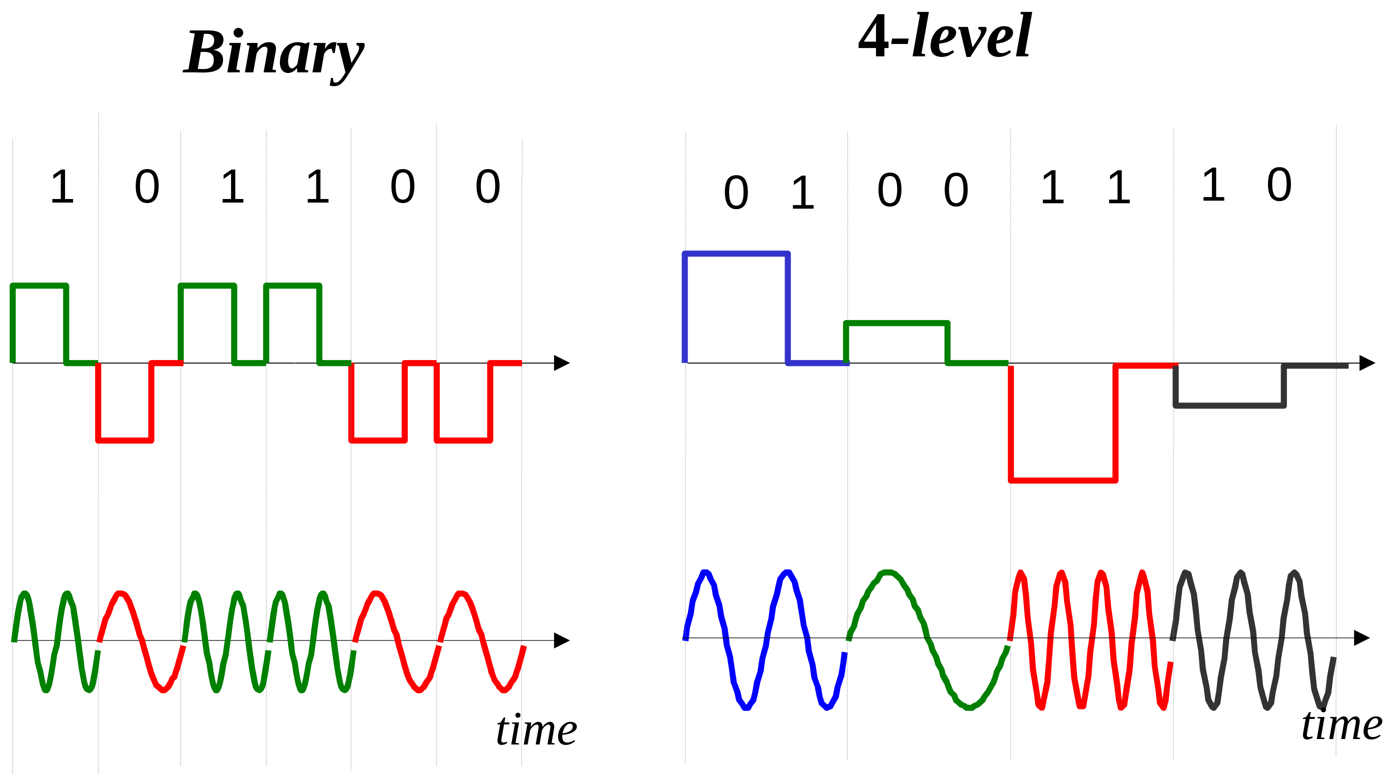
Βέλτιστη φώραση παλμών παρουσία AWGN
-
Το Προσαρμοσμένο φίλτρο

Ψηφιακές Κυματομορφές (ΨΚ)

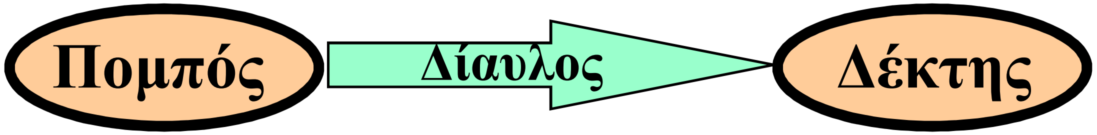
- Ακολουθίες παλμών, με εγγεγραμμένη ψηφιακή πληροφορία (π.χ. bits)
- Παλμοί ντετερμινιστικοί- δυαδική ακολουθία στοχαστική ➔ στοχαστικές κυματομορφές
- Απαραίτητος ο χρονισμός (timing) για την οριοθέτηση των παλμών
- ***Ψηφιακή Διαμόρφωση***: η παραγωγή ΨΚ από την ψηφιακή (δυαδική) ακολουθία, με ολίσθηση του φάσματος σε υψηλές συχνότητες.

Παραδείγματα ΨΚ



M-level: «εγγραφή» $\log_2 M$ bits ανά παλμό

Προβλήματα σχεδιασμού συστήματος Ψ.Ε.



Σχεδιασμός πομπού:

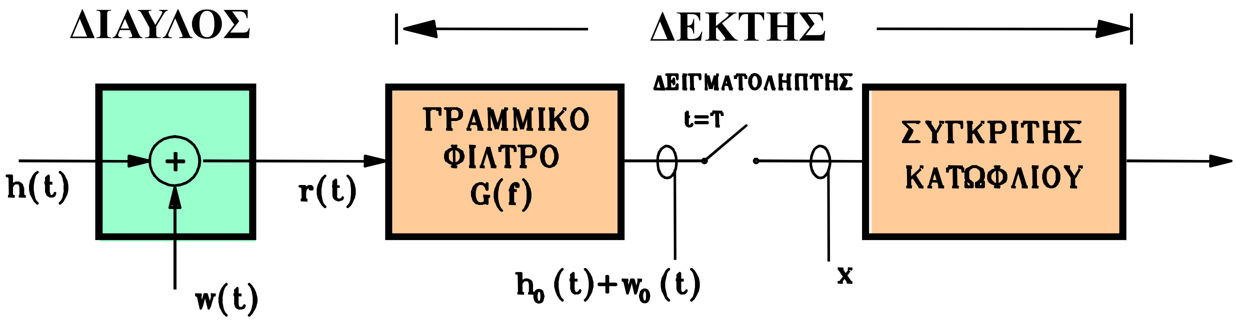
- σχεδιασμός - παραγωγή κυματομορφών “κατάλληλων“ για το διαθέσιμο δίαυλο

Σχεδιασμός δέκτη:

- αποκατάσταση των κυματομορφών (ισοστάθμιση)
- αναγνώριση (*detection*) ή εκτίμηση (*estimation*) των εγγεγραμμένων ψηφιακών δεδομένων

κριτήριο: ελαχιστοποίηση πιθανότητας λάθους

Προσαρμοσμένο φίλτρο (matched filter)



? *G(f)* *έτσι ώστε*

$$\frac{S}{N} \equiv \frac{h_o^2(T)}{E\{w_o^2(T)\}} = \mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau o$$

Απάντηση:

