Δειγματοληψία

Θεώρημα δειγματοληψίας

- Ένα βαθυπερατό σήμα πεπερασμένης ενέργειας που δεν περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες των *W* Hertz μπορεί να περιγραφθεί πλήρως από τις τιμές του σε χρονικές στιγμές ισαπέχουσες κατά *1/2W* sec
- Ένα βαθυπερατό σήμα πεπερασμένης ενέργειας που δεν περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες των *W* Hertz μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από δείγματά του που λαμβάνονται με ρυθμό *2W* ανά sec
- Nyquist 1928, Shannon 1949

Φάσμα σήματος μετά τη δειγματοληψία

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$x_\delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$X_\delta(f) = X(f) \otimes \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) \otimes \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

Περιοδικότητα φάσματος

- Η δειγματοληψία δημιουργεί περιοδικό φάσμα
  - Διακριτός χρόνος → περιοδικό φάσμα
- Αντιγράφει το φάσμα του αρχικού σήματος στα ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας nf_s

Περιοδικότητα φάσματος

- Τα δείγματα του σήματος είναι οι συντελεστές Fourier του περιοδικού φάσματος

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \Rightarrow$$

$$X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\exp(-j2\pi nfT_s) \Rightarrow$$

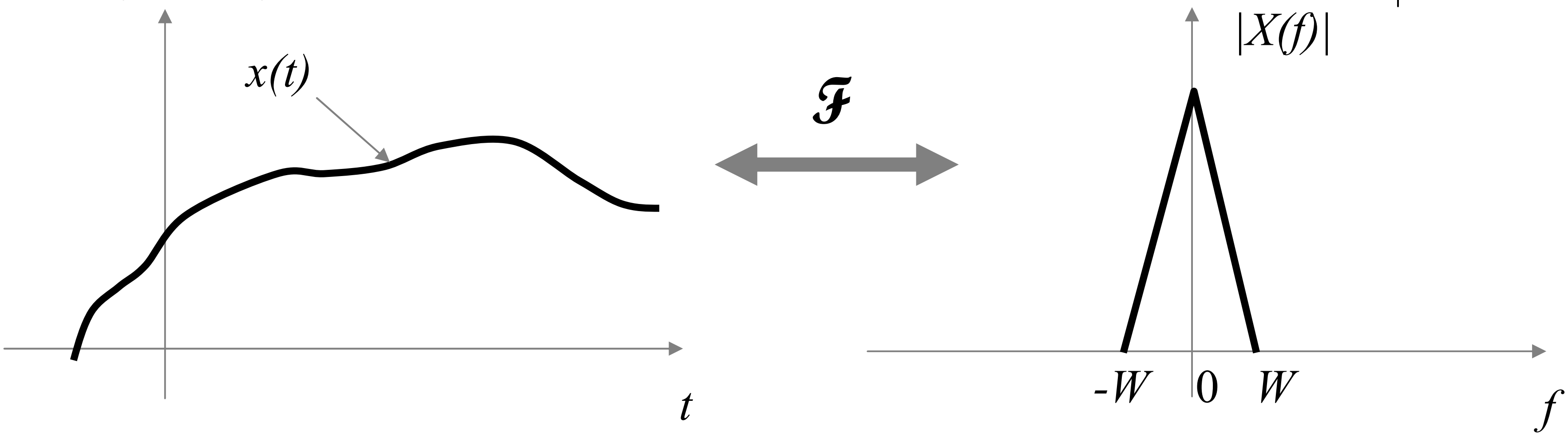
$$x(nT_s) = T_s\int_0^{1/T_s} X_\delta(f)\exp(jn2\pi fT_s)df$$

