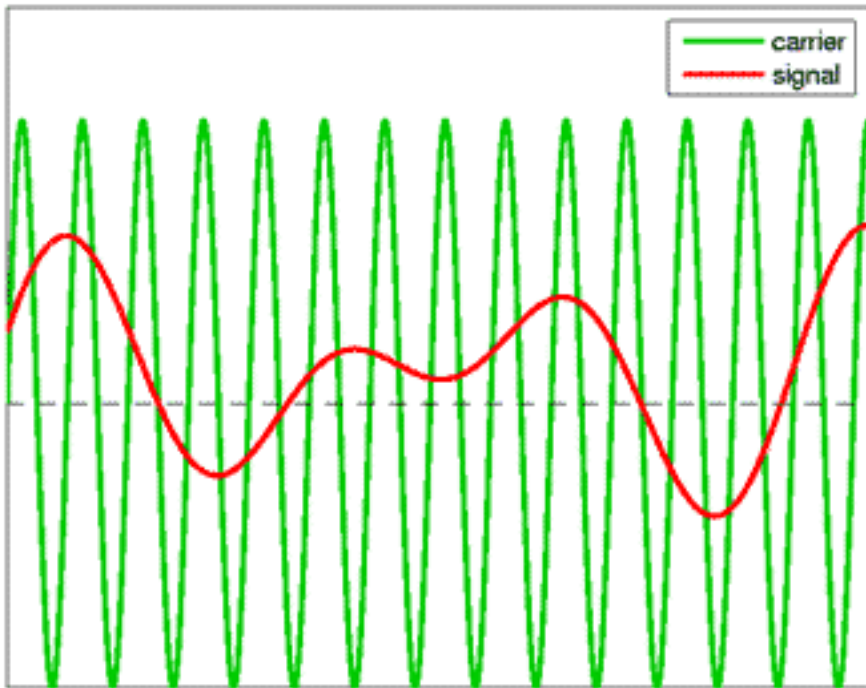
Phase Modulation (PM)



- Η φάση του διαμορφωμένου σήματος είναι ανάλογη του προς διαμόρφωση σήματος
$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$
- Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο αδιαμόρφωτο φέρον
- Η σταθερά k_p είναι η ευαισθησία φάσης
- Το διαμορφωμένο σήμα PM είναι

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_p m(t) \right]$$

Διαμόρφωση φάσης (PM)



Διαμόρφωση συχνότητας

Frequency Modulation (FM)



- Η στιγμιαία συχνότητα είναι ανάλογη του προς διαμόρφωση σήματος

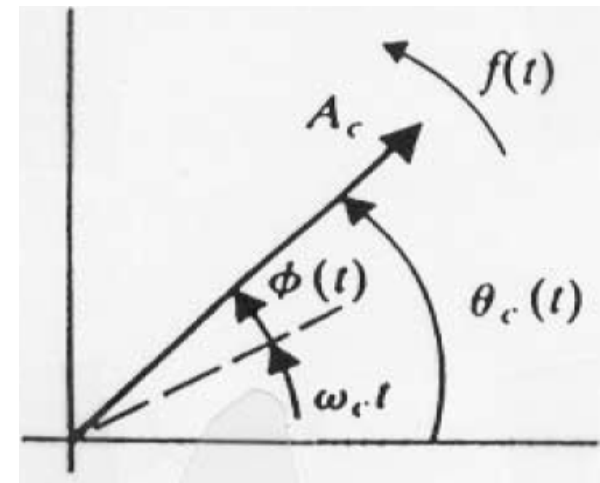
$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

- Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο αδιαμόρφωτο φέρον
- Η σταθερά k_f είναι η **ευαισθησία συχνότητας**
- Η στιγμιαία γωνία είναι

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

- Το διαμορφωμένο σήμα FM είναι

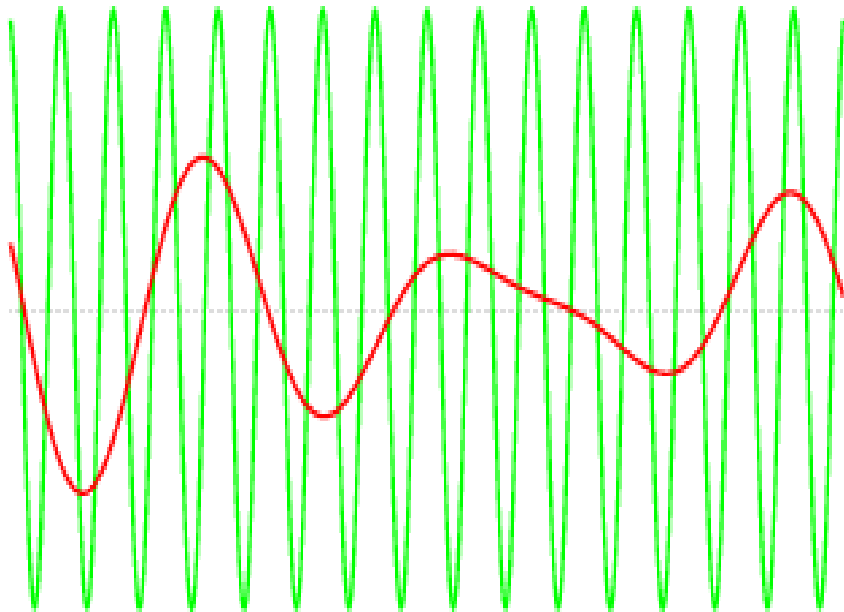
$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right]$$



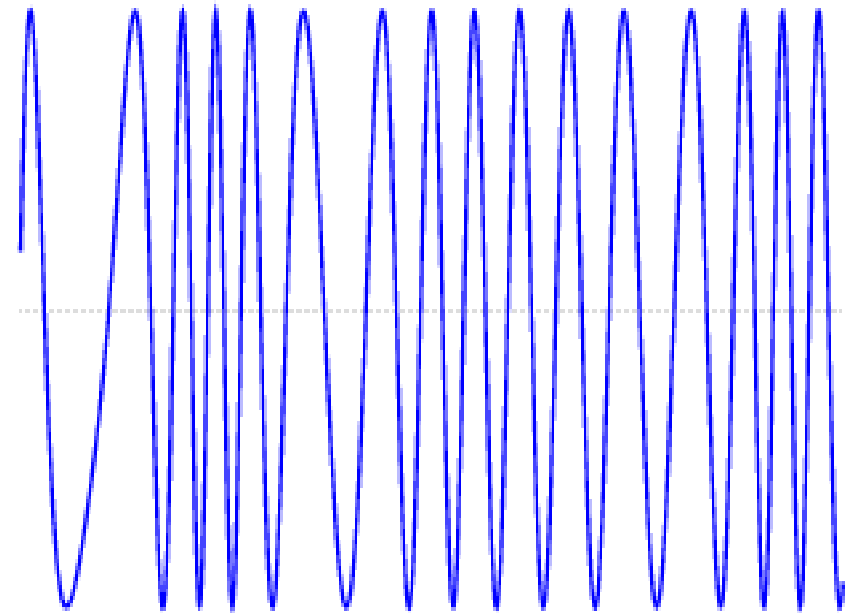
Διαμόρφωση συχνότητας (FM)



carrier ———
signal ———



output ———



Χαρακτηριστικά διαμορφώσεων γωνίας (FM, PM)



- Τα σήματα FM και PM είναι παρόμοια
- Οι μηδενισμοί δεν ισαπέχουν
- Το πλάτος του διαμορφωμένου σήματος είναι σταθερό
 - Σταθερή ισχύς ανεξάρτητα από το σήμα προς διαμόρφωση

$$P = \frac{A_c^2}{2}$$



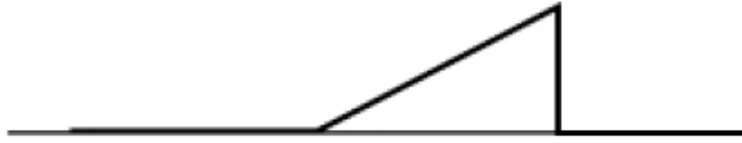
Μηδενισμοί

- Στη διαμόρφωση γωνίας (FM, PM) η πληροφορία του σήματος μεταφέρεται στους **μηδενισμούς (zero crossings)** του διαμορφωμένου σήματος
- Βλέποντας σε παλμογράφο το διαμορφωμένο σήμα, δεν είναι εύκολο να μαντέψουμε το είδος διαμόρφωσης
 - Το πλάτος είναι σταθερό
 - Στη συχνότητα εμφανίζονται πυκνώματα και αραιώματα

Μηδενισμοί



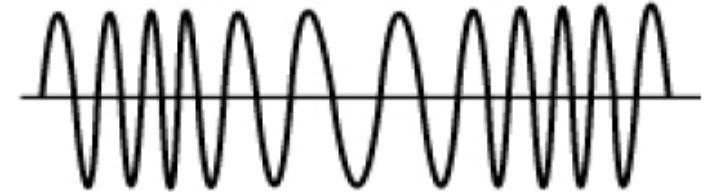
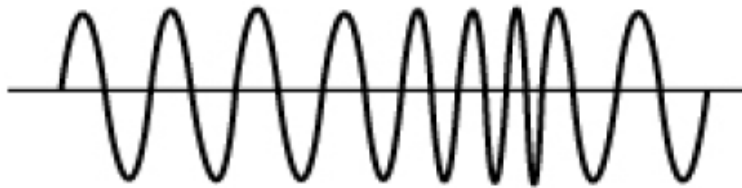
Modulating
signal



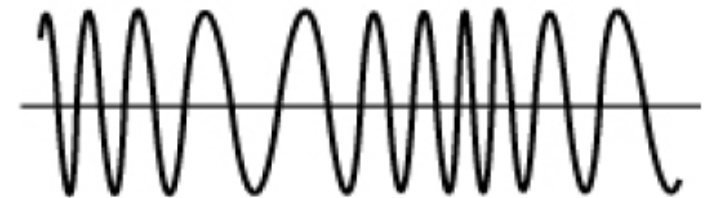
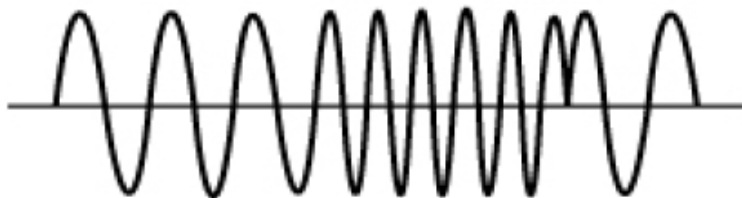
AM



FM



PM





Στιγμιαία φάση/συχνότητα

$$\phi_i(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

Μπορούμε να αγνοήσουμε την αρχική τιμή της φάσης και να χρησιμοποιήσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

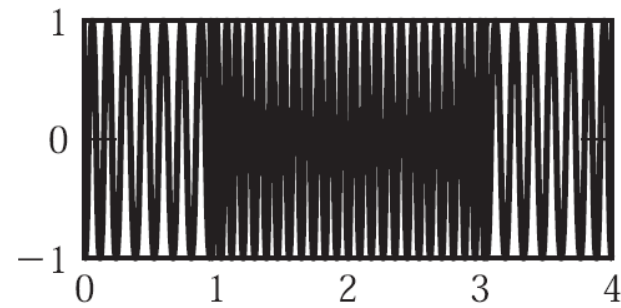
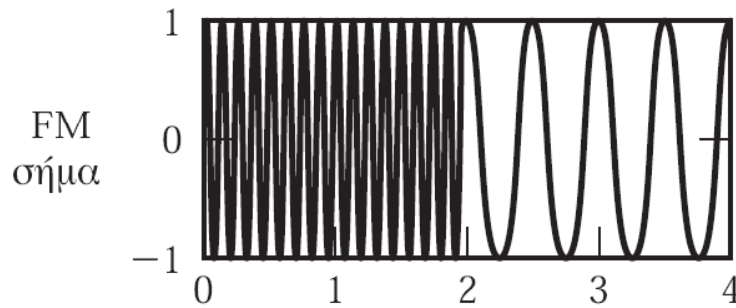
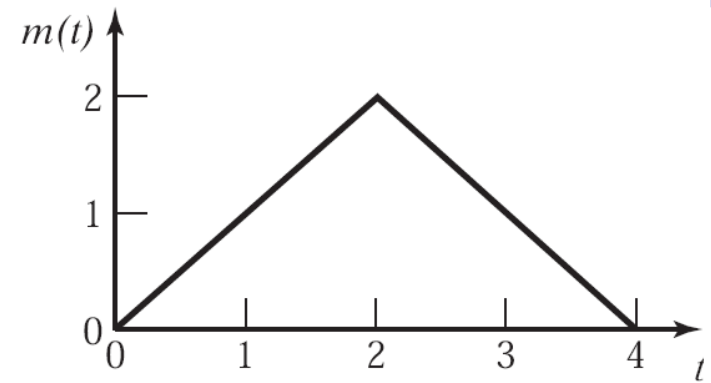
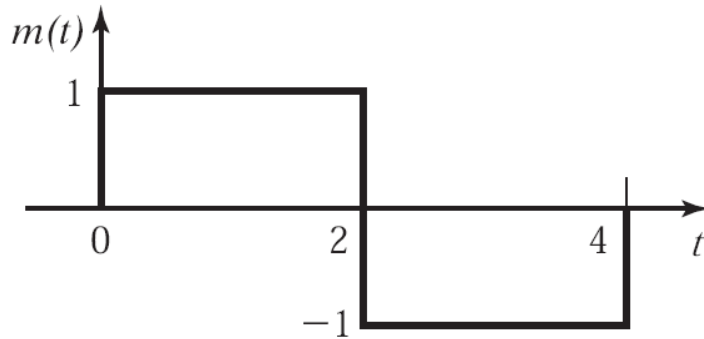
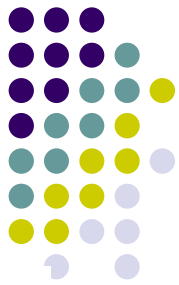
$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta_i(t) = \begin{cases} f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} & \text{PM} \\ f_c + k_f m(t) & \text{FM} \end{cases}$$