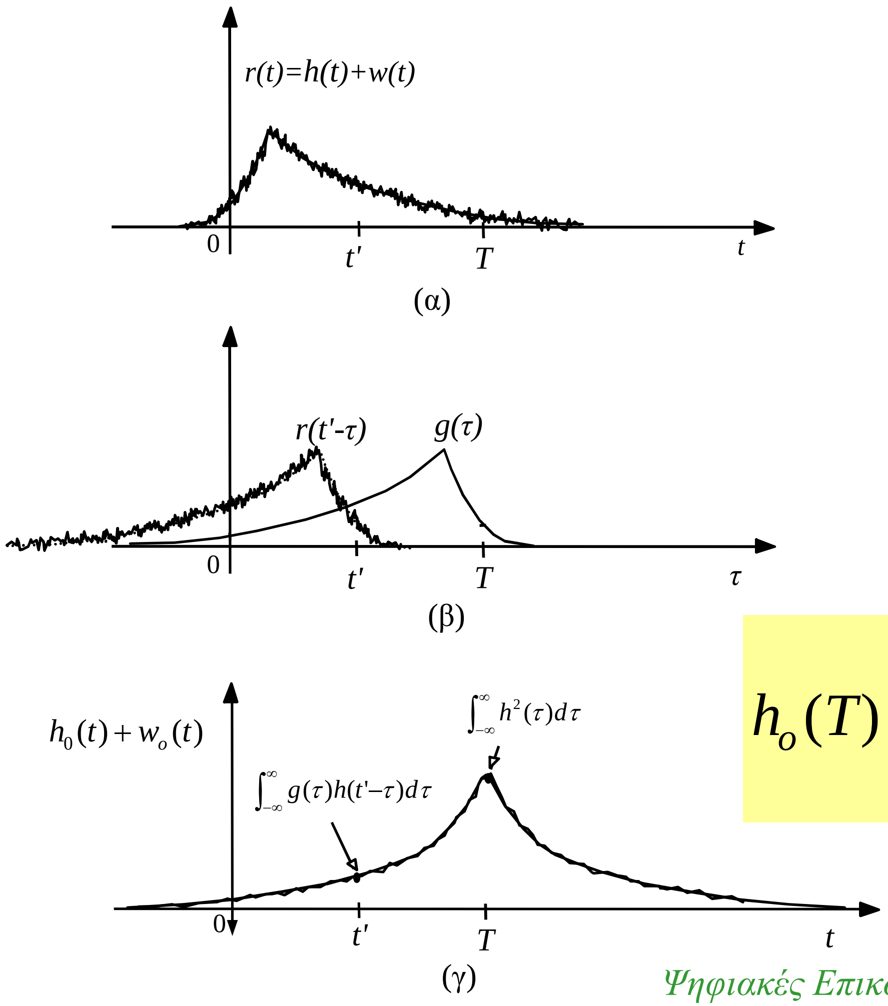
$$G(f) = cH^*(f)e^{-j2\pi fT}$$

οπότε:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\max} = \frac{2E}{N_o},$$

Προσαρμοσμένο φίλτρο *(συνέχεια)*

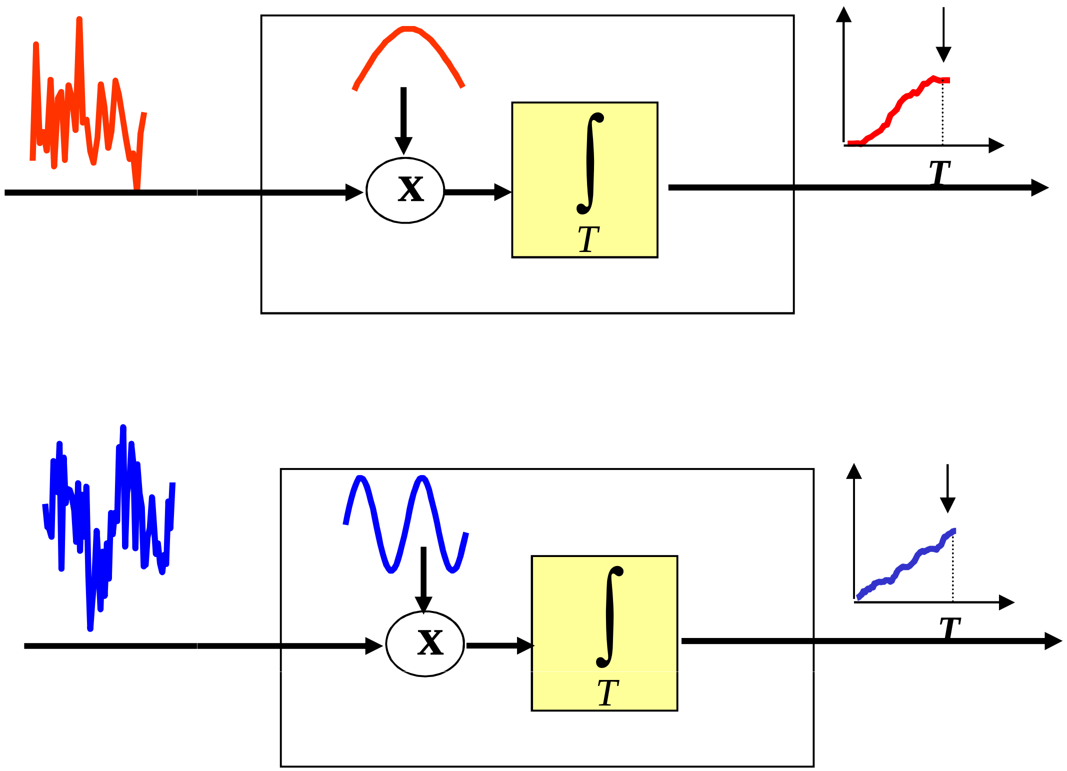
στο πεδίο του χρόνου:



$$g(t) = ch(T-t)$$

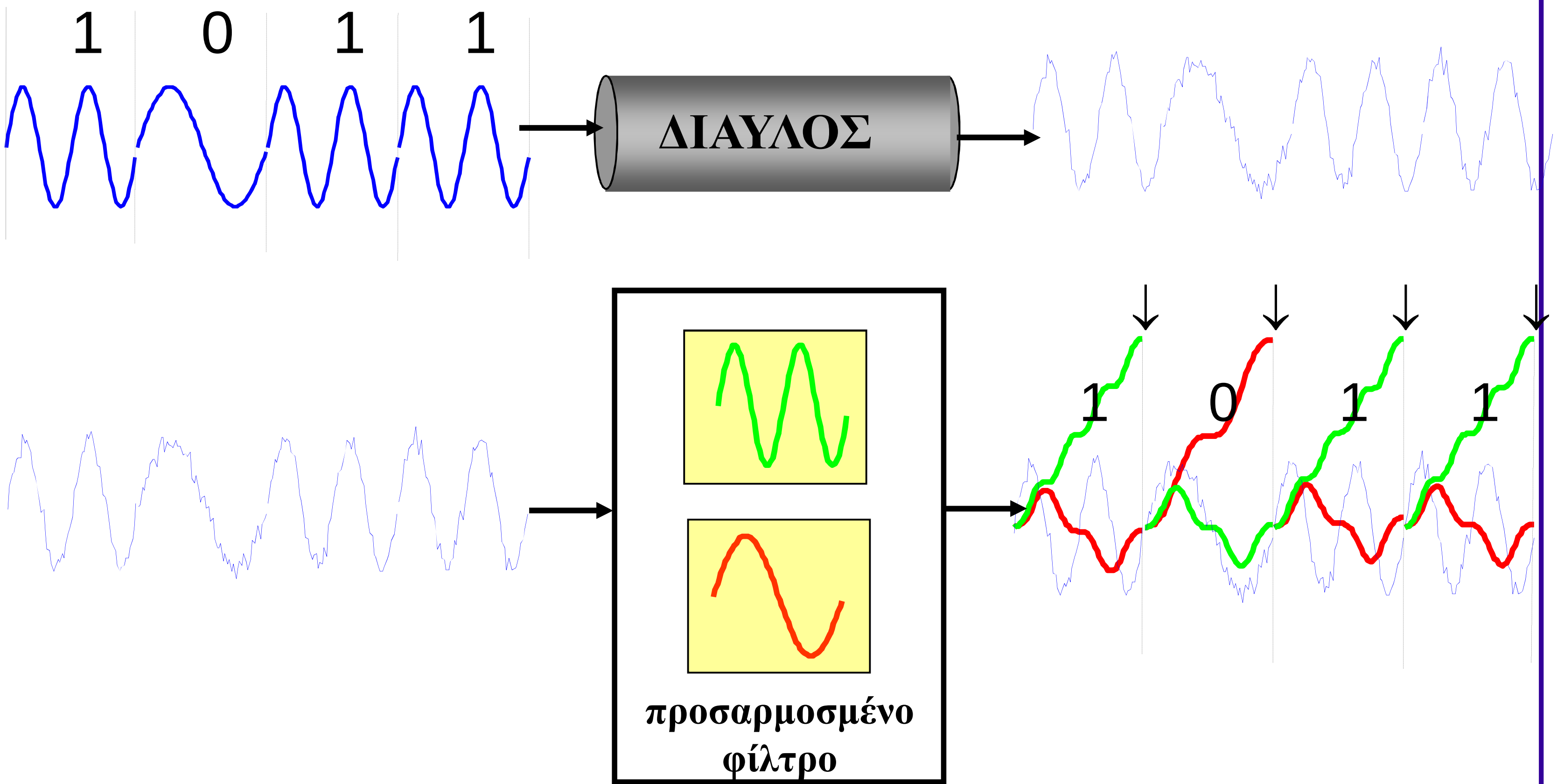
$$h_o(T) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(T-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt$$