Επίδραση δειγματοληψίας στο φάσμα

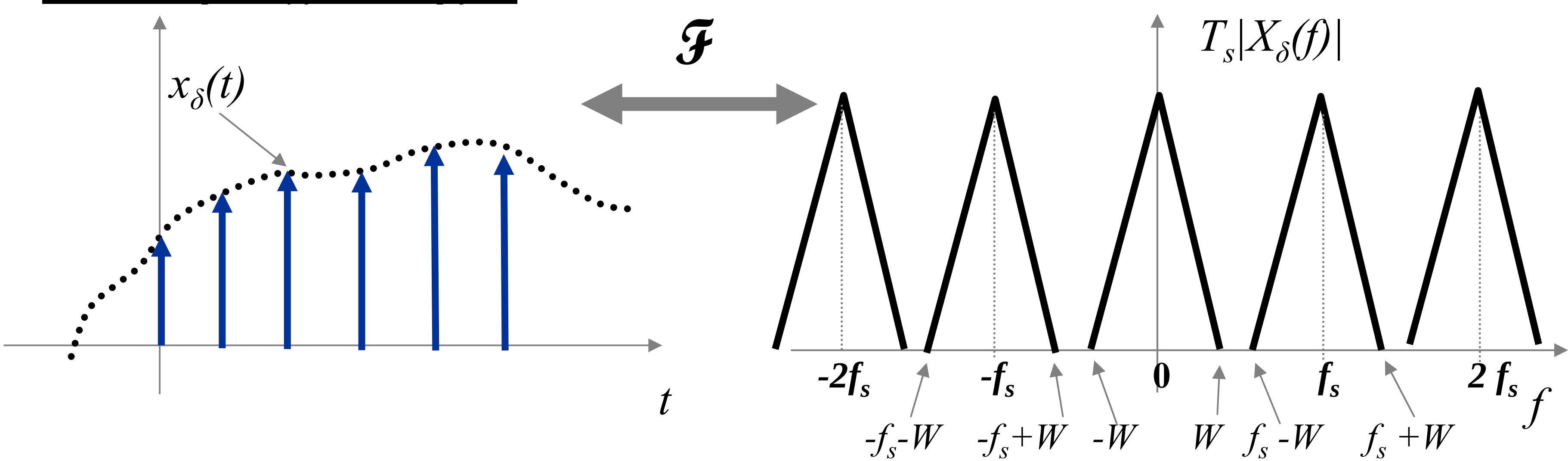
- Εάν η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s \geq 2W$, τότε το περιοδικό φάσμα συνίσταται σε μια μη επικαλυπτόμενη επανάληψη του φάσματος του αρχικού σήματος
  - Το αρχικό σήμα μπορεί να ληφθεί με διάβαση μέσω βαθυπερατού φίλτρου
- Εάν $f_s < 2W$ εμφανίζεται επικάλυψη (aliasing), δηλαδή, αναδίπλωση του φάσματος