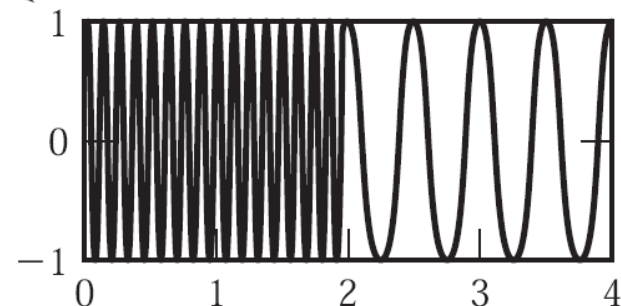
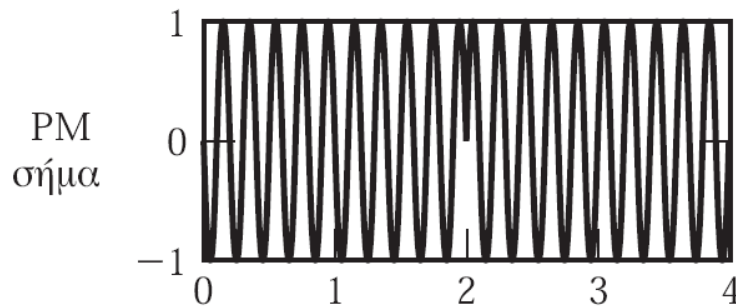
Ισοδυναμία FM και PM

- Το διαμορφωμένο σήμα FM που προκύπτει από την **παράγωγο** του προς διαμόρφωση σήματος αντιστοιχεί σε διαμορφωμένο σήμα PM
- Το διαμορφωμένο σήμα PM που προκύπτει από το **ολοκλήρωμα** του προς διαμόρφωση σήματος αντιστοιχεί σε διαμορφωμένο σήμα FM

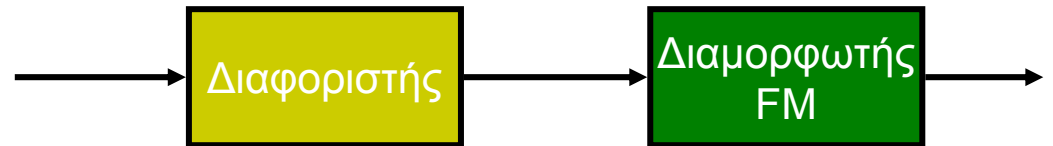
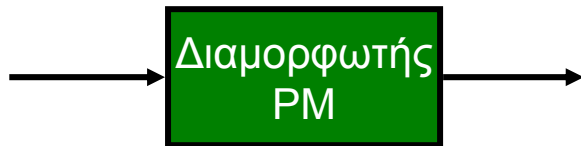
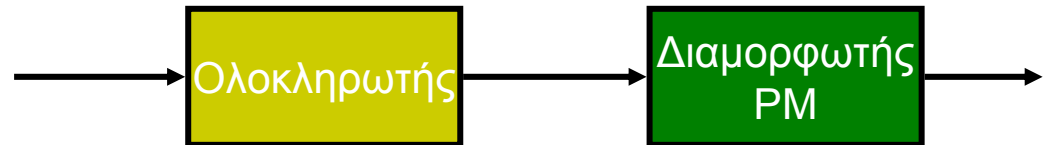
Ισοδυναμία FM και PM



Ισοδύναμα



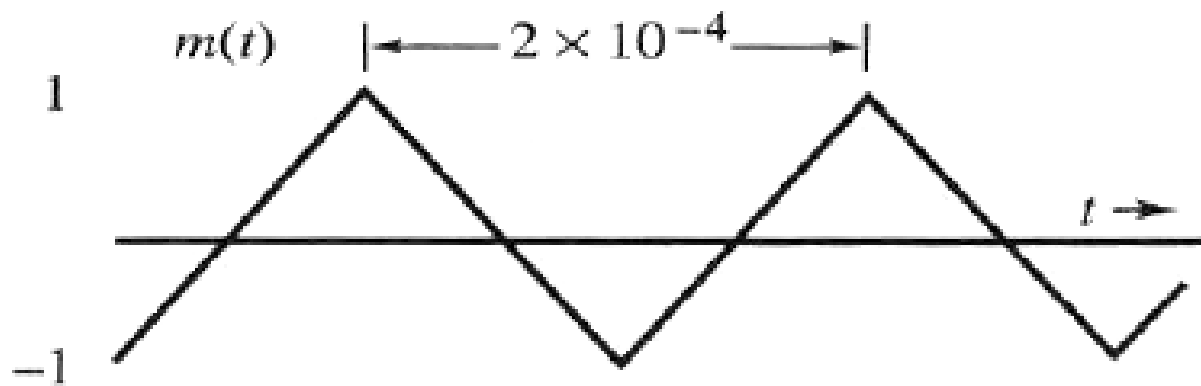
Ισοδυναμία FM και PM





Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

- Ποια είναι τα σήματα FM και PM που παράγονται από το ψηφιακό σήμα $m(t)$ όταν $k_f=10^5$, $k_p=10\pi$ και $f_c=100$ MHz;





Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

- Περίπτωση FM

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) = 10^8 + 10^5 m(t)$$

$$f_i|_{\min} = 99,9 \text{ MHz}, \quad f_i|_{\max} = 100,1 \text{ MHz}$$

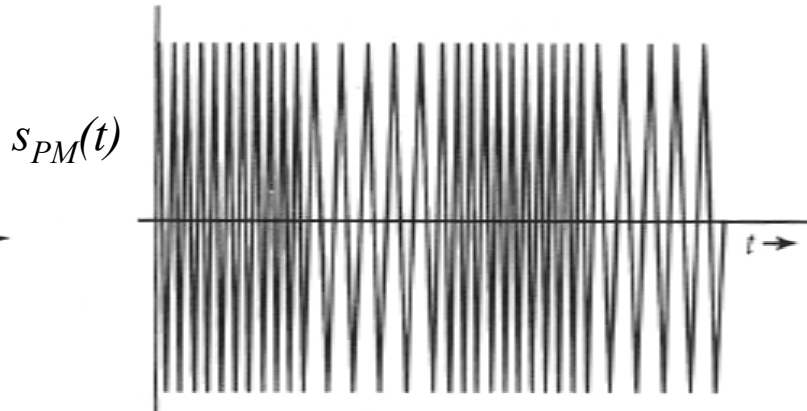
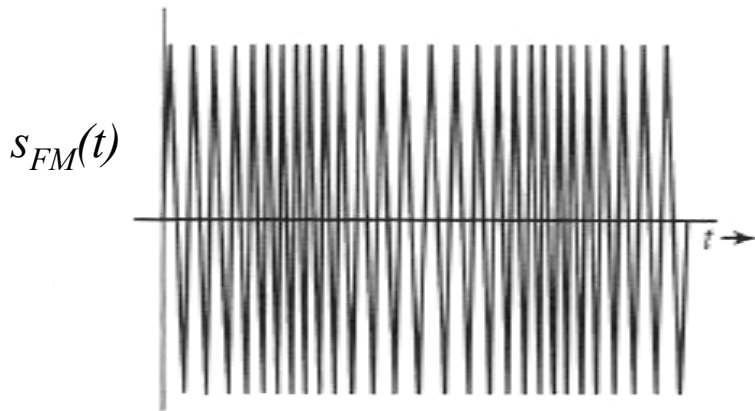
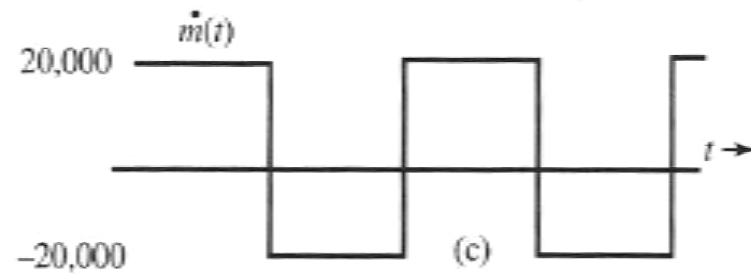
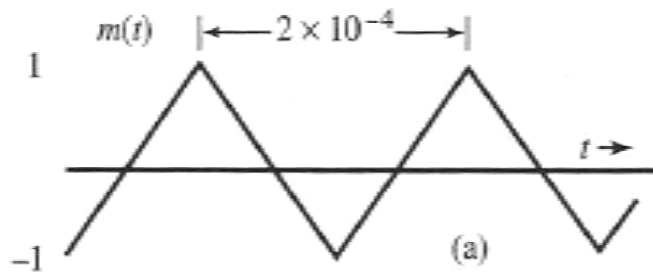
- Περίπτωση PM

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} = 10^8 + 5\dot{m}(t)$$

$$f_i|_{\min} = 99,9 \text{ MHz}, \quad f_i|_{\max} = 100,1 \text{ MHz}$$



Σήμα FM και PM



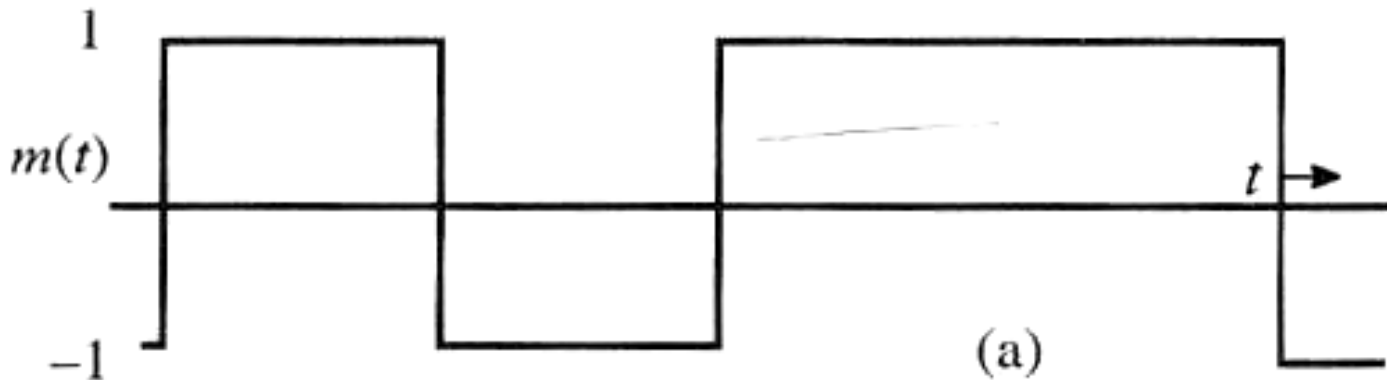
Αύξηση συχνότητας

Μείωση συχνότητας



Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

- Ποια είναι τα σήματα FM και PM που παράγονται από το ψηφιακό σήμα $m(t)$ όταν $k_f=10^5$, $k_p=\pi/2$ και $f_c=100$ MHz;





Σχεδιάστε το σήμα FM ή PM

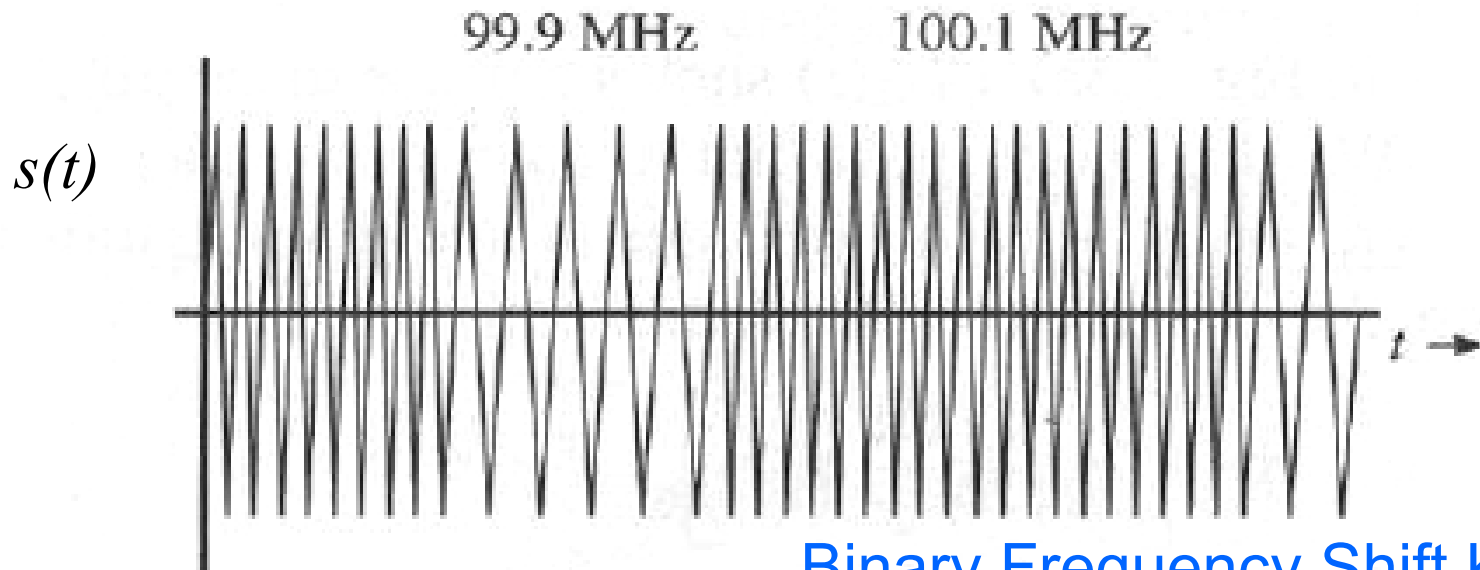
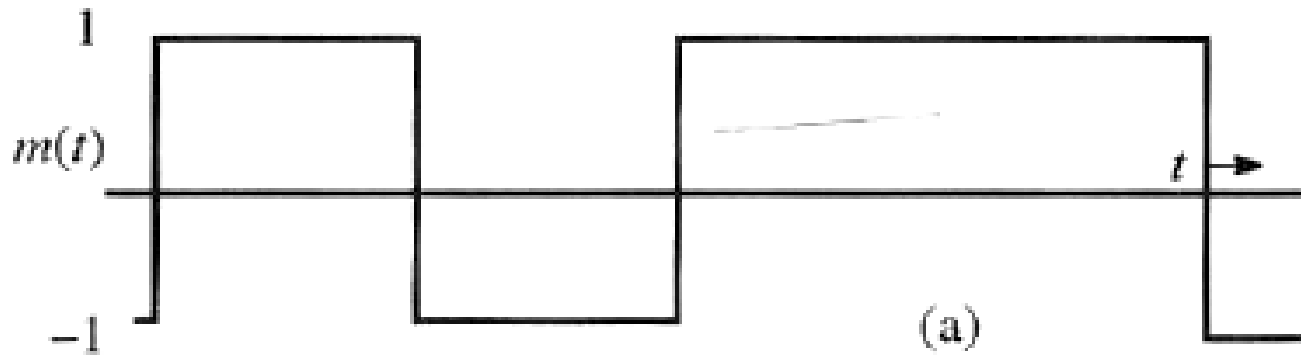
- Περίπτωση FM