Αναγνώριση με προσαρμοσμένο φίλτρο (1/4)



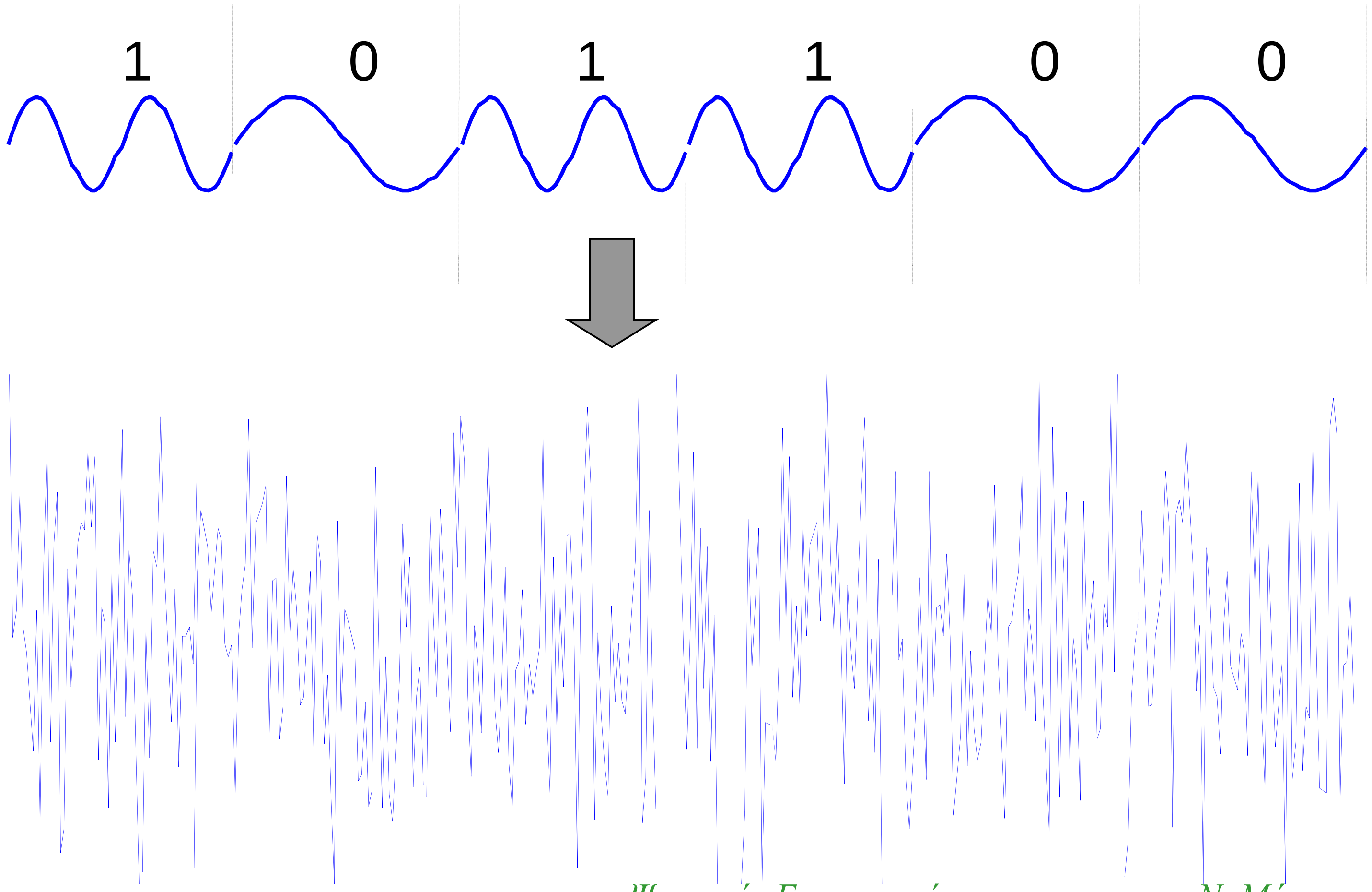
Αναγνώριση με προσαρμοσμένο φίλτρο (2/4)

Σύστημα ψηφιακής διαμόρφωσης συχνότητας



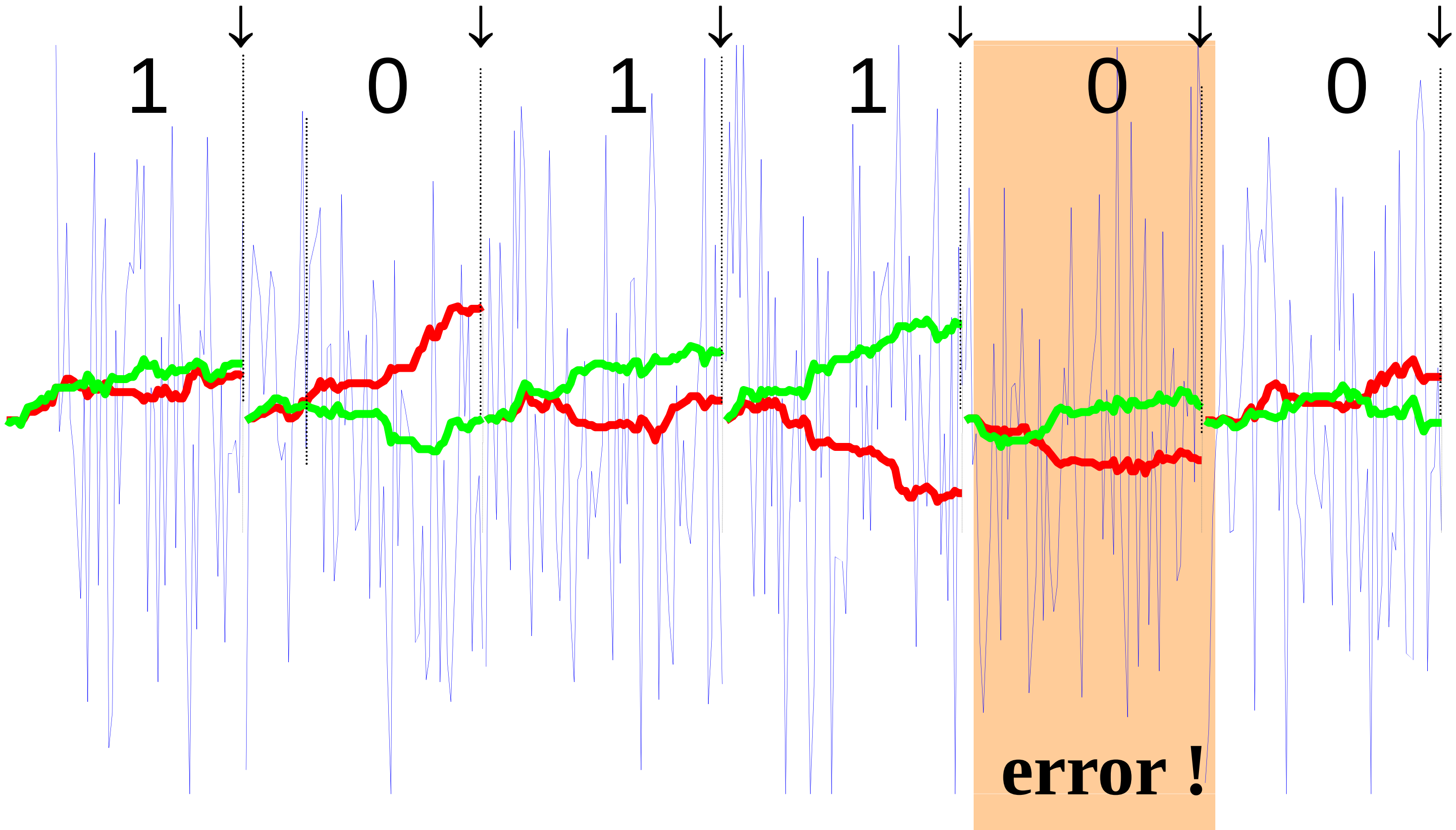
Αναγνώριση με προσαρμοσμένο φίλτρο (3/4)