Επίδραση δειγματοληψίας στο φάσμα

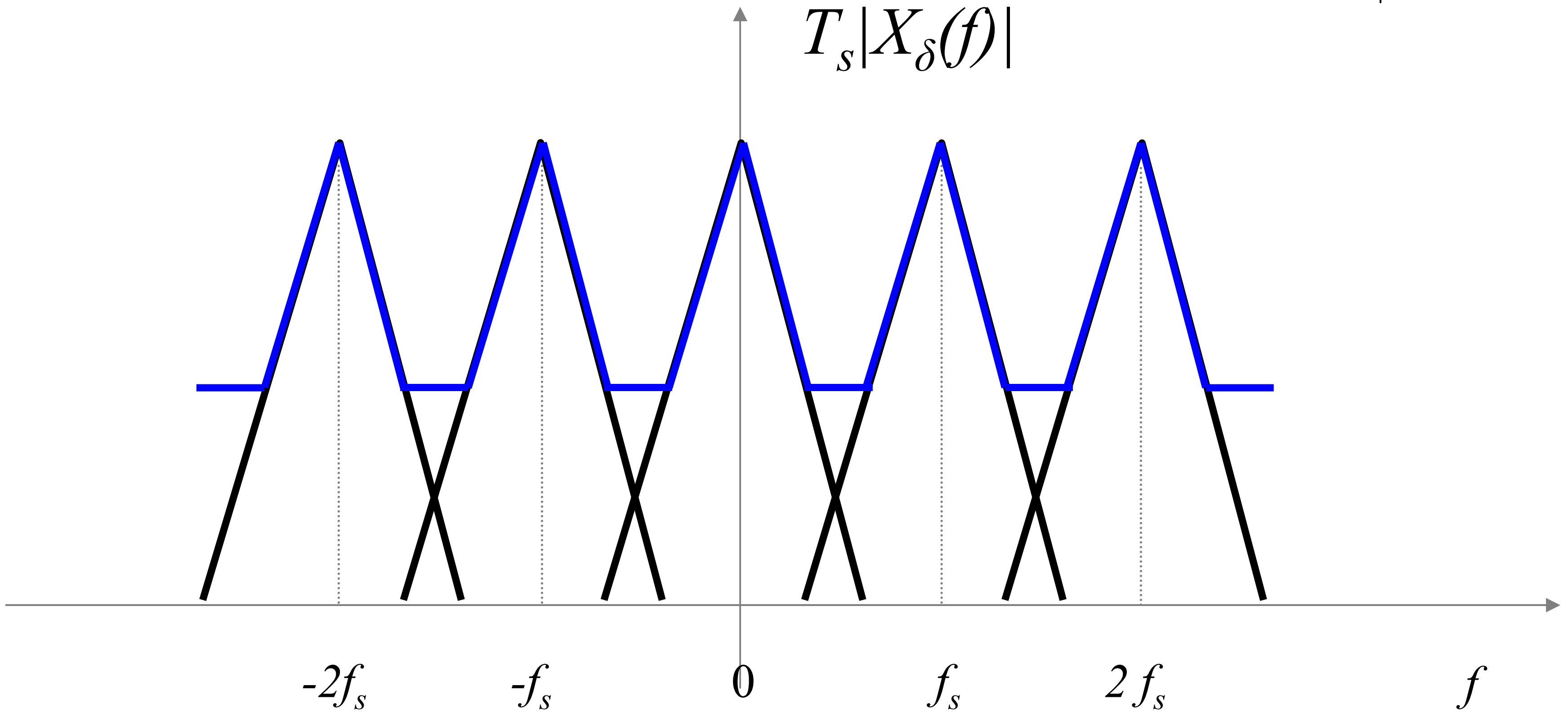
Αρχικό σήμα



Μετά τη δειγματοληψία



Επικάλυψη

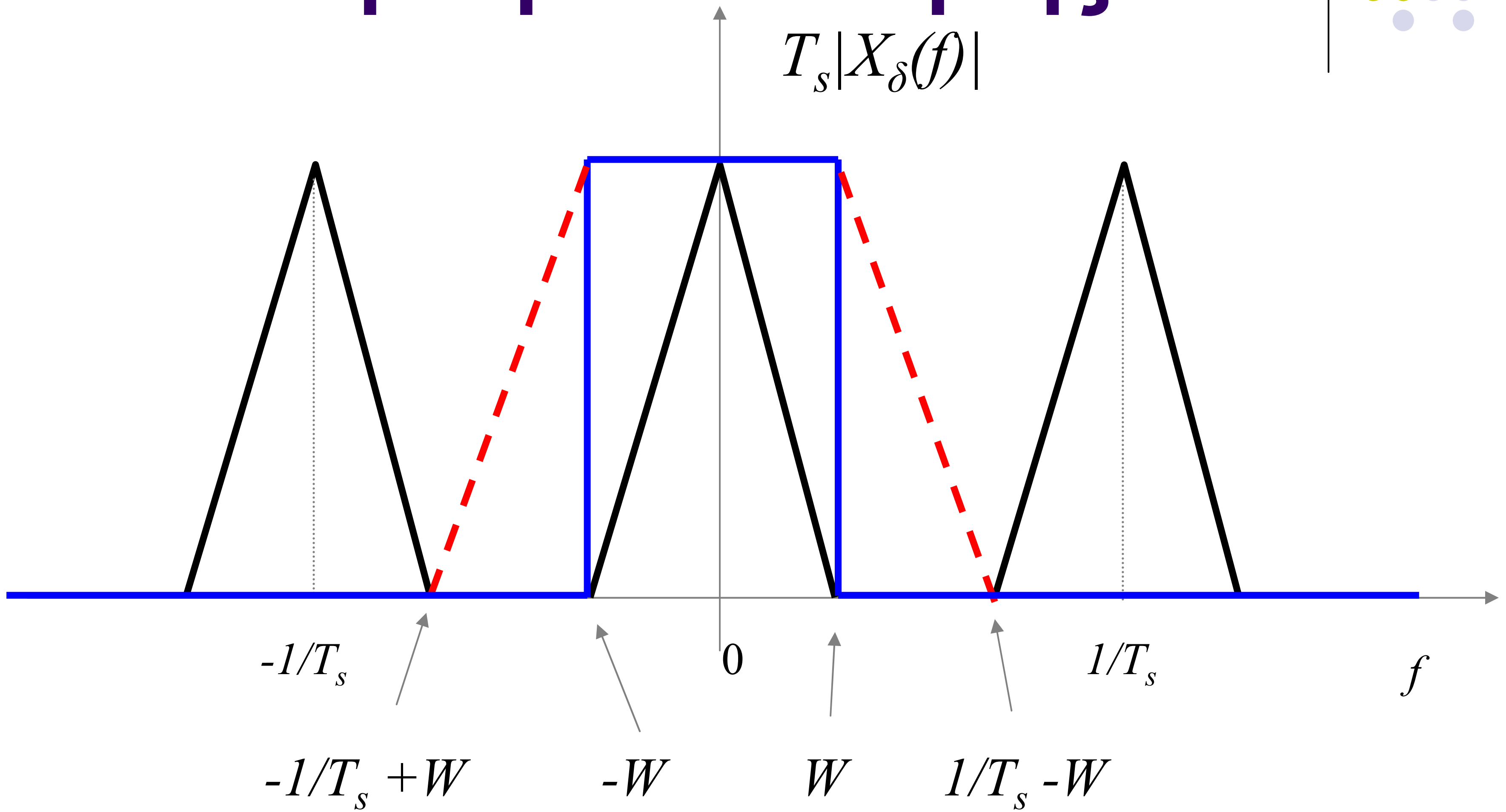


Ανάκτηση του σήματος

- Εάν $T_s \leq ½W$ το αρχικό σήμα είναι η έξοδος οποιουδήποτε βαθυπερατού φίλτρου, όπου

$$H(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq W \\ 0 & |f| \geq \dfrac{1}{T_s} - W \\ ? & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ιδανικό φίλτρο ανάκτησης



- Απαιτείται ζώνη ασφάλειας (guard band)

Ανάκτηση του σήματος

- Έστω βαθυπερατό φίλτρο ανάκτησης με εύρος ζώνης B, όπου $W \leq B \leq f_s - W$ τότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\exp(j2\pi ft)df = \int_{-B}^{B} T_s X_\delta(f)\exp(j2\pi ft)df$$