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) = 10^8 + 10^5 m(t)$$

- Περίπτωση PM

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} = 10^8 + \frac{1}{4} \dot{m}(t)$$

Σήμα FM

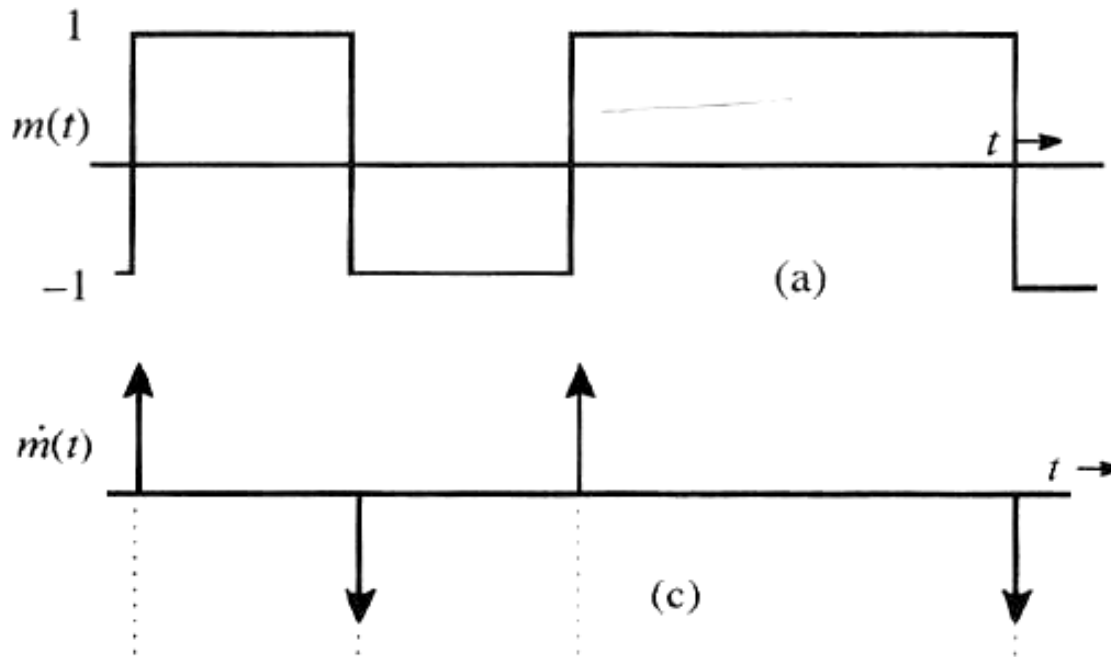


Binary Frequency Shift Keying



Σήμα ΡΜ

- Οι ασυνέχειες του σήματος δημιουργούν συναρτήσεις δέλτα στην παράγωγό του



- Τι συμβαίνει τότε;



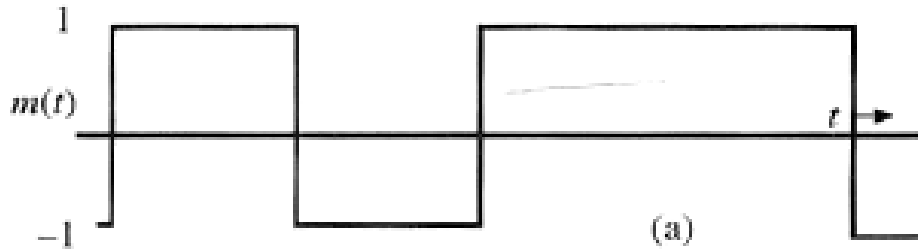
Σήμα PM

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + \frac{\pi}{2} m(t) \right]$$
$$= \begin{cases} A_c \sin [2\pi f_c t] & \text{όταν } m(t) = -1 \\ -A_c \sin [2\pi f_c t] & \text{όταν } m(t) = 1 \end{cases}$$

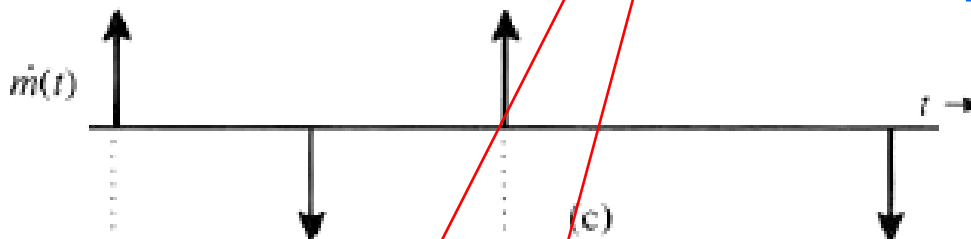
- Το διαμορφωμένο σήμα αντιστρέφει το πρόσημο (+sin σε -sin) όπου το $m(t)$ παρουσιάζει ασυνέχεια
- Αυτό μπορεί να συμβεί οποτεδήποτε, αλλά για ευκολία το σημειώνουμε στους μηδενισμούς του φέροντος



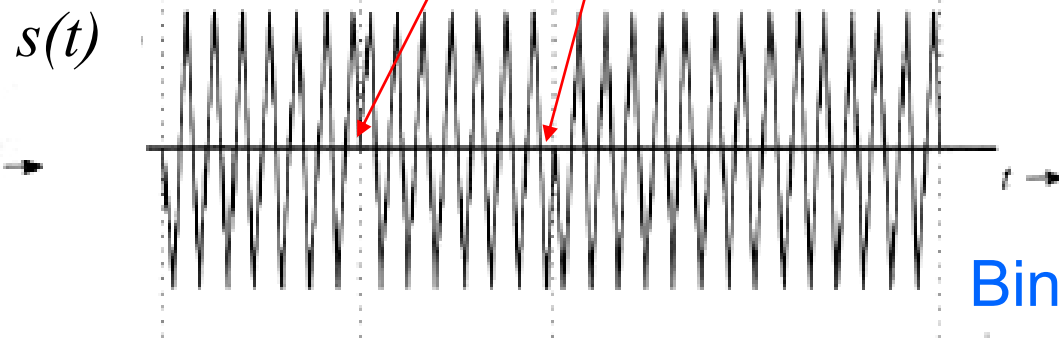
Σήμα ΡΜ



- Η συχνότητα είναι παντού η ίδια
- Η φάση αλλάζει κατά $\pm\pi/2$



100 MHz

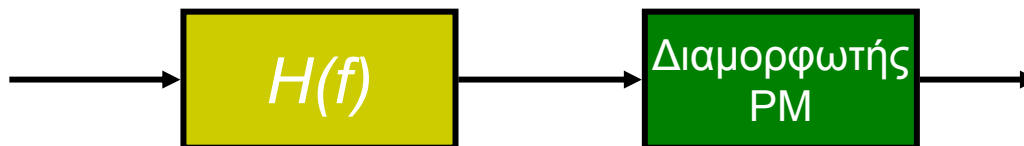


Binary Phase Shift Keying

Γενικευμένη διαμόρφωση γωνίας



- Ο διαμορφωτής φάσης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γενικό εργαλείο
 - Εάν προηγηθεί ένας διαφοριστής παράγει διαμόρφωση FM
 - Εάν προηγηθεί κάποιο γραμμικό σύστημα παράγεται μια μείξη FM/PM
 - Το σήμα που εκπέμπουν οι σταθμοί FM είναι μια τέτοια περίπτωση



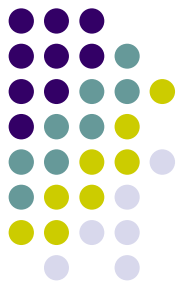


Απόκλιση φάσης

- **Απόκλιση φάσης** (phase deviation) είναι η μέγιστη διαφορά της φάσης του διαμορφωμένου σήματος σε σχέση με τη φάση του αδιαμόρφωτου

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \max \{|\phi_i(t)|\} \\ &= \max \{|\theta_i(t) - 2\pi f_c t|\} \\ &= \max \{|k_p m(t)|\} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Delta\phi = A_m k_p, A_m = \max \{|m(t)|\}$$



Απόκλιση συχνότητας

- **Απόκλιση συχνότητας** (frequency deviation) είναι η μέγιστη διαφορά της στιγμιαίας συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος σε σχέση με τη συχνότητα του αδιαμόρφωτου

$$\Delta f = \max \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta_i(t) - f_c \right| \right\}$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi_i(t) \right| \right\}$$

$$= \max \left\{ |k_f m(t)| \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta f = A_m k_f, A_m = \max \left\{ |m(t)| \right\}$$

Κανονικοποιημένο σήμα προς διαμόρφωση



- Διαμόρφωση φάσης

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \Delta\phi x(t)]$$

- Διαμόρφωση συχνότητας

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right]$$

- όπου $x(t)$ το κανονικοποιημένο προς διαμόρφωση σήμα

$$x(t) = \frac{m(t)}{\max\{|m(t)|\}}$$

Κανονικοποιημένο σήμα προς διαμόρφωση



	Στιγμιαία φάση	Στιγμιαία συχνότητα
PM	$\Delta\phi x(t)$	$f_c + \frac{\Delta\phi}{2\pi} \dot{x}(t)$
FM	$2\pi\Delta f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$f_c + \Delta f x(t)$



Διαμόρφωση από απλό τόνο

- Έστω $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

- Διαμόρφωση φάσης

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \Delta\phi \cos(2\pi f_m t)] = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_p \cos(2\pi f_m t)]$$

- Διαμόρφωση συχνότητας

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t)\right] = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)]$$

- ΟΠΟΥ Ο δείκτης διαμόρφωσης β είναι

$$\beta = \begin{cases} \Delta\phi = k_p A_m & \text{PM} \\ \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m} & \text{FM} \end{cases}$$



Λόγος διαμόρφωσης

- Ο προηγούμενος ορισμός του δείκτη διαμόρφωσης μπορεί να γενικευθεί για αυθαίρετο σήμα προς διαμόρφωση ως εξής

$$D = \begin{cases} \Delta\phi_{\max} = k_p \max \{|m(t)|\} & \text{PM} \\ \frac{\Delta f_{\max}}{W} = \frac{k_f \max \{|m(t)|\}}{W} & \text{FM} \end{cases}$$

- όπου W είναι το εύρος ζώνης του σήματος προς διαμόρφωση



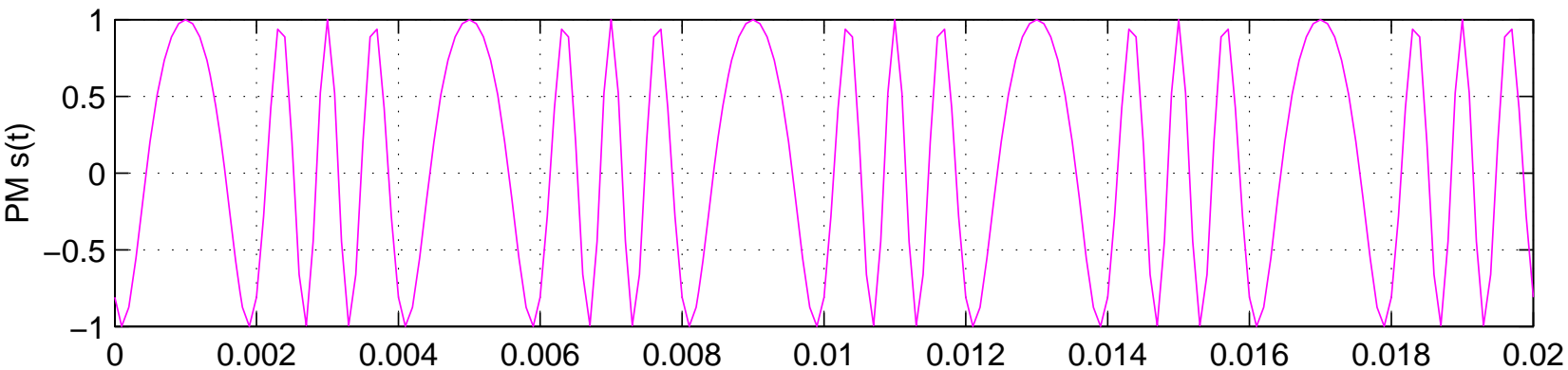
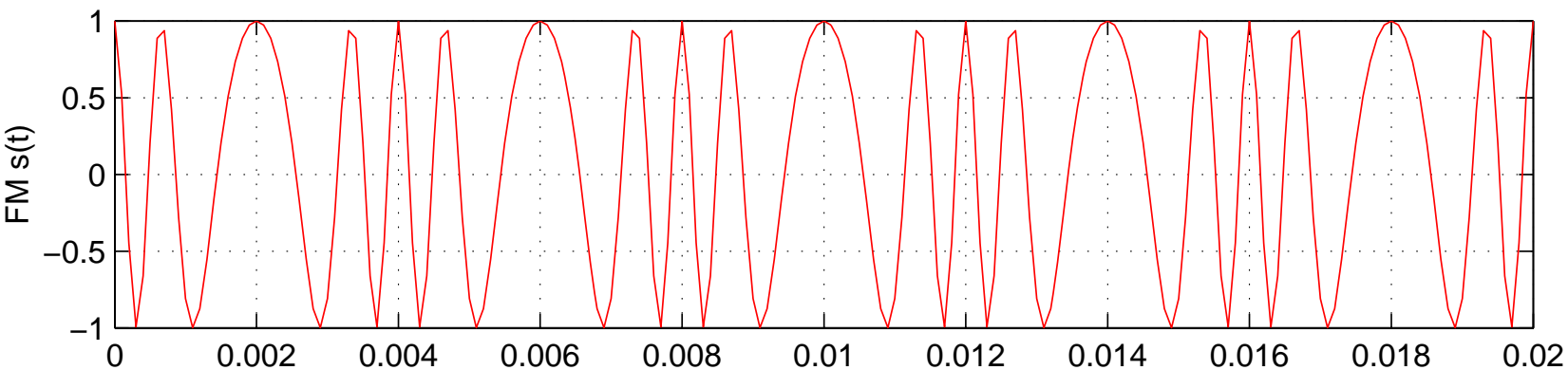
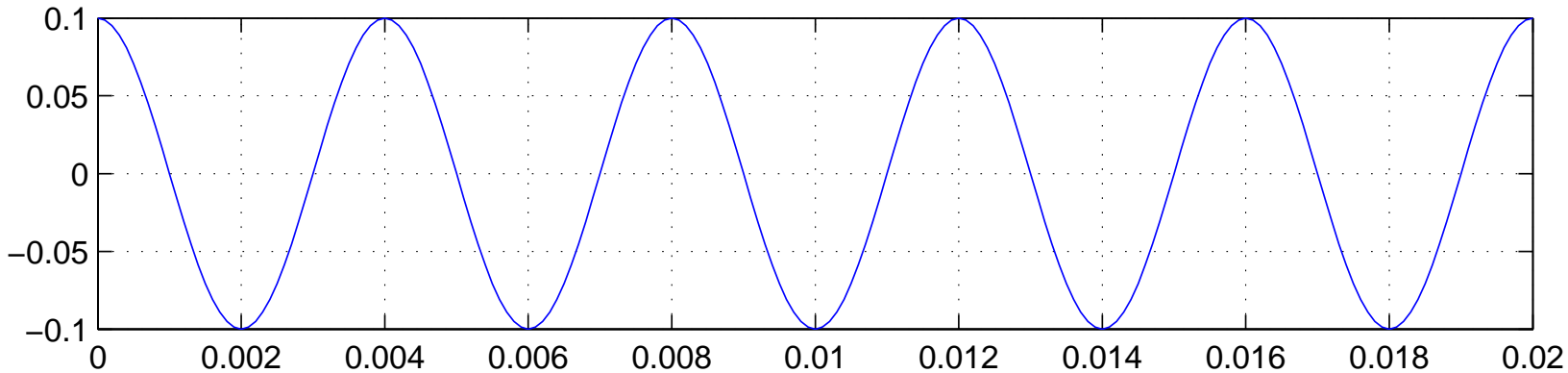
Φάσμα σήματος FM