«Πολύ» θορυβώδης δίαυλος

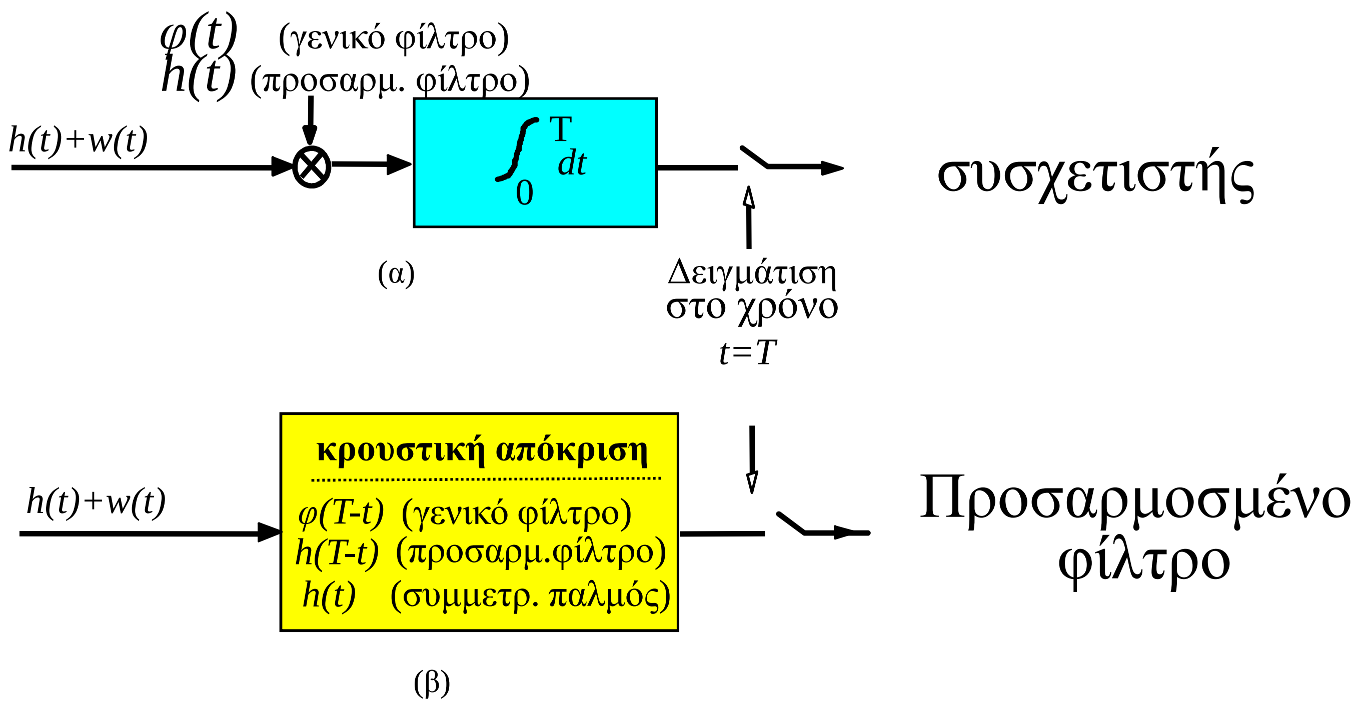


Αναγνώριση με προσαρμοσμένο φίλτρο (4/4)

Εσφαλμένη αναγνώριση

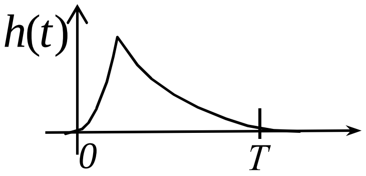


Ισοδυναμία Προσαρμοσμένου φίλτρου - Συσχετιστή



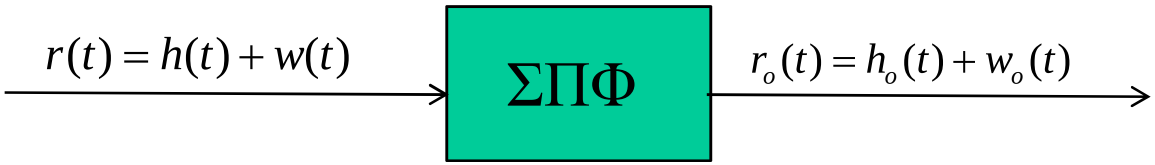
Φώραση παλμών PAM

Δυαδική μετάδοση – αντίποδα σήματα



$$1 \rightarrow s_1 = h(t)$$
$$0 \rightarrow s_2 = -h(t)$$

$$\left\| s_i \right\|^2 \equiv \int_0^T h^2(t)dt = E$$



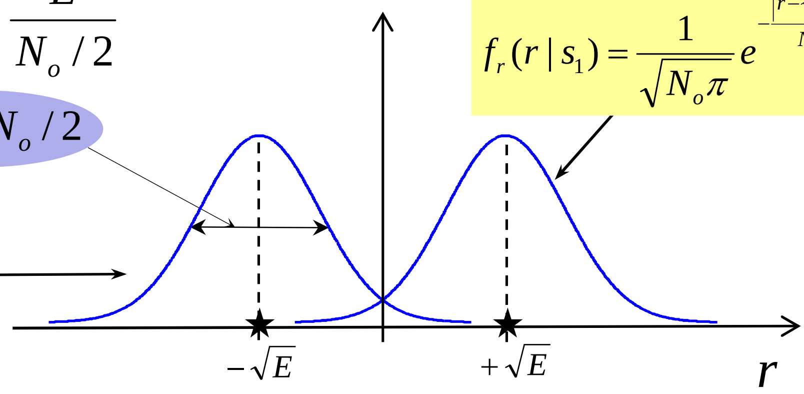
Στην έξοδο του ΣΠΦ για $t=T$ είναι $SNR = \dfrac{E}{N_o/2}$

Συνεπώς, όταν $h_o(T) = \sqrt{E}$, τότε $\sigma_{w_o}^2 = N_o/2$

$$f_r(r \mid s_1) = \frac{1}{\sqrt{N_o \pi}} e^{-\frac{\left| r - \sqrt{E} \right|^2}{N_o}}$$

Συναρτήσεις πιθανοφάνειας

$$f_r(r \mid s_i), \quad i = 1,2$$



Φώραση παλμών PAM (συνέχεια)

Βέλτιστη αναγνώριση δυαδικής παλμοσειράς παρουσία AWGN

Συμβολίζουμε με $p(s_i \mid r)$, την (εκ των υστέρων) πιθανότητα να έχει σταλεί το σύμβολο s_i, με δεδομένο ότι στην έξοδο του ΣΠΦ μετρήθηκε τιμή σήματος $\boldsymbol{r}$.