$$= T_s \int_{-B}^{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\exp(-j2\pi nfT_s)\exp(j2\pi ft)df$$

$$= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\int_{-B}^{B} \exp\left[j2\pi f\left(t - nT_s\right)\right]df$$

$$= 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left[2B\left(t - nT_s\right)\right]$$

Ανάκτηση του σήματος

- Για το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο ανάκτησης με εύρος ζώνης W και $T_s = ½W$

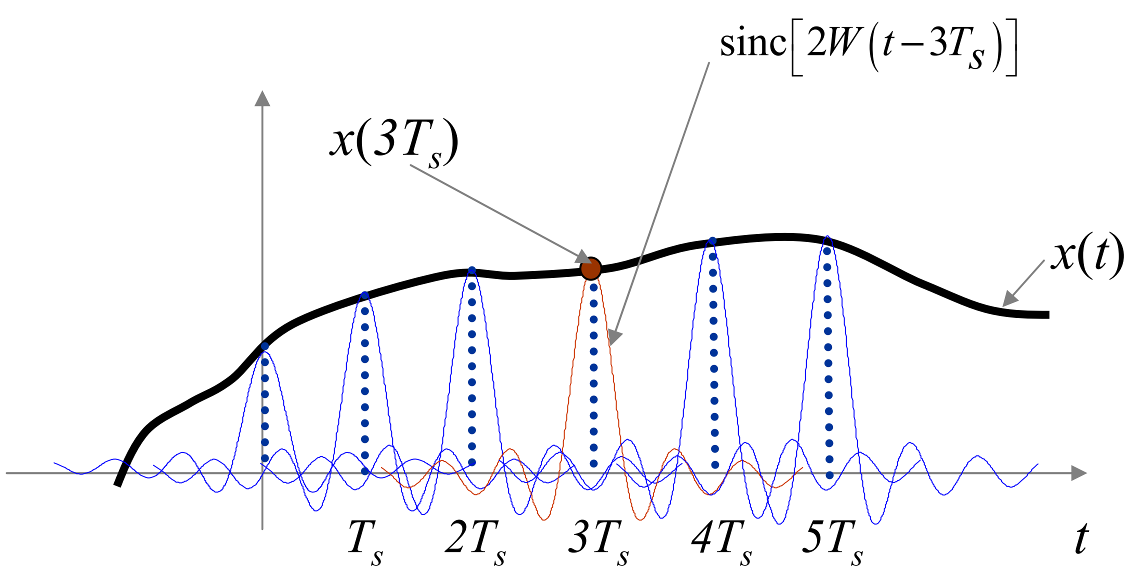
$$x(t) = 2WT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left[2W\left(t - nT_s\right)\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left(f_s t - n\right)$$