- Είναι το εύρος ζώνης του σήματος FM το διπλάσιο της απόκλισης συχνότητας;

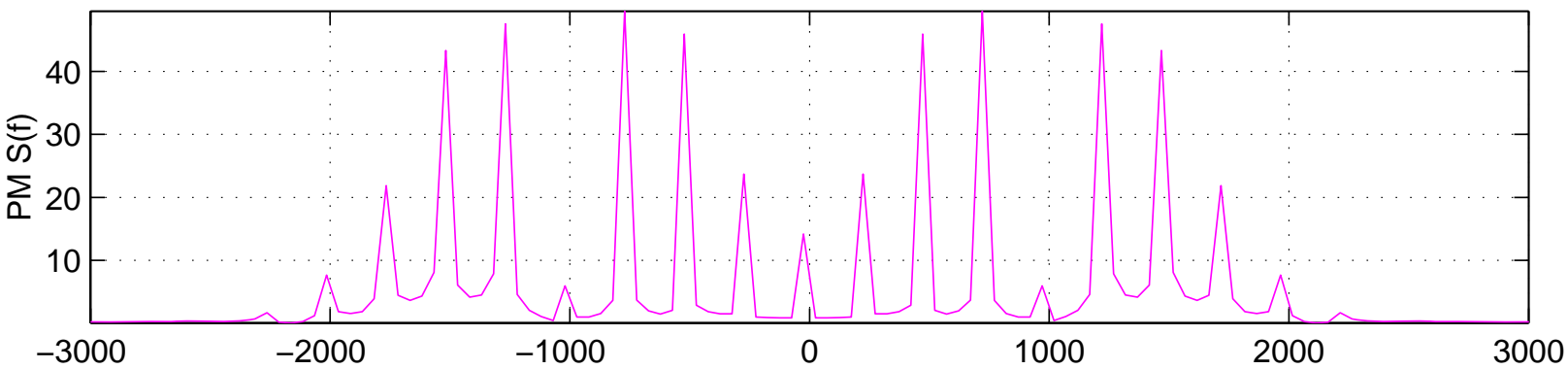
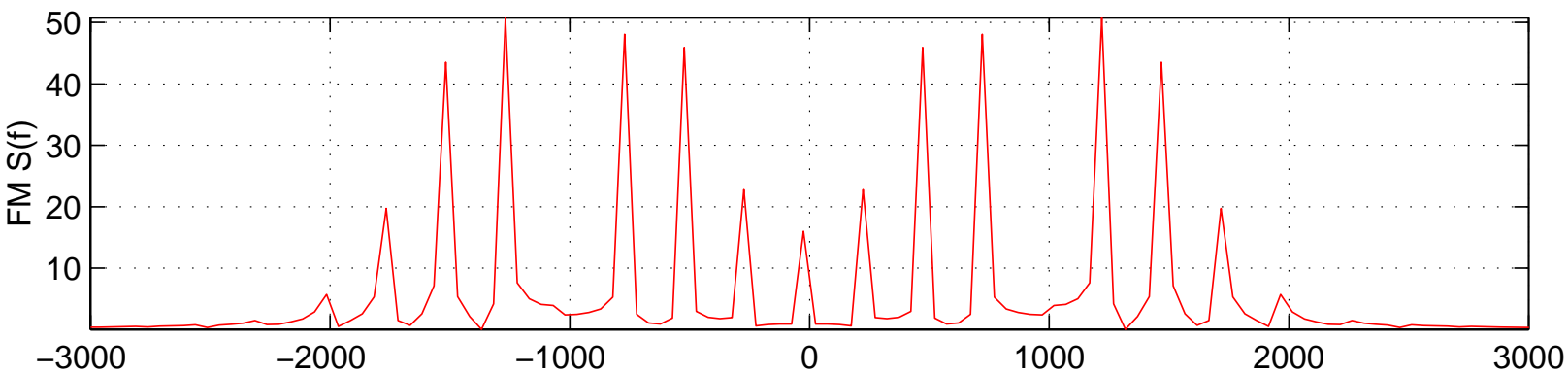
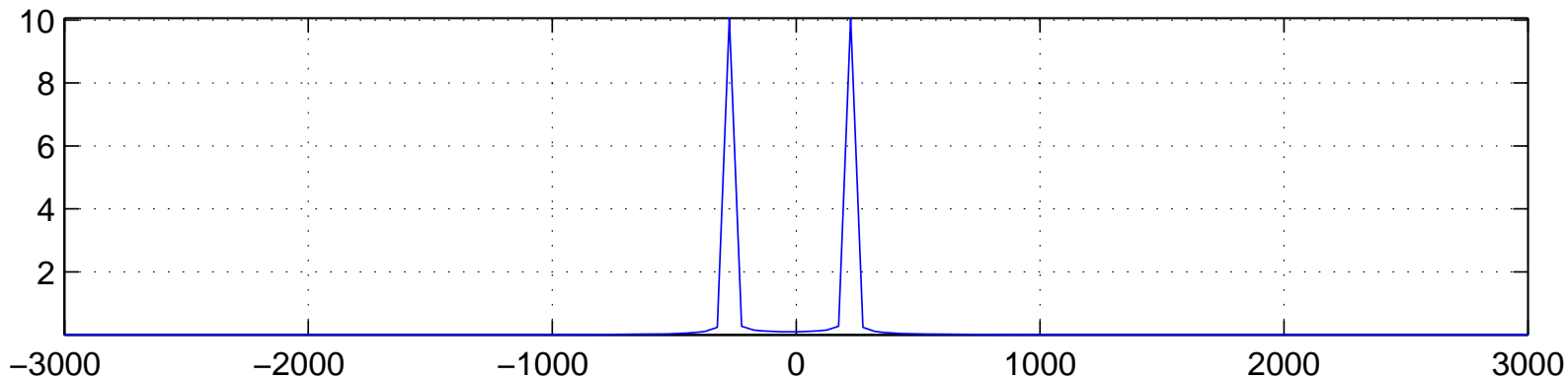
$$f_c - \Delta f \leq f_i \leq f_c + \Delta f$$

- **ΟΧΙ**
- Η στιγμιαία συχνότητα δεν είναι ισοδύναμη με το φάσμα

message $m(t)$

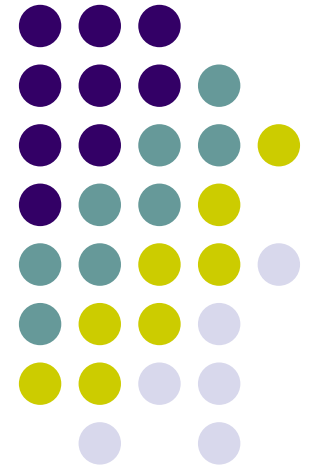


message spectrum $M(f)$



FM & PM στενής ζώνης

Narrowband FM & PM



Διαμόρφωση γωνίας στενής ζώνης



- Το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$s(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \phi(t)]$$

- όπου η στιγμιαία φάση είναι

$$\phi(t) = \begin{cases} \Delta\phi x(t) & \text{PM} \\ 2\pi\Delta f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

- Εάν $|\phi(t)| \ll 1$ έχουμε διαμόρφωση **στενής ζώνης**

Διαμόρφωση γωνίας ως ζωνοπερατό σήμα



- Αναπαράσταση ως ζωνοπερατό σήμα

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \\ &= A_c [\cos(2\pi f_c t) \cos(\phi(t)) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\phi(t))] \\ &= m_c(t) \cos(2\pi f_c t) - m_s(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

- όπου οι ορθογώνιες συνιστώσες είναι

$$m_c(t) = A_c \cos(\phi(t)) = A_c \left[1 - \frac{1}{2!} \phi^2(t) + \dots \right] \approx A_c$$

$$m_s(t) = A_c \sin(\phi(t)) = A_c \left[\phi(t) - \frac{1}{3!} \phi^3(t) + \dots \right] \approx A_c \phi(t)$$

Διαμόρφωση γωνίας στενής ζώνης



- Στην περίπτωση διαμόρφωσης στενής ζώνης

$$m_c(t) \approx A_c$$

$$m_s(t) \approx A_c \phi(t)$$

- οπότε το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα στενής ζώνης είναι

$$s(t) \approx A_c [\cos(2\pi f_c t) - \phi(t) \sin(2\pi f_c t)]$$



Φάσμα σήματος στενής ζώνης

- Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος στενής ζώνης είναι

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{jA_c}{2} [\Phi(f - f_c) - \Phi(f + f_c)]$$

- **Όπου**

$$\Phi(t) = \begin{cases} \Delta\phi X(t) & \text{PM} \\ -\frac{j\Delta f}{f} X(t) & \text{FM} \end{cases}$$

Διαμόρφωση στενής ζώνης από απλό τόνο



- Έστω $m(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_m t) & \text{FM} \\ A \sin(2\pi f_m t) & \text{PM} \end{cases}$

- Διαμόρφωση φάσης

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \left[\cos(2\pi f_c t) - \Delta\phi \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t) \right] \\ &= A_c \left[\cos(2\pi f_c t) - \beta_p \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t) \right] \end{aligned}$$

- Διαμόρφωση συχνότητας

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \left[\cos(2\pi f_c t) - \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t) \right] \\ &= A_c \left[\cos(2\pi f_c t) - \beta_f \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t) \right] \end{aligned}$$

Διαμόρφωση στενής ζώνης από απλό τόνο



- που τελικά απλοποιείται στην

$$s(t) = A_c \left[\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}\beta \cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \frac{1}{2}\beta \cos[2\pi(f_c - f_m)t] \right]$$

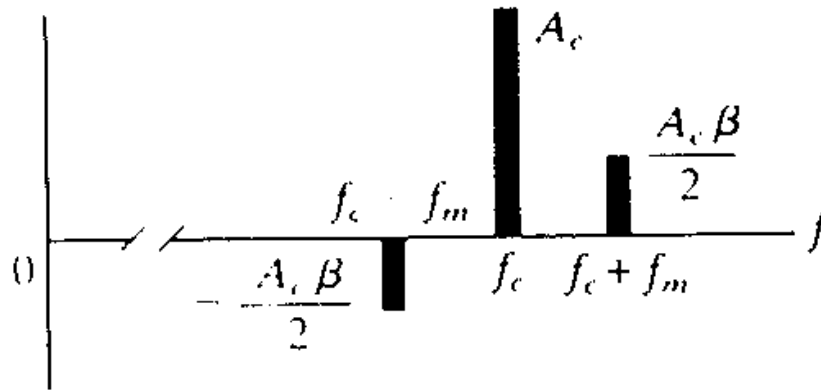
- Όπου $\beta \ll 1$ ο εκάστοτε δείκτης διαμόρφωσης

$$\beta = \begin{cases} \Delta\phi = k_p A_m & \text{PM} \\ \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m} & \text{FM} \end{cases}$$

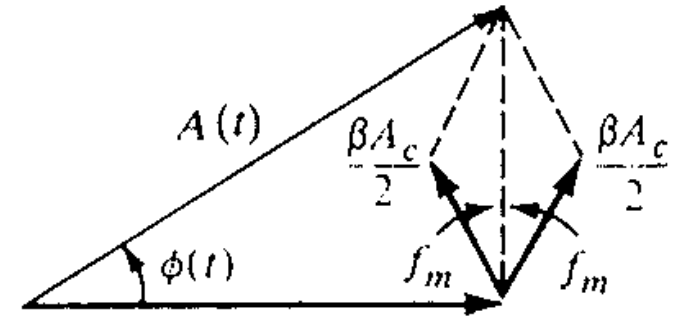
Αναπαράσταση με φασιθέτες



- **FM**

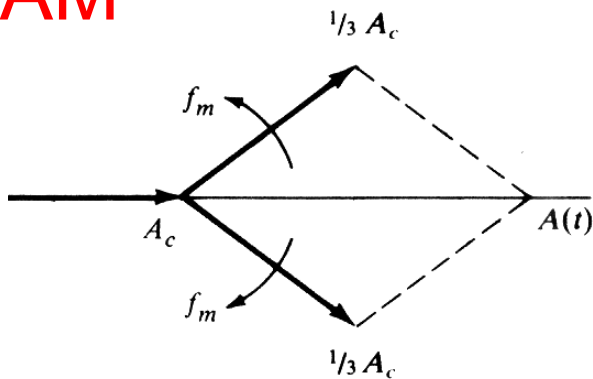


(a)