Αναζητούμε το i που δίνει $\max\limits_{i} p(s_i \mid r), \quad i = 1,2$

Από Bayes: $p(s_i \mid r) = p(s_i)\dfrac{f_r(r \mid s_i)}{f_r(r)}$

οπότε, το ζητούμενο i είναι αυτό που: $\boxed{\max \; f_r(r \mid s_i), \quad i = 1,2}$

Στο προηγούμενο σχήμα, με ίδιες τις δύο συναρτήσεις πιθανοφάνειας, το μηδέν είναι το κατώφλι απόφασης

Φώραση παλμών PAM (συνέχεια)

Ανάλυση σφάλματος δυαδικής μετάδοσης παρουσία AWGN

$$P_e = p(s_1)p(s_2 \mid s_1) + p(s_2)p(s_1 \mid s_2)$$

$p(s_i)$: η πιθανότητα να σταλεί το σύμβολο s_i

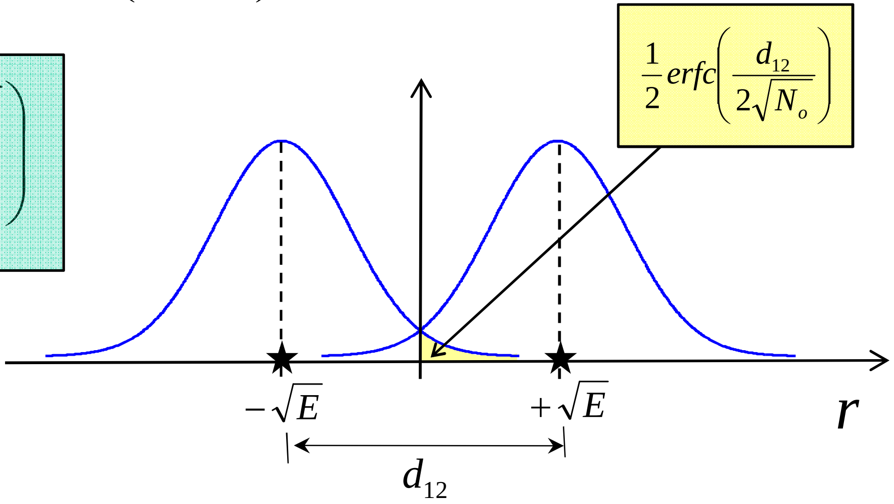
$p(s_j \mid s_i)$: η πιθανότητα, ενώ στάλθηκε το s_i, να αναγνωρισθεί το s_j

$$p(s_1 \mid s_2) = p(s_2 \mid s_1) = \int_{\|s_1\|+\frac{d_{12}}{2}}^{\infty} f_r(r \mid s_1)dr = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{d_{12}}{2\sqrt{N_o}}\right) = \frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E}{N_o}}\right)$$

με την υπόθεση ότι

$p(s_1) = p(s_2) = 1/2$

$$\boxed{P_e = \frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E}{N_o}}\right)}$$



Συμπληρωματική συνάρτηση λάθους:

$$erfc(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-z^2}dz$$

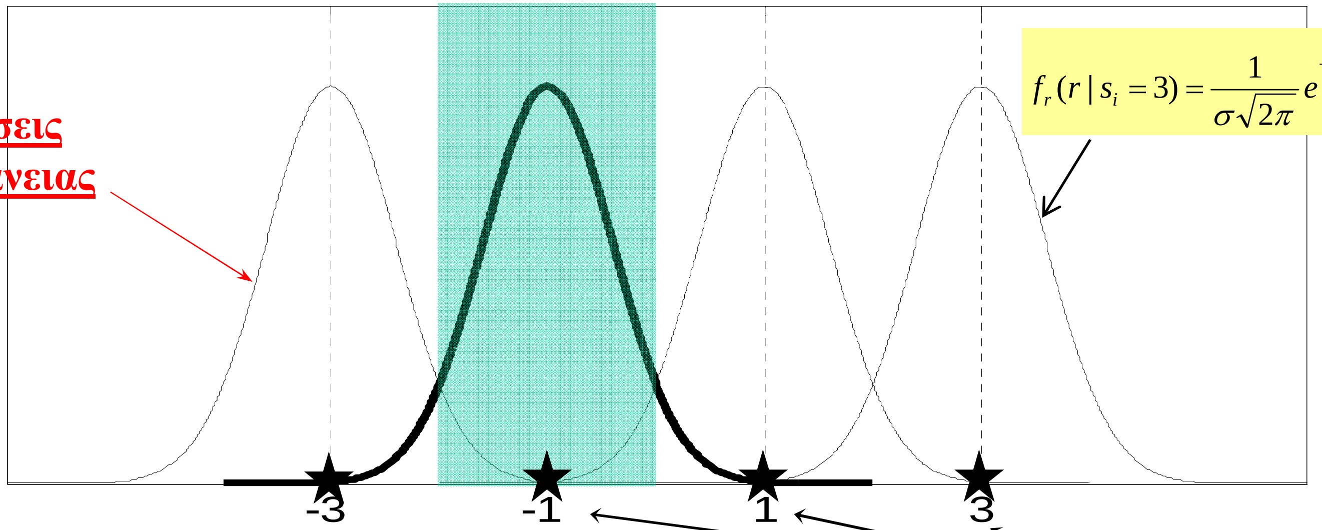
Φώραση παλμών PAM (συνέχεια)

L-αδική μετάδοση (L-αδική PAM ή L-ASK)

Μετάδοση παλμού $ih(t)$, $i = -(L-1), -(L-3), \ldots (L-1)$, $L = 2^k$

Συναρτήσεις πιθανοφάνειας

$$f_r(r \mid s_i = 3) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{r-3}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}$$



$$\|s_i\| = i\sqrt{E}$$

Ομοίως, στην έξοδο του ΣΠΦ είναι με $\sigma^2 = N_o/2$, οι δε συναρτήσεις πιθανοφάνειας είναι

$$SNR = \frac{i^2 E}{N_o/2} = \frac{\|s_i\|^2}{N_o/2}$$

$$f_r(r \mid s_i) = \frac{1}{\sqrt{N_o \pi}} e^{-\frac{\|r - s_i\|^2}{N_o}}$$

Φώραση παλμών PAM (συνέχεια)

Ανάλυση σφάλματος L-ASK παρουσία AWGN

$$P_e = \frac{L-1}{L} erfc\left(\sqrt{\frac{3\log_2 L}{L^2 - 1} \frac{E_{b,av}}{N_o}} \right)$$

όπου $E_{b,av} \equiv \frac{\text{μέση ενέργεια συμβόλου}}{\#\text{ bits ανά σύμβολο}} = \frac{E_{av}}{\log_2 L}$

(βλ. σημειώσεις, Κεφάλαιο 3, παράδειγμα 3.4.2)

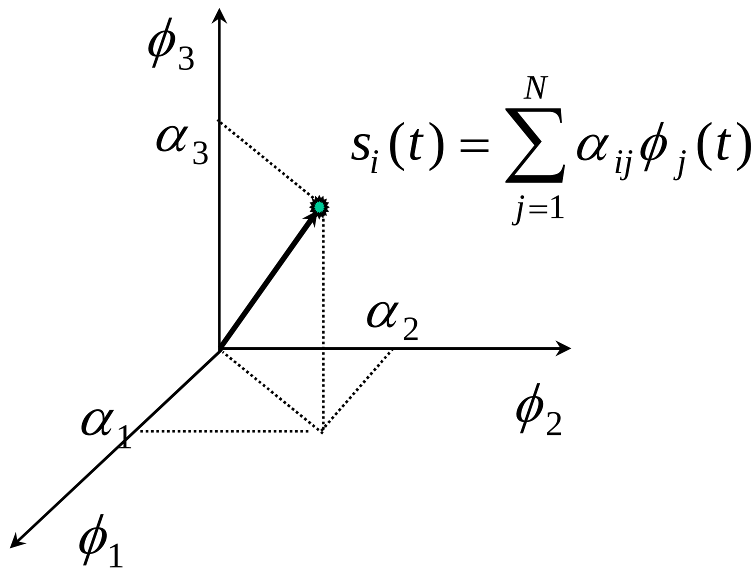
Σηματικοί αστερισμοί

Symbol set: $\mathbf{C} = \{m_1, m_2, \ldots m_M\}$ — # bits/symbol: $\log_2 M$

Signal set: $\mathbf{S} = \{s_1, s_2, \ldots s_M\}$

$$\alpha_{ij} \equiv \langle s_i, \phi_j \rangle \equiv \int_0^T s_i(t)\phi_j(t)dt$$

$$\|s_i(t)\|^2 \equiv \int_0^T s_i^2(t)dt = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^2$$