Τι σημαίνει αυτό;

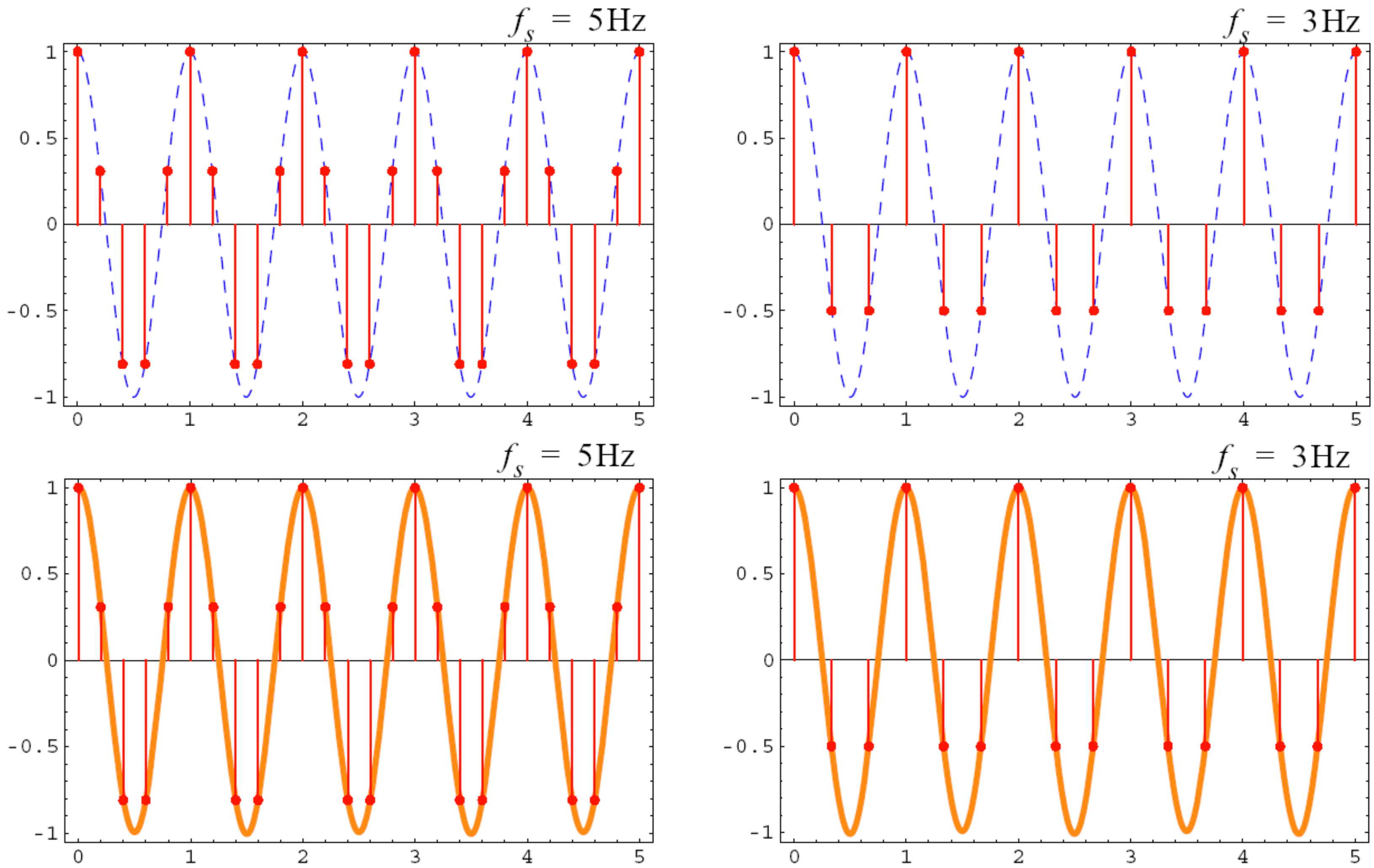
- Μπορούμε να λάβουμε το αρχικό σήμα χωρίς λάθη αθροίζοντας καθυστερημένες εκδοχές συναρτήσεων sinc με βάρη τα δείγματα