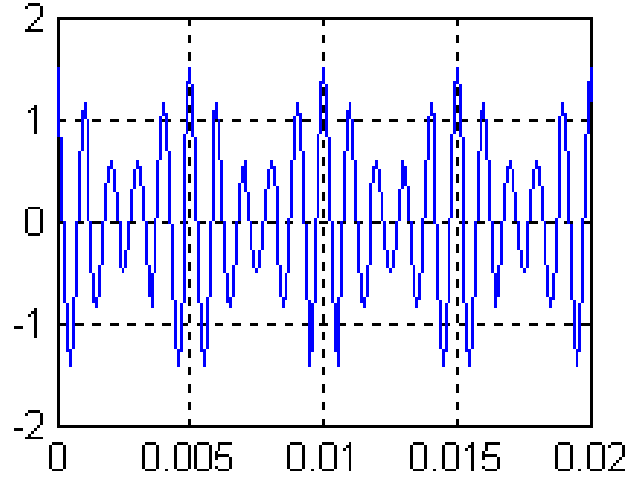
(b)

- **AM**

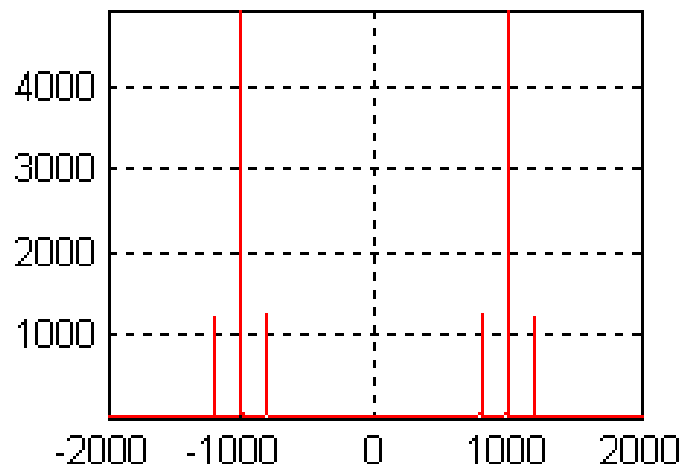




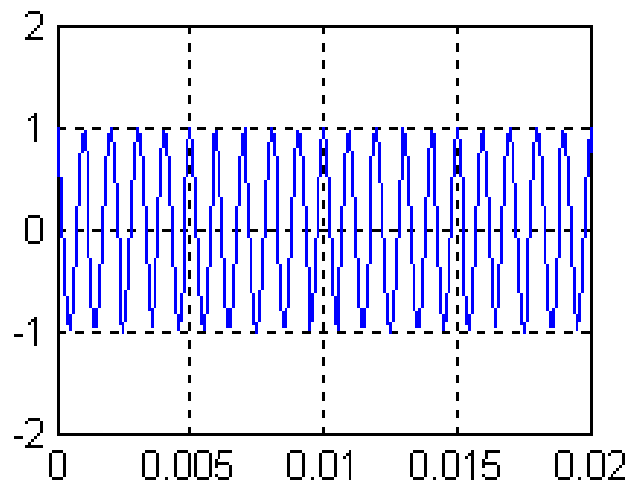
AM Signal



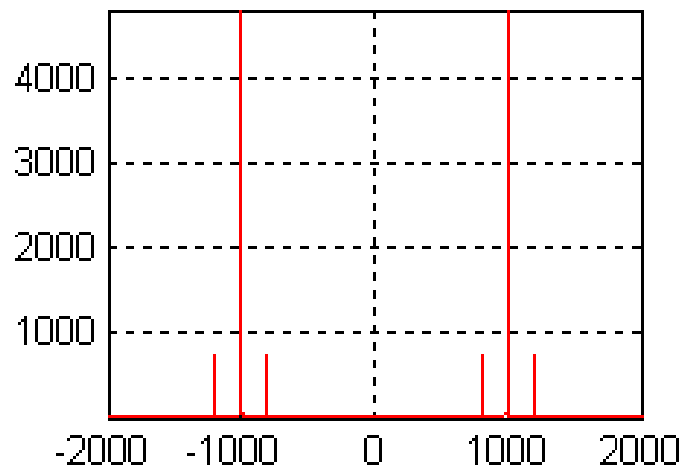
AM Signal spectrum



NBFM Signal



NBFM spectrum



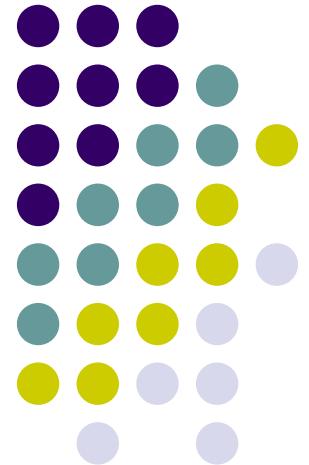


Συμπέρασμα

- Το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα στενής ζώνης είναι παρόμοιο με το σήμα AM
- Έχει εύρος ζώνης $2W$ διπλάσιο του σήματος προς διαμόρφωση

FM & PM ευρείας ζώνης

Broadband FM & PM





Φασματική ανάλυση

- Η μαθηματική αναπαράσταση του φάσματος στη γενική περίπτωση, ακόμη και για απλά σήματα, είναι δυσχερής λόγω των εμπλεκόμενων μη γραμμικοτήτων
- Επίσης, το διαμορφωμένο σήμα FM ή PM ευρείας ζώνης, εν γένει, δεν είναι περιοδικό
- Εντούτοις είναι δυνατή η ανάλυση σε αρμονικές συνιστώσες όταν το $m(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση
- Η απλούστερη περίπτωση είναι αυτή του ημιτονικού σήματος



Διαμόρφωση από απλό τόνο

- Όπως πριν για σήματα FM

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

- Ενώ για σήματα PM

$$m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$$

- Έτσι και στις δύο περιπτώσεις το διαμορφωμένο σήμα από απλό τόνο θα είναι

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$



Μιγαδική περιβάλλουσα

- Το διαμορφωμένο κατά FM σήμα $s(t)$ που προκύπτει από απλό τόνο σήμα δεν είναι περιοδικό (πλην εξαιρέσεων)

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \\ &= A_c \operatorname{Re}[\exp(j2\pi f_c t + j\beta \sin(2\pi f_m t))] \\ &= \operatorname{Re}[\tilde{s}(t) \exp(j2\pi f_c t)] \end{aligned}$$

- όμως η μιγαδική του περιβάλλουσα $\tilde{s}(t)$ είναι περιοδικό σήμα, άρα μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)]$$



Ανάλυση σε σειρά Fourier

- Ανάπτυξη της μιγαδικής περιβάλλουσας σε σειρά Fourier

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_m t)$$

- με συντελεστές

$$c_n = \int_{\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} \tilde{s}(t) \exp(-j2\pi n f_m t) dt = f_m A_c \int_{\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t) - j2\pi n f_m t] dt$$

$$= \frac{A_c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j(\beta \sin x - nx)] dx = A_c J_n(\beta)$$

- όπου $J_n(\beta)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης n με όρισμα το β

Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης



- Άρα $\tilde{s}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp(j2\pi n f_m t)$
- και επομένως

$$s(t) = A_c \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp[j2\pi(f_c + n f_m)t] \right]$$
$$= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t]$$

- οπότε το φάσμα σήματος FM είναι

$$S(f) = A_c \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp[j2\pi(f_c + n f_m)t] \right]$$
$$= \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$



Ιδιότητες συναρτήσεων Bessel

- Η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης n είναι

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!}$$

- και για μικρές τιμές του β $J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!}$
- επίσης

$$J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta) & n \text{ άρτιος} \\ -J_n(\beta) & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$



Ισχύς σήματος FM ευρείας ζώνης

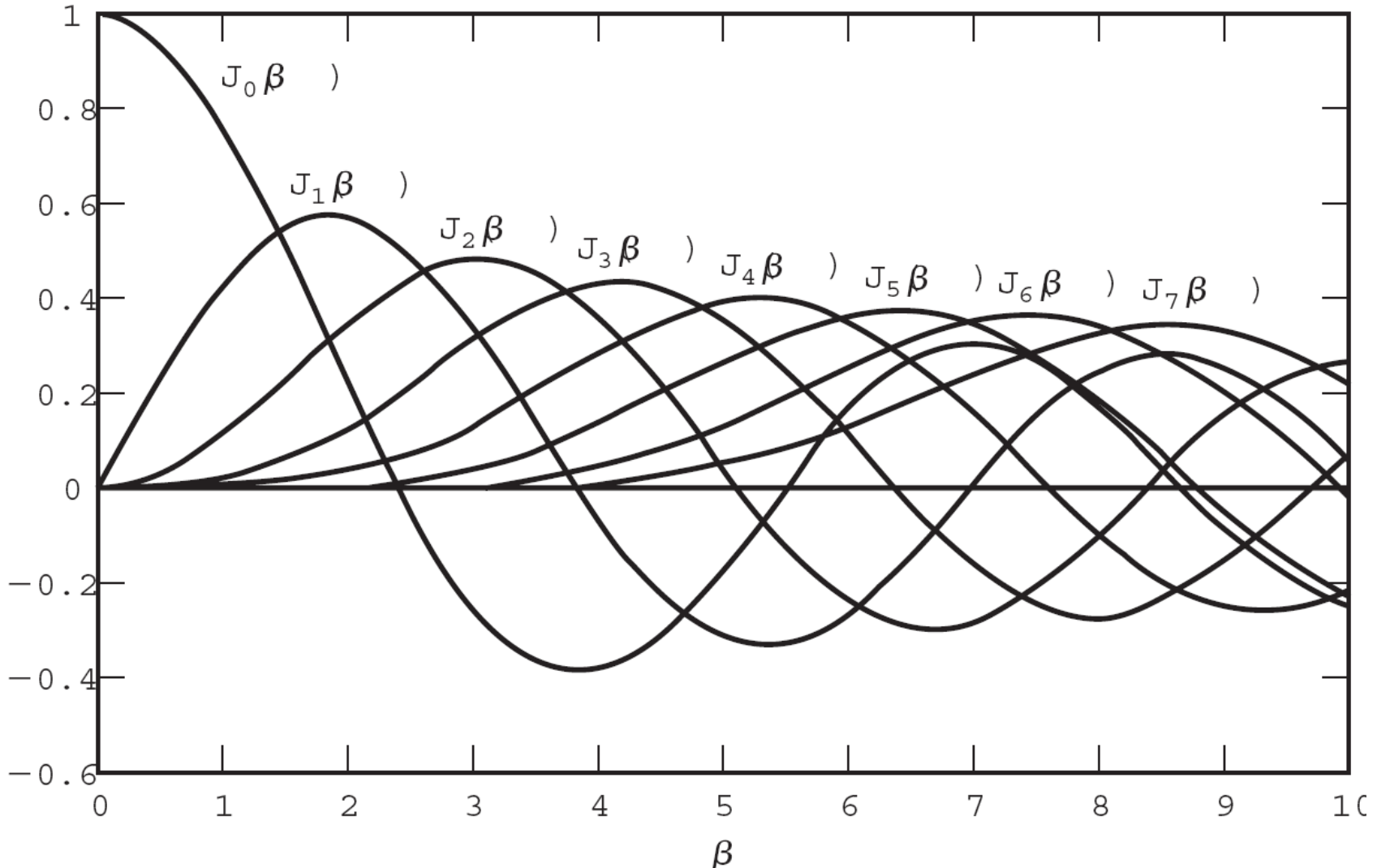
- Αφού
$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t]$$

- επομένως
$$P = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)$$
$$= \frac{A_c^2}{2}$$

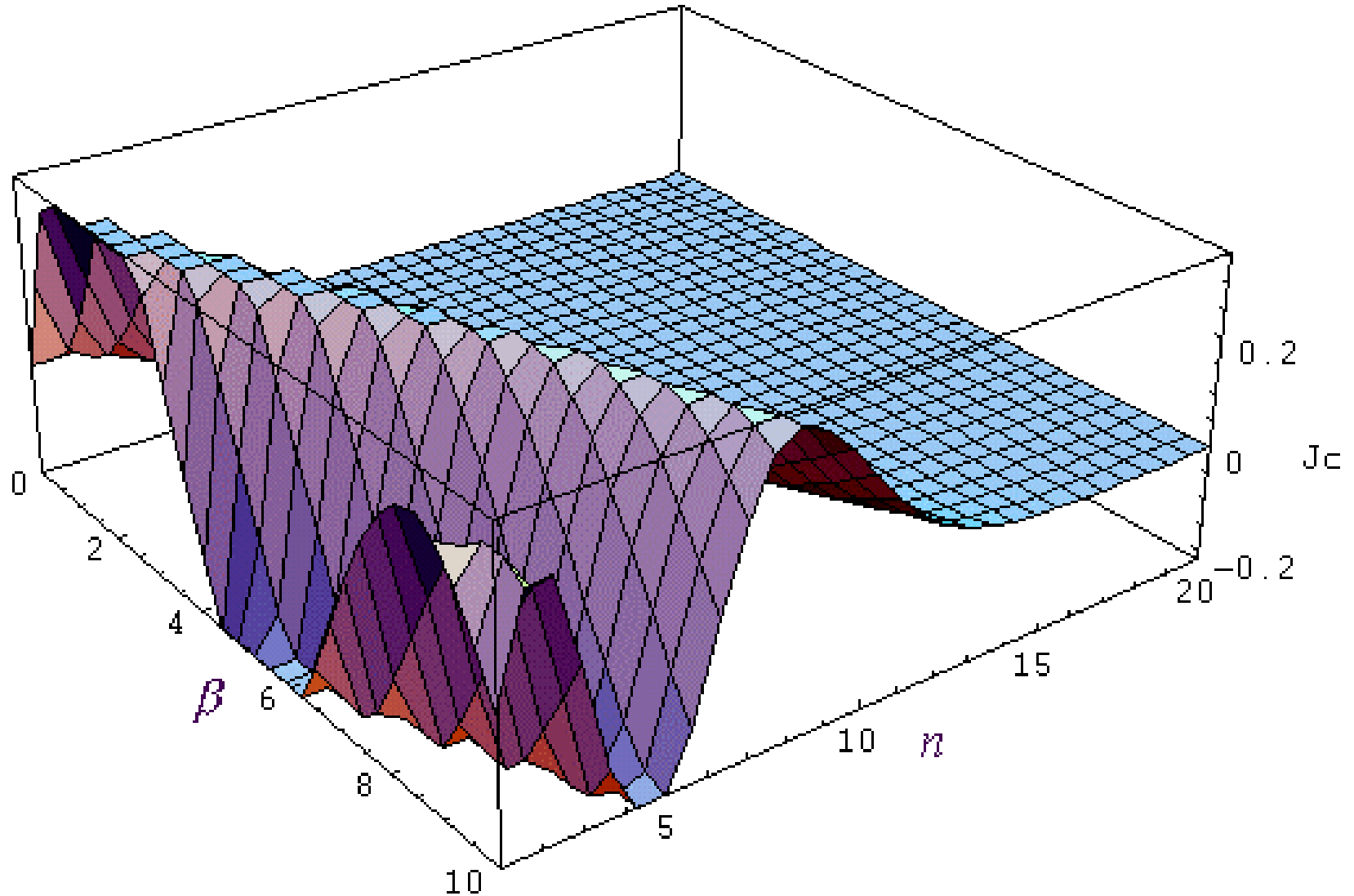
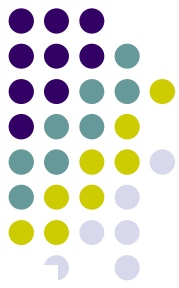
Τιμές συναρτήσεων Bessel