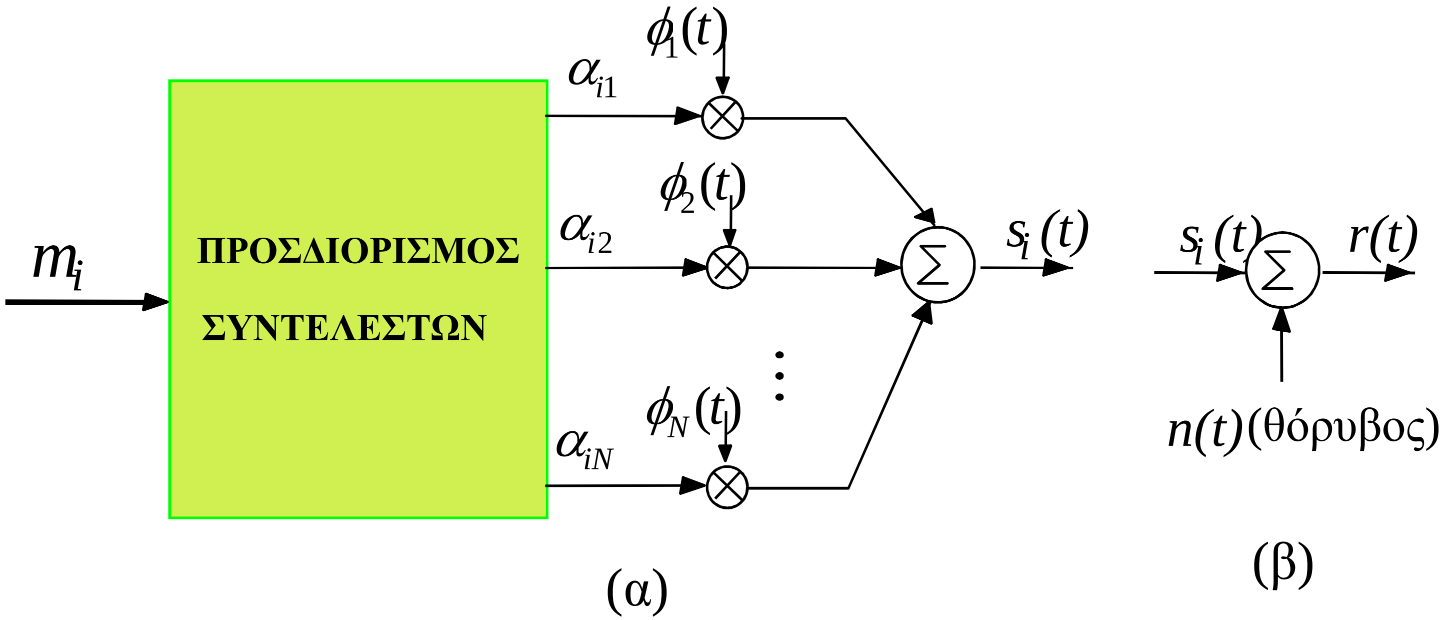
Ορθογωνοποίηση Gram-Schmidt

(από τα s_i , $i=1,2,\ldots M$,   τα ϕ_j , $j=1,2,\ldots N$)

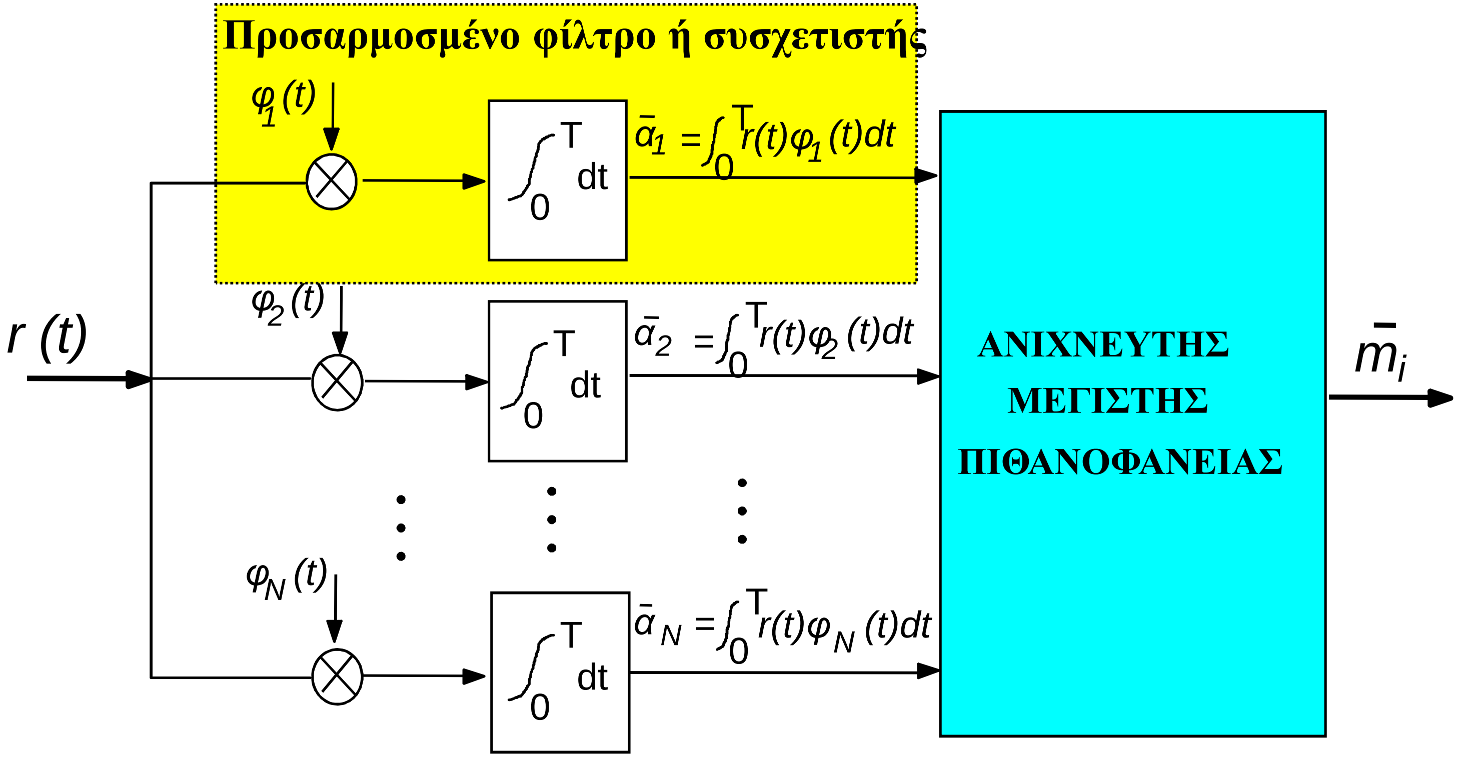
$$\phi_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|}, \quad \phi_2 = \frac{s_2 - (s_2.\phi_1)\phi_1}{\|s_2 - (s_2.\phi_1)\phi_1\|}, \quad \phi_3 = \frac{s_3 - (s_3.\phi_1)\phi_1 - (s_3.\phi_2)\phi_2}{\|s_3 - (s_3.\phi_1)\phi_1 - (s_3.\phi_2)\phi_2\|}, \cdots$$

$$until \;\; s_{N+1} = \sum_{j=1}^{N} s_{N+1}.\phi_j$$

Πομπός & δίαυλος στο γραμμικό χώρο των σημάτων



Δέκτης
στο γραμμικό χώρο των σημάτων



Πρόβλημα Αναγνώρισης

Από τη γνώση των συντελεστών $\overline{\alpha}_j$ στο δέκτη, να βρεθεί ποιό απ' τα s_i έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να έχει εκπεμφθεί από τον πομπό