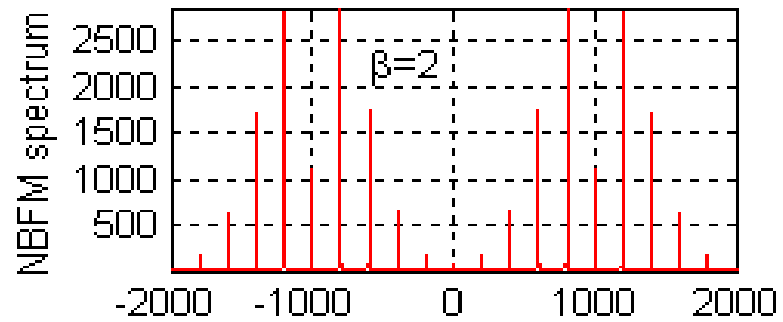
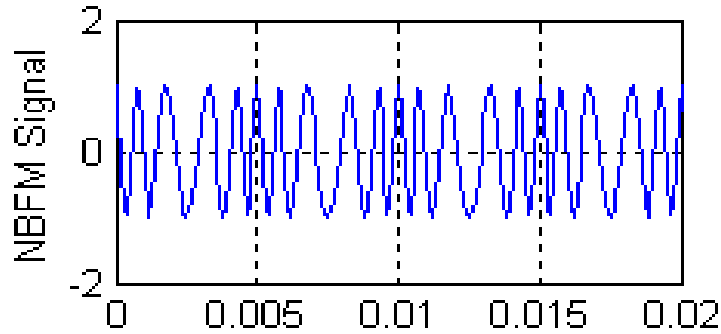
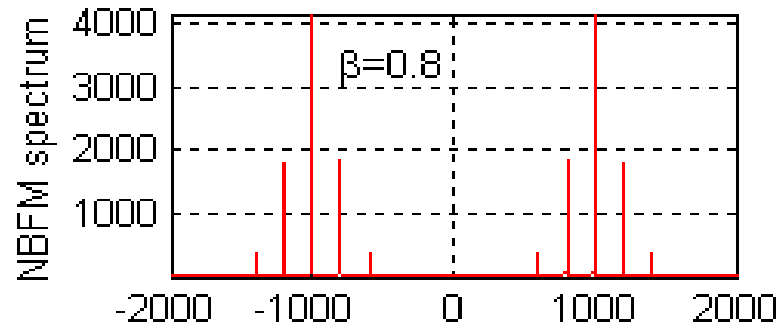
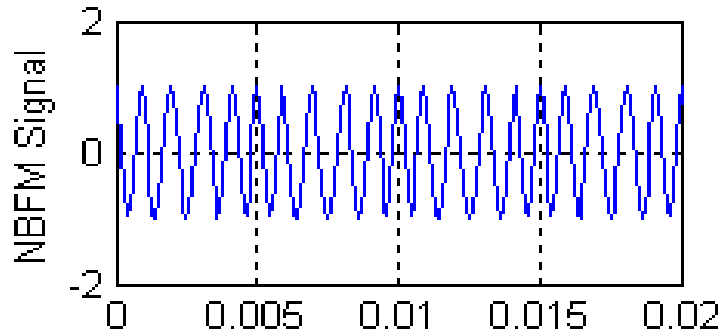
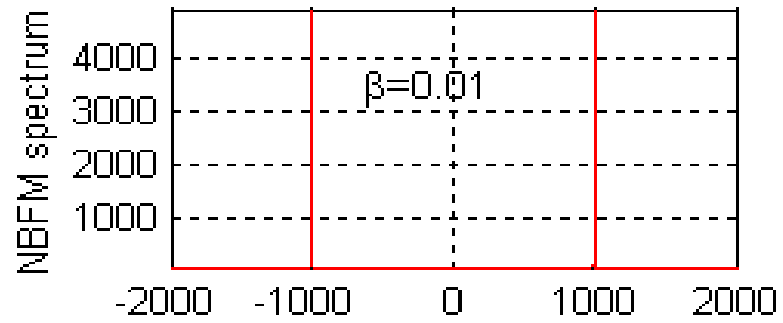
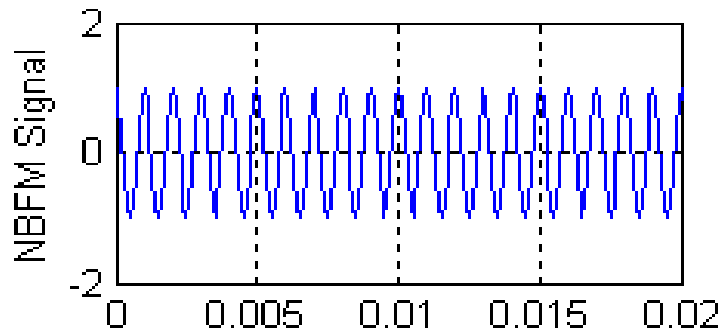
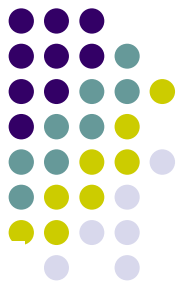


Διάγραμμα των συναρτήσεων Bessel $J_n(\beta)$

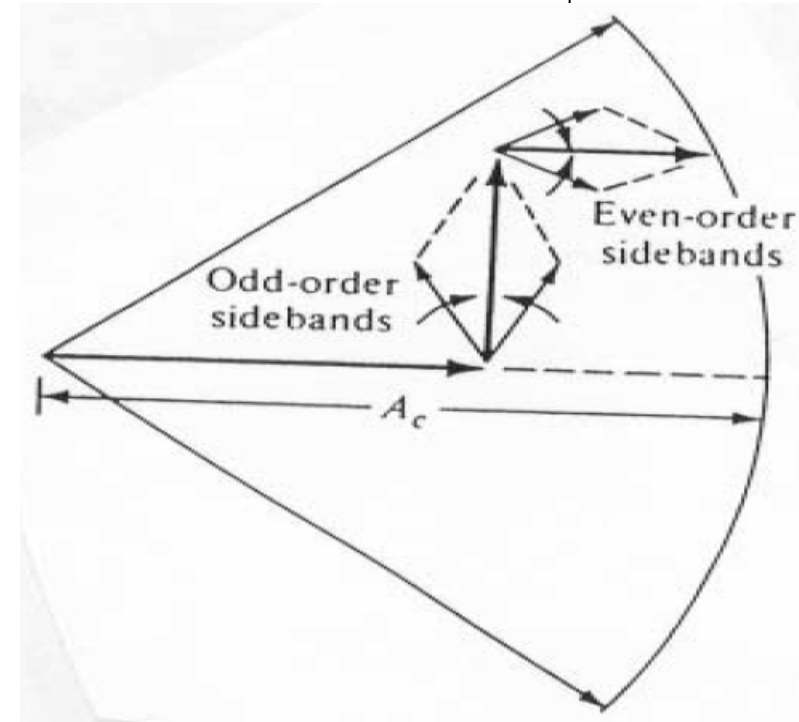
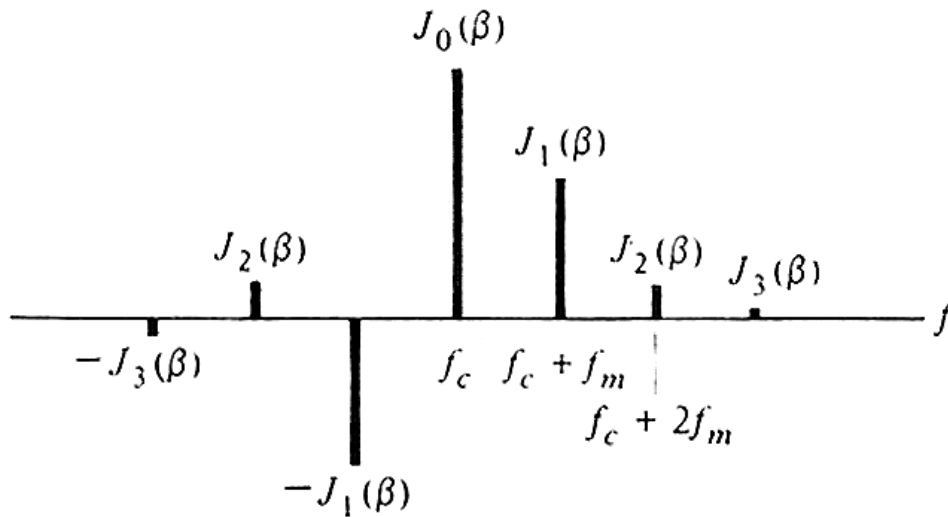


Τιμές συναρτήσεων Bessel





Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης



- Οι περιπτές συνιστώσες είναι ορθογώνιες προς το φέρον και προκαλούν την επιθυμητή **διαμόρφωση συχνότητας** και κάποια ανεπιθύμητη **παραμόρφωση πλάτους**
- Οι άρτιες συνιστώσες είναι συμφασικές με το φέρον και διορθώνουν την παραμόρφωση πλάτους

Διαμόρφωση από πολλούς τόνους



- Έστω ότι

$$m(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

- και οι συχνότητες f_1 και f_2 δεν σχετίζονται αρμονικά (πολλαπλάσιο η μία της άλλης), τότε

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_1 \sin(2\pi f_1 t) + \beta_2 \sin(2\pi f_2 t)]$$

- όπου

$$\beta_1 = \frac{k_f A_1}{f_1} = \frac{\Delta f_1}{f_1}, \quad \beta_2 = \frac{k_f A_2}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2}$$

Διαμόρφωση από πολλούς τόνους



- Μετά από πολλές (προφανείς) πράξεις

$$s(t) = A_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2) \cos[2\pi(f_c + mf_1 + nf_2)t]$$

Φάσμα σήματος FM από πολλούς τόνους

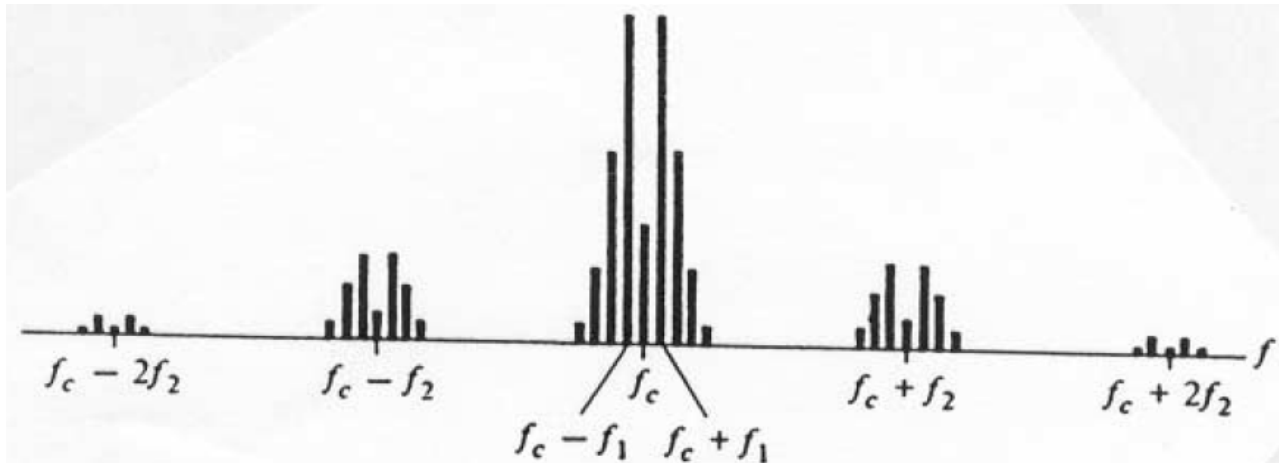


- Το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος FM από πολλούς τόνους περιλαμβάνει
 - όλες τις πλευρικές συχνότητες που προκύπτουν από την f_1 , δηλαδή, $f_c \pm mf_1$
 - όλες τις πλευρικές συχνότητες που προκύπτουν από την f_2 , δηλαδή, $f_c \pm nf_2$
 - όλες τις συχνότητες ενδοδιαμόρφωσης, δηλαδή, $f_c \pm mf_1 \pm nf_2$

Φάσμα σήματος FM από πολλούς τόνους



- Έστω $f_1 < f_2$ και $\beta_1 > \beta_2$





Διαμόρφωση από περιοδικό σήμα

- Έστω ότι $m(t)$ είναι περιοδικό σήμα, τότε η μιγαδική περιβάλλουσα του $s(t)$ θα είναι και αυτή περιοδικό σήμα

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp[j\beta m(t)]$$

- οπότε μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_m t)$$

- με συντελεστές

$$c_n = \int_0^{T_m} \exp[j\beta m(f_m) - j2\pi n f_m t] dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[j \left(\beta m \left(\frac{x}{2\pi f_m} \right) - nx \right) \right] dx$$

Φάσμα σήματος FM από περιοδικό σήμα



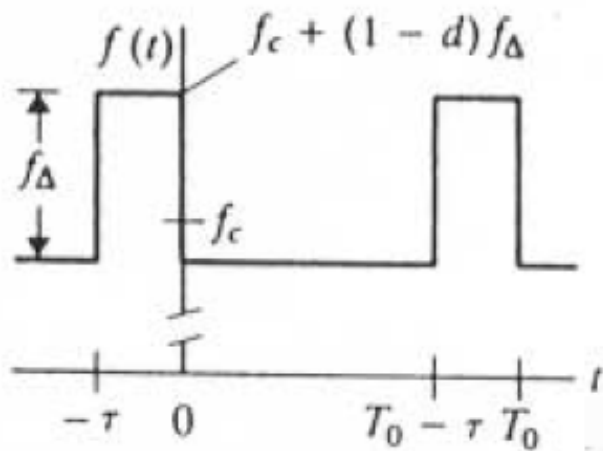
- Άρα

$$s(t) = A_c \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[j2\pi(f_c + nf_m)t] \right]$$
$$= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \cos[2\pi(f_c + nf_m)t + \angle c_n]$$

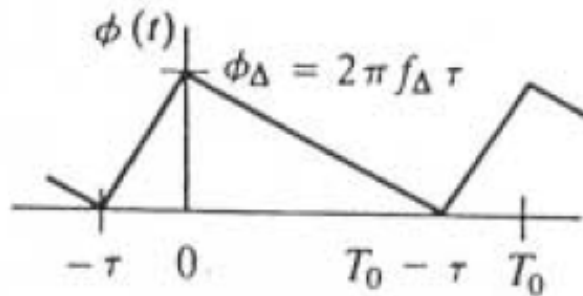
- οπότε το φάσμα σήματος FM που προκύπτει από διαμόρφωση με περιοδικό σήμα περιέχει μόνο τις αρμονικές $f_c \pm nf_m$ που προκαλούνται από την f_m

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| [\delta(f - f_c - nf_m) \exp(j\angle c_n) + \delta(f + f_c + nf_m) \exp(-j\angle c_n)]$$

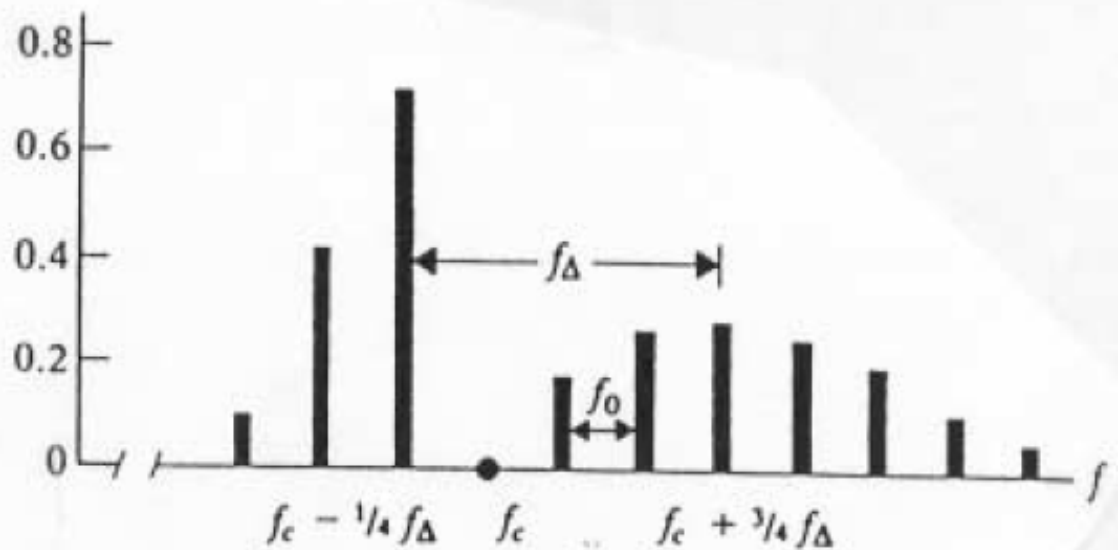
Φάσμα σήματος FM από περιοδικό σήμα



(a)

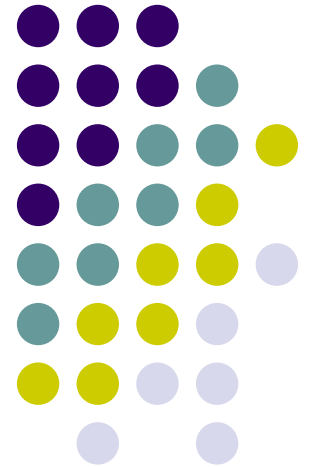


(b)



Εύρος ζώνης για μετάδοση FM

Εύρος ζώνης σήματος FM



Εύρος ζώνης σήματος FM στενής ζώνης



- Για μικρές τιμές του δείκτη διαμόρφωσης β

$$J_0(\beta) \simeq 1$$

$$J_1(\beta) \simeq \frac{\beta}{2}, \quad J_{-1}(\beta) \simeq -\frac{\beta}{2}$$

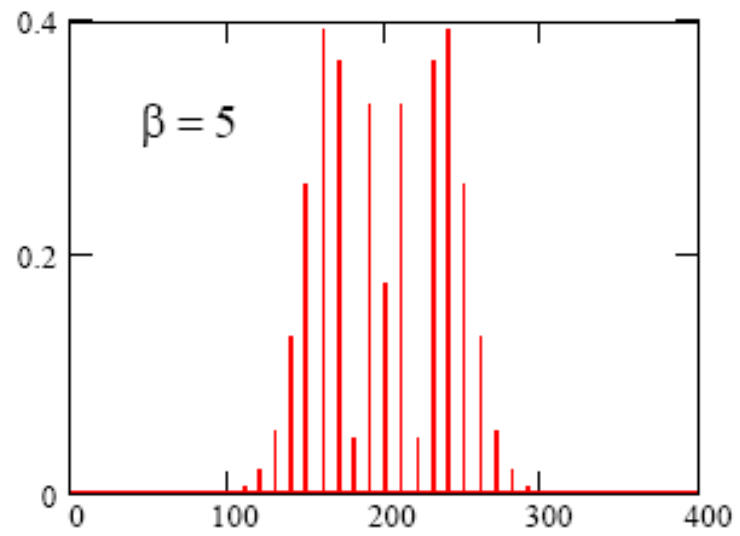
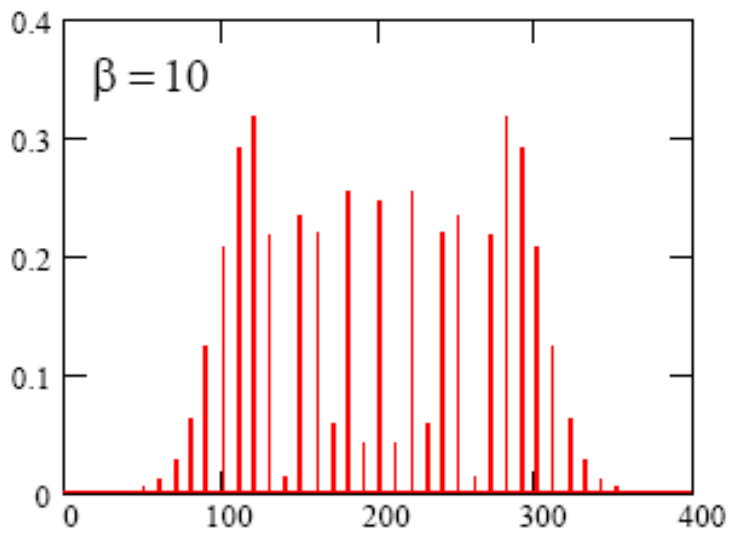
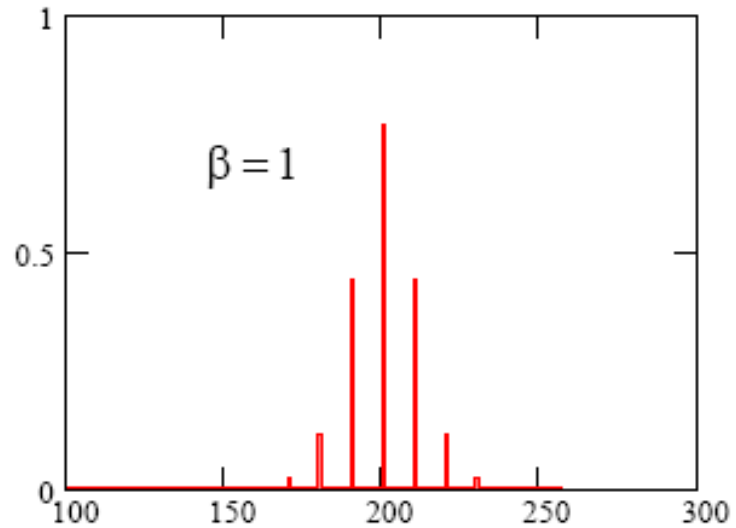
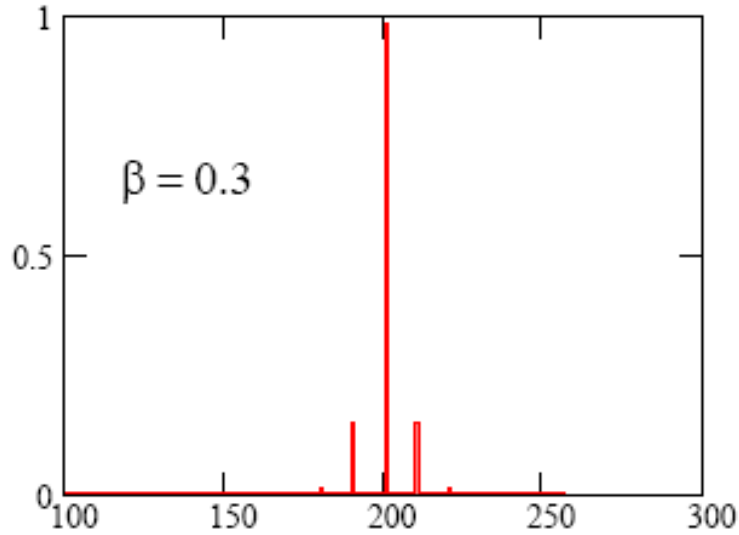
$$J_n(\beta) \simeq 0, \quad n > 1$$

- και επομένως μόνο η πρώτη πλευρική του διαμορφωμένου σήματος FM έχει σημασία (FM στενής ζώνης)

- οπότε

$$B_T = 2f_m = 2W$$

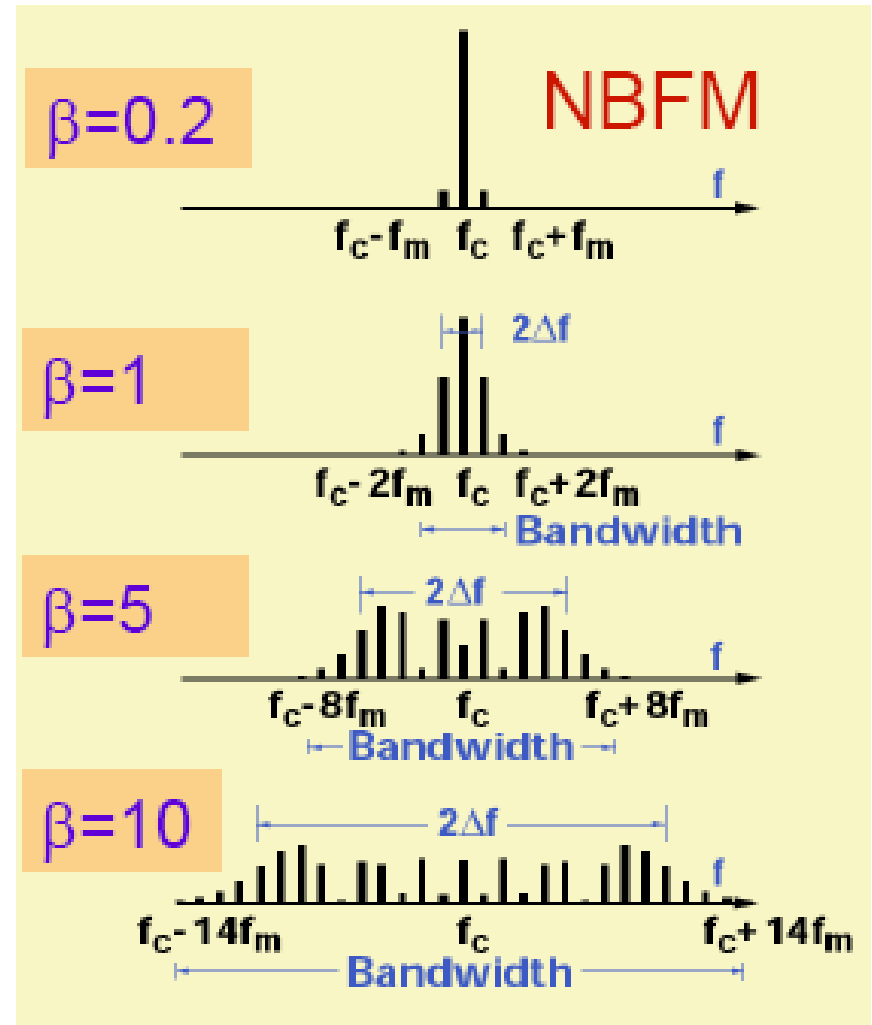
Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης



Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης



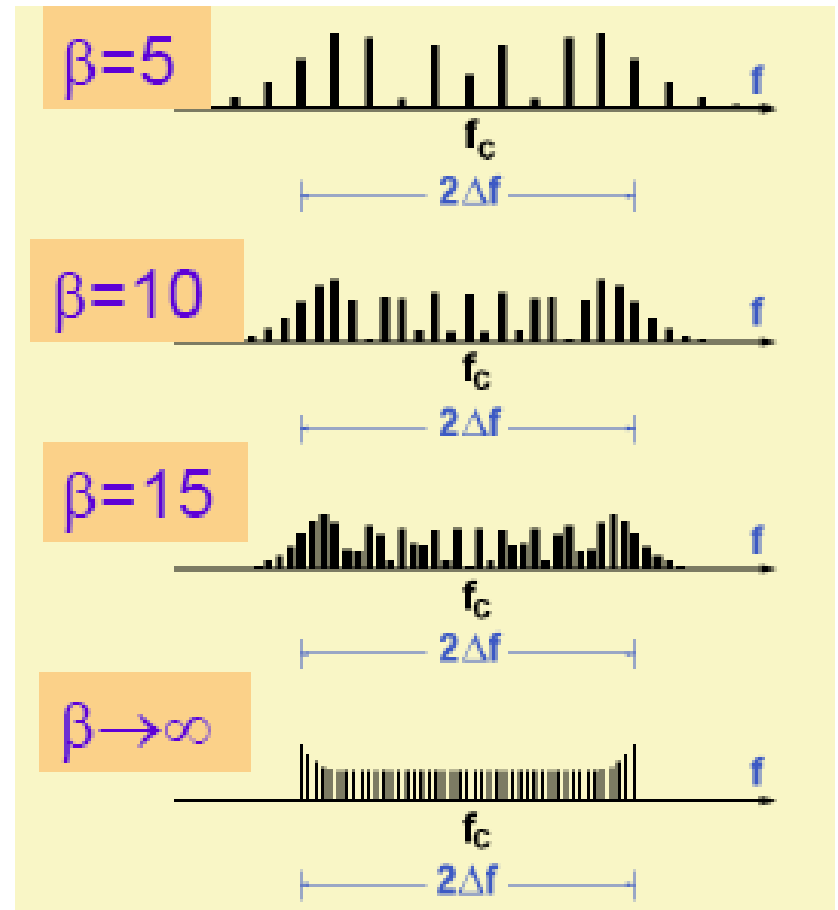
- Έστω ότι διατηρούμε το W σταθερό
- Μεταβάλλουμε το β αυξάνοντας την απόκλιση συχνότητας Δf
- Η απόσταση των γραμμών σταθερή στο f_m
- Το εύρος ζώνης μεγαλώνει



Φάσμα σήματος FM ευρείας ζώνης



- Έστω ότι διατηρούμε την Δf σταθερή
- Αυξάνουμε το β
- Μειώνεται η απόσταση των γραμμών (f_m)
- Μειώνεται το W
- Το εύρος ζώνης παραμένει περίπου σταθερό $2\Delta f$



Εύρος ζώνης σήματος FM ευρείας ζώνης



- Το φάσμα του σήματος FM ευρείας ζώνης περιέχει άπειρες συνιστώσες
 - Το πλάτος των υψηλής τάξης συνιστωσών είναι αμελητέο
 - Πρακτικά το φάσμα είναι πεπερασμένο!