Επίλυση του προβλήματος αναγνώρισης

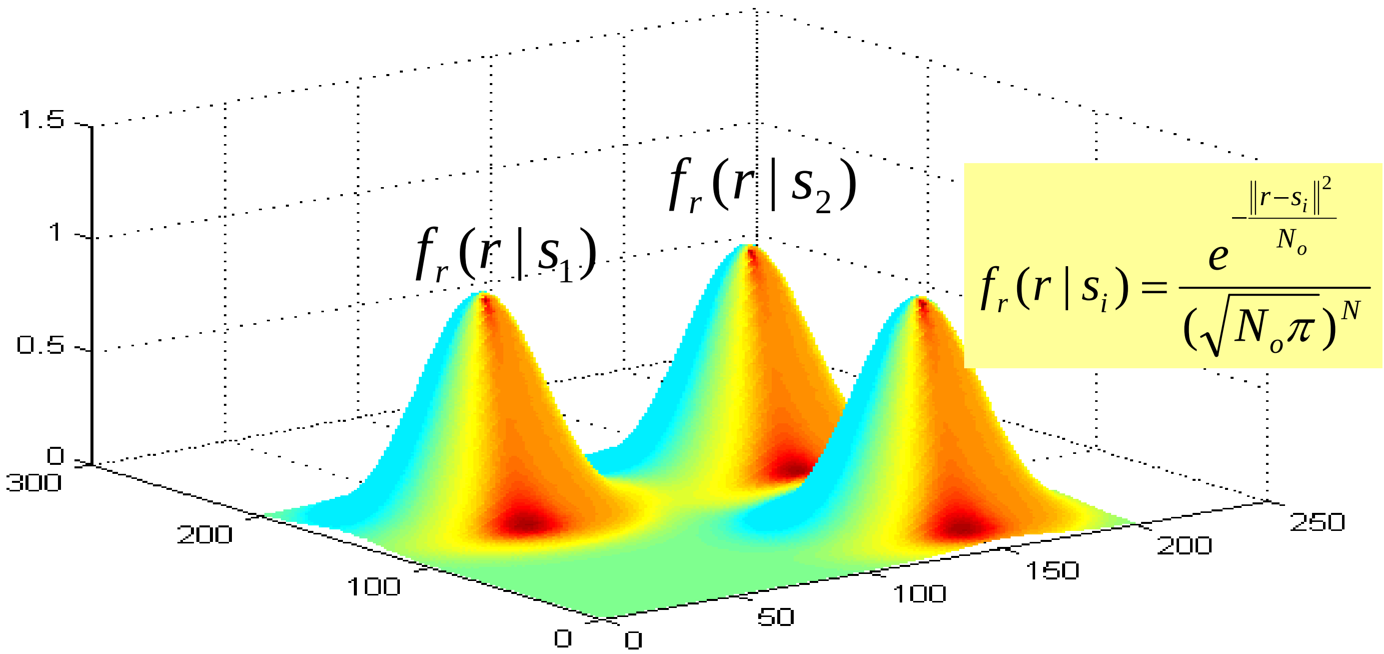
$$? \quad \max_{i} p(s_i \mid r) \qquad (1)$$

Από Bayes:

$$p(s_i \mid r) = p(s_i)\frac{f_r(r \mid s_i)}{f_r(r)}$$

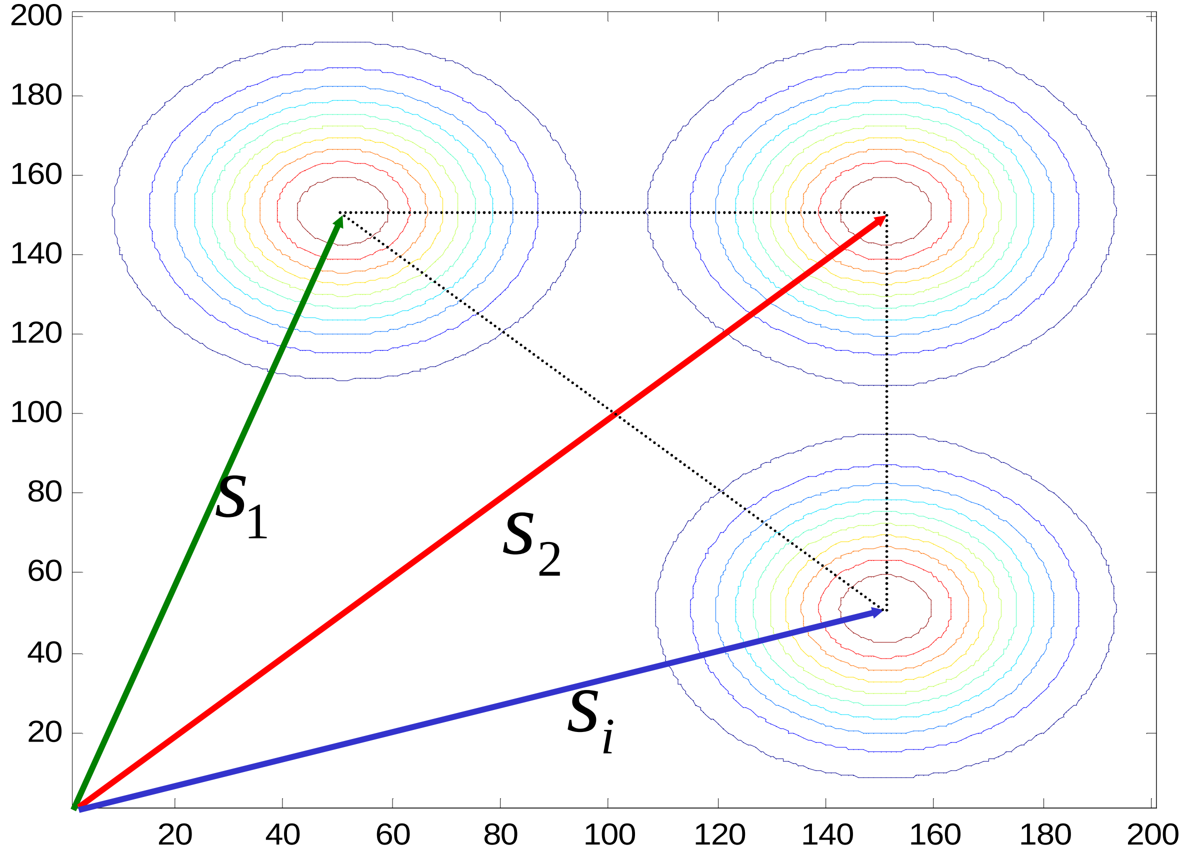
$$(1) \leftrightarrow \quad \max \ f_r(r \mid s_i), \quad i = 1,2\ldots M$$

Συναρτήσεις πιθανοφάνειας (1/2)