Εύρος ζώνης σήματος FM ευρείας ζώνης



- Μπορεί να ορισθεί ένα **ενεργό εύρος ζώνης** που να περιλαμβάνει μόνο τις σημαντικές συνιστώσες
- Για μεγάλες τιμές του β μπορούμε να διατηρήσουμε μόνο τις M πρώτες συνιστώσες που περιλαμβάνουν π.χ. το 99% της ολικής ισχύος

$$\sum_{n=-M+1}^{M-1} J_n^2(\beta) < 0,99, \quad \sum_{n=-M}^M J_n^2(\beta) \geq 0,99$$

$$B_T = 2M(\beta)f_m = 2M(\beta)W$$

Εύρος ζώνης σήματος FM ευρείας ζώνης



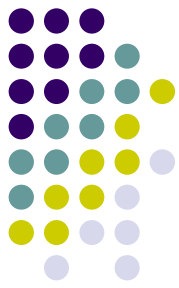
- Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να κρατήσουμε μόνο τους όρους του αναπτύγματος Fourier που θεωρούμε σημαντικούς

- Π.χ. μόνο αυτούς για τους οποίους (με τιμές του ε στην περιοχή 0,01 με 0,1)

$$|J_M(\beta)| > \varepsilon, \quad |J_{M+1}(\beta)| < \varepsilon$$

- Η πρώτη προσέγγιση $\varepsilon=0,01$ είναι ιδιαίτερα συντηρητική
- Η δεύτερη $\varepsilon=0,1$ αντιστοιχεί σε μια μικρή παραμόρφωση (και σχεδόν ταυτίζεται με το κριτήριο του 99% της ολικής ισχύος)

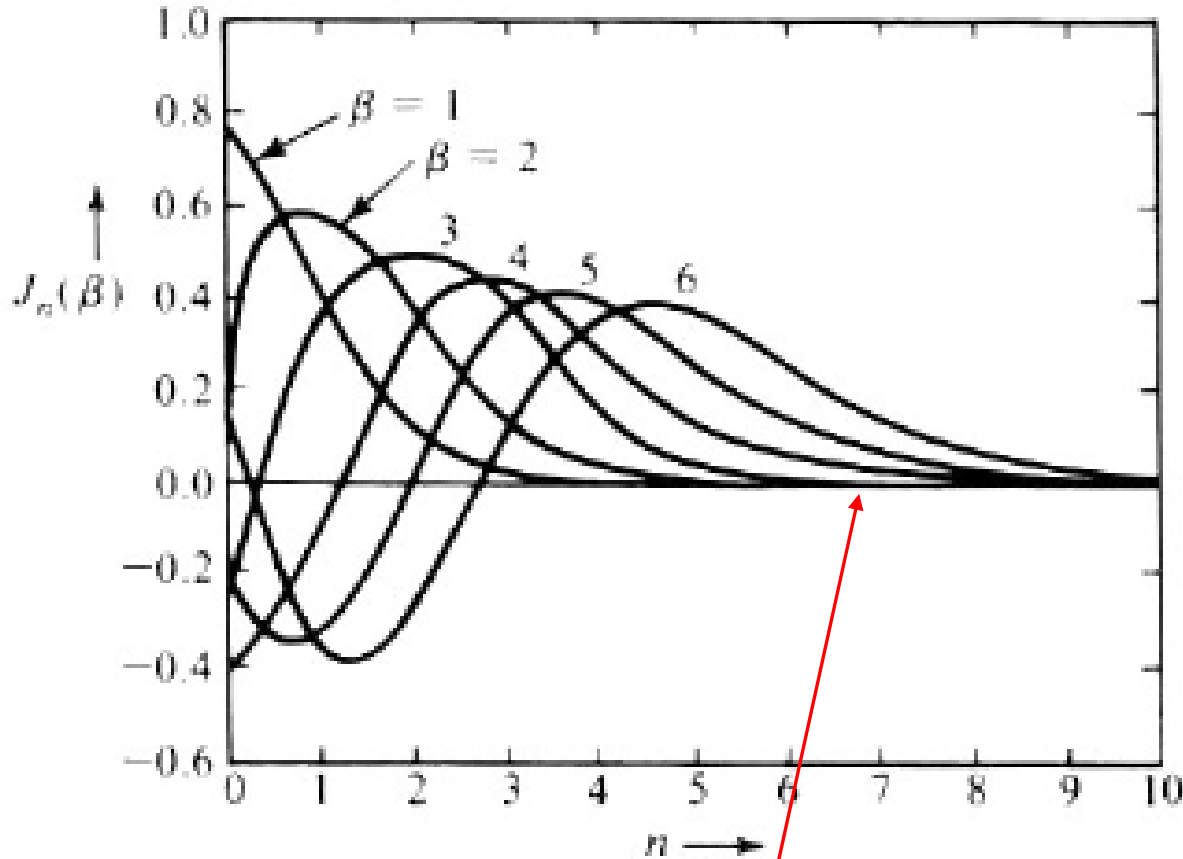
Πίνακας τιμών συναρτήσεων Bessel



n	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 8$	$\beta = 10$	n
0	<u>0.998</u>	<u>0.990</u>	0.938	0.765	0.224	-0.178	0.172	-0.246	0
1	0.050	0.100	<u>0.242</u>	0.440	0.577	-0.328	0.235	0.043	1
2	0.001	0.005	0.031	<u>0.115</u>	0.353	0.047	-0.113	0.255	2
3				0.020	<u>0.129</u>	0.365	-0.291	0.058	3
4				0.002	0.034	0.391	-0.105	-0.220	4
5					0.007	0.261	0.186	-0.234	5
6					0.001	<u>0.131</u>	0.338	-0.014	6
7						0.053	0.321	0.217	7
8						0.018	0.223	0.318	8
9						0.006	<u>0.126</u>	0.292	9
10						0.001	0.061	0.207	10
11							0.026	<u>0.123</u>	11
12							0.010	0.063	12
13							0.003	0.029	13
14							0.001	0.012	14
15								0.004	15
16								0.001	16

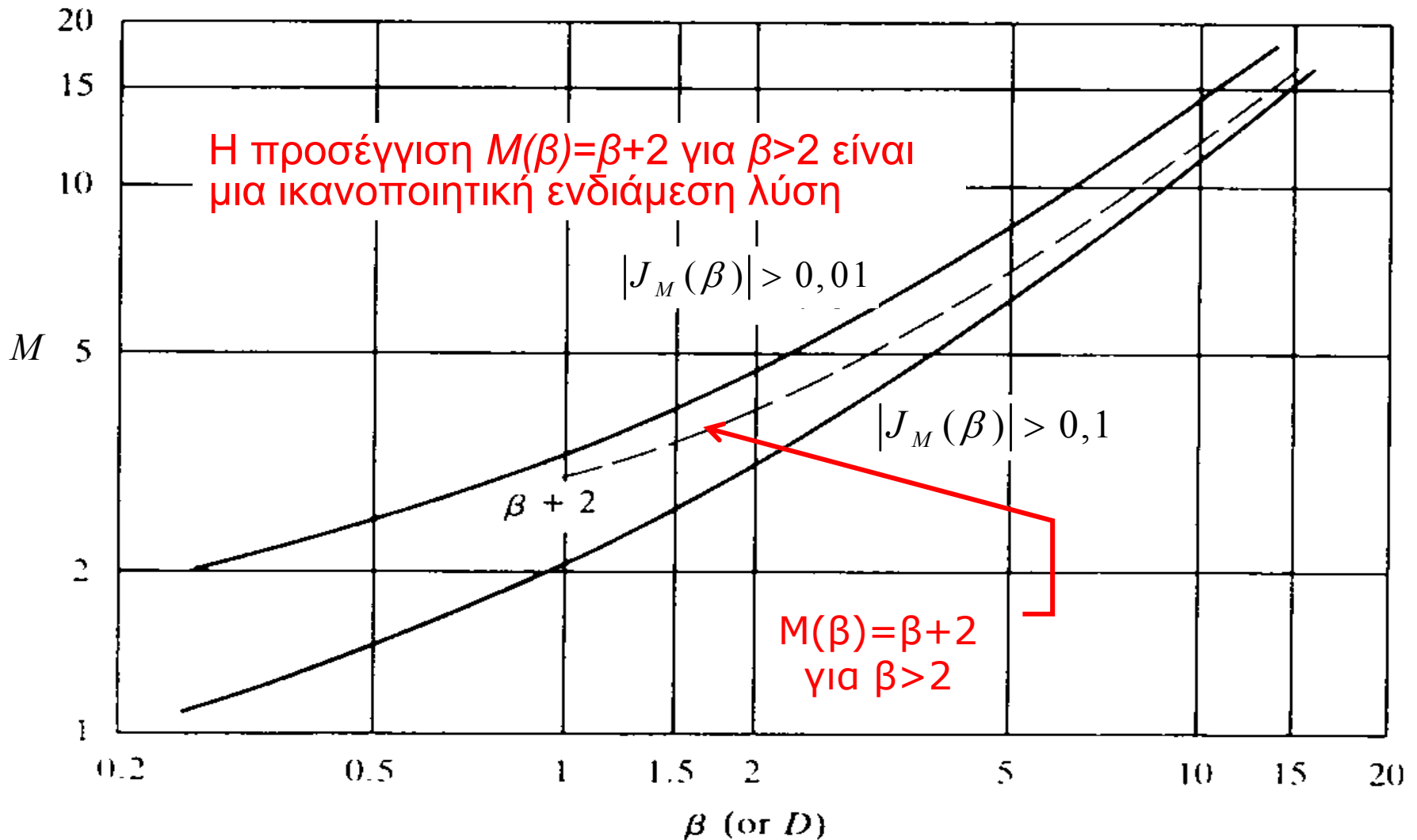
Ο τελευταίος
σημαντικός όρος
 $M(\beta)=[\beta+1]$

Μια άλλη άποψη των συναρτήσεων Bessel



Όπως πριν, ο τελευταίος
σημαντικός όρος $M(\beta)=[\beta+1]$

Ο αριθμός M των σημαντικών όρων ως συνάρτηση του β





Κανόνας Carson

- Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για μετάδοση σήματος FM (που προέρχεται από διαμόρφωση απλού τόνου) είναι

Κανόνας
Carson

$$B_T = 2(\beta + 1)f_m = \begin{cases} 2\left(\frac{\Delta f}{f_m} + 1\right)f_m = 2\Delta f + 2f_m & \text{FM} \\ 2(\Delta\phi + 1)f_m & \text{PM} \end{cases}$$

- με το αντίστοιχο πλήθος αρμονικών που περιέχονται σε αυτό να είναι

$$M_c = 2\lfloor \beta \rfloor + 3 = \begin{cases} 2\left\lfloor \frac{\Delta f}{f_m} \right\rfloor + 3 & \text{FM} \\ 2\lfloor \Delta\phi \rfloor + 3 & \text{PM} \end{cases}$$



Εύρος ζώνης σήματος FM

- Στην περίπτωση αυθαίρετου σήματος $m(t)$ ο λόγος απόκλισης D παίζει τον ρόλο του δείκτη διαμόρφωσης β
- Ο λόγος απόκλισης ορίζεται ως $D = \Delta f / W$
- Η μέγιστη απαίτηση για εύρος ζώνης προκαλείται από το μέγιστο πλάτος της μέγιστης εκ των προς μετάδοση συχνοτήτων
- Το εύρος ζώνης κατ' αναλογία με τη διαμόρφωση από απλό τόνο είναι

$$B_T = 2M(D)W$$



Εύρος ζώνης σήματος FM

- Για διαμόρφωση στενής ζώνης

$$B_T = 2W$$

- Για διαμόρφωση ευρείας ζώνης

$$B_T = 2\Delta f = 2DW$$

- Κανόνας Carson

$$B_T = 2(\Delta f + W) = 2(D + 1)W, \quad D \gg 1$$

$$D \ll 1$$

- Για $2 < D < 10$ καλύτερη προσέγγιση είναι

$$B_T = 2(\Delta f + 2W) = 2(D + 2)W, \quad D > 2$$



Εύρος ζώνης σήματος PM

- Χρήση κανόνα Carson παρόμοια με το FM
- Η στιγμιαία συχνότητα είναι

$$f_i = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \dot{m}(t)$$

- η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι

$$\Delta f = \frac{k_p}{2\pi} \max \{ |\dot{m}(t)| \}$$



Εύρος ζώνης σήματος PM

- Ο λόγος απόκλισης D είναι η **μέγιστη απόκλιση φάσης** του σήματος FM στην ακραία περίπτωση εύρους ζώνης
- Άρα η ανάλυση FM ισχύει για διαμόρφωση PM αρκεί να αντικατασταθεί το D με την $\Delta\phi$
- Κανόνας Carson
$$B_T = 2(\Delta\phi + W)$$
- Όμως, σε αντίθεση με το FM ο όρος $\Delta\phi$ δεν εξαρτάται από το W