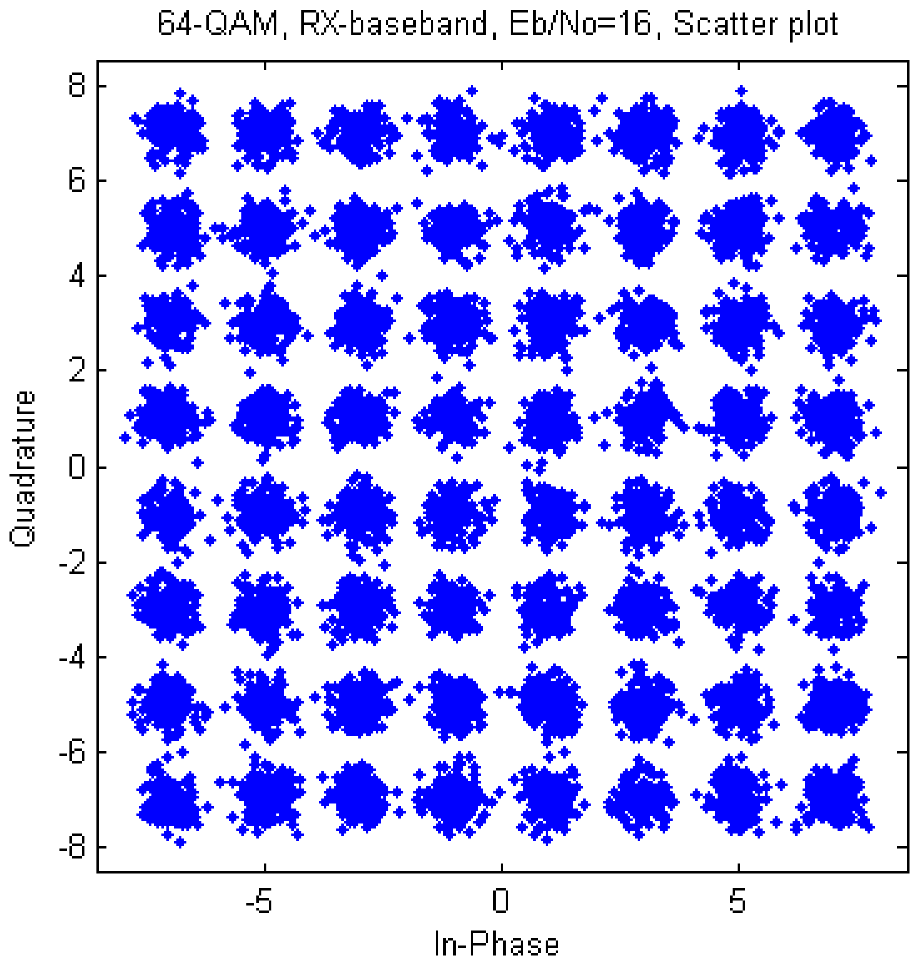


Συναρτήσεις πιθανοφάνειας (2/2)

(contours)



Διαγράμματα διασκορπισμού



Ανάλυση σφάλματος

S_i : περιοχή απόφασης s_i $\bigcup_i S_i = S$ $S_i \bigcup \overline{S}_i = S$

$$P_e = \sum_{i=1}^{M} \Pr\{s_i \bigcap r \in \overline{S}_i\} = \sum_{i=1}^{M} \Pr\{s_i\} \Pr\{r \in \overline{S}_i \mid s_i\}$$

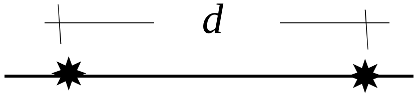
$$= \sum_{i=1}^{M} \Pr\{s_i\} \int_{\overline{S}_i} f_r(r \mid s_i) dr$$

Για ισοπίθανα s_i : $$P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \int_{\overline{S}_i} f_r(r \mid s_i) dr$$

Πρόβλημα: ο υπολογισμός του ολοκληρώματος, ακόμη και για μονοδιάστατες συναρτήσεις πιθανοφάνειας.
π.χ. για gaussian noise, η ολοκληρούμενη ποσότητα είναι της μορφής e^{-x^2}

Πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου

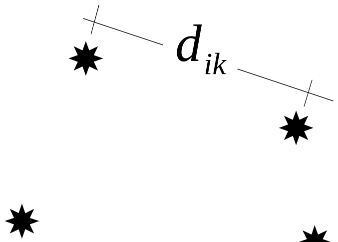
Δυαδικό σύστημα:



$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{N_o}} \right)$$

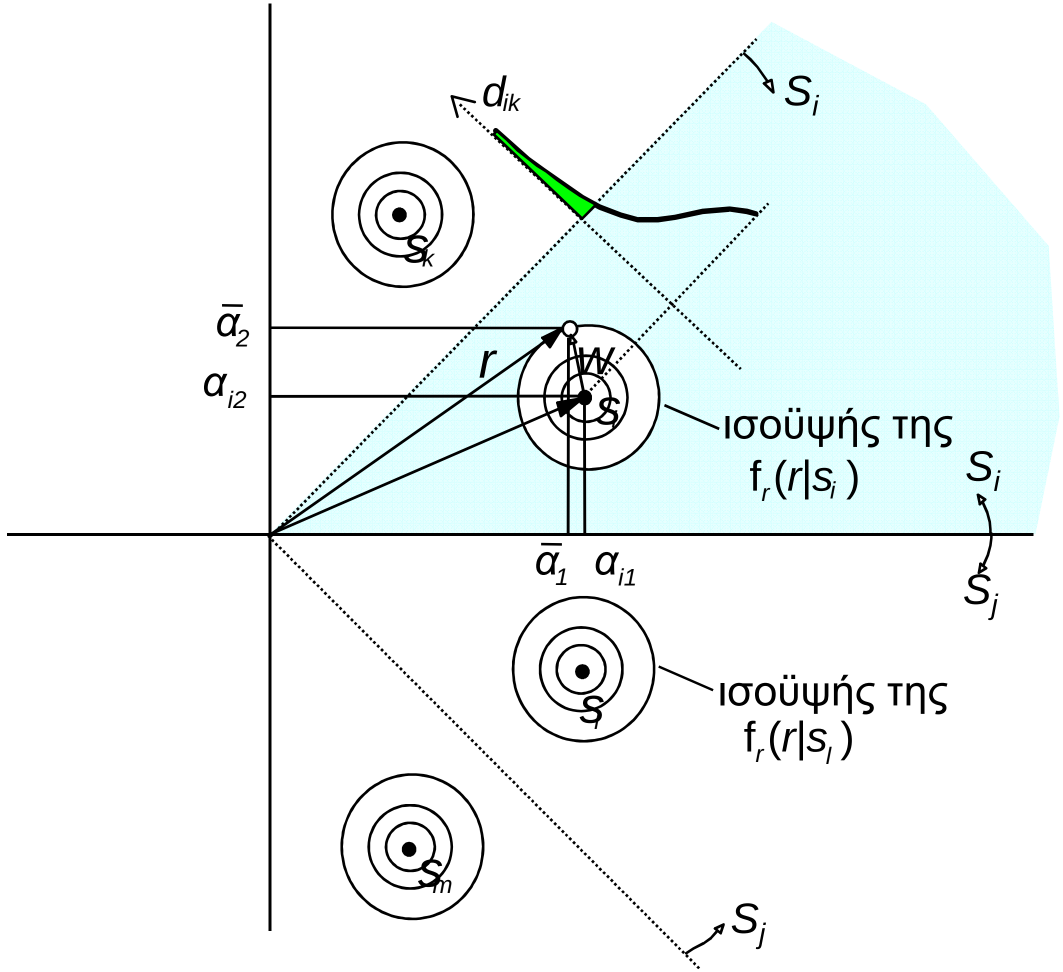
$$= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}} \right)$$

M-level:



$$P_e \le \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M} erfc\left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{N_o}} \right)$$

Δισδιάστατος σηματικός αστερισμός



Βιβλιογραφία

[1] B. Sklar *Ψηφιακές Επικοινωνίες*, *Θεωρία και Εφαρμογές*, Παπασωτηρίου, 2011. Κεφάλαιο 3 (3.1, 3.2)

[2] S. Haykin, M. Moher, *Συστήματα Επικοινωνίας* , 5η έκδοση, Ππαπασωτηρίου 2010. Κεφάλαιο 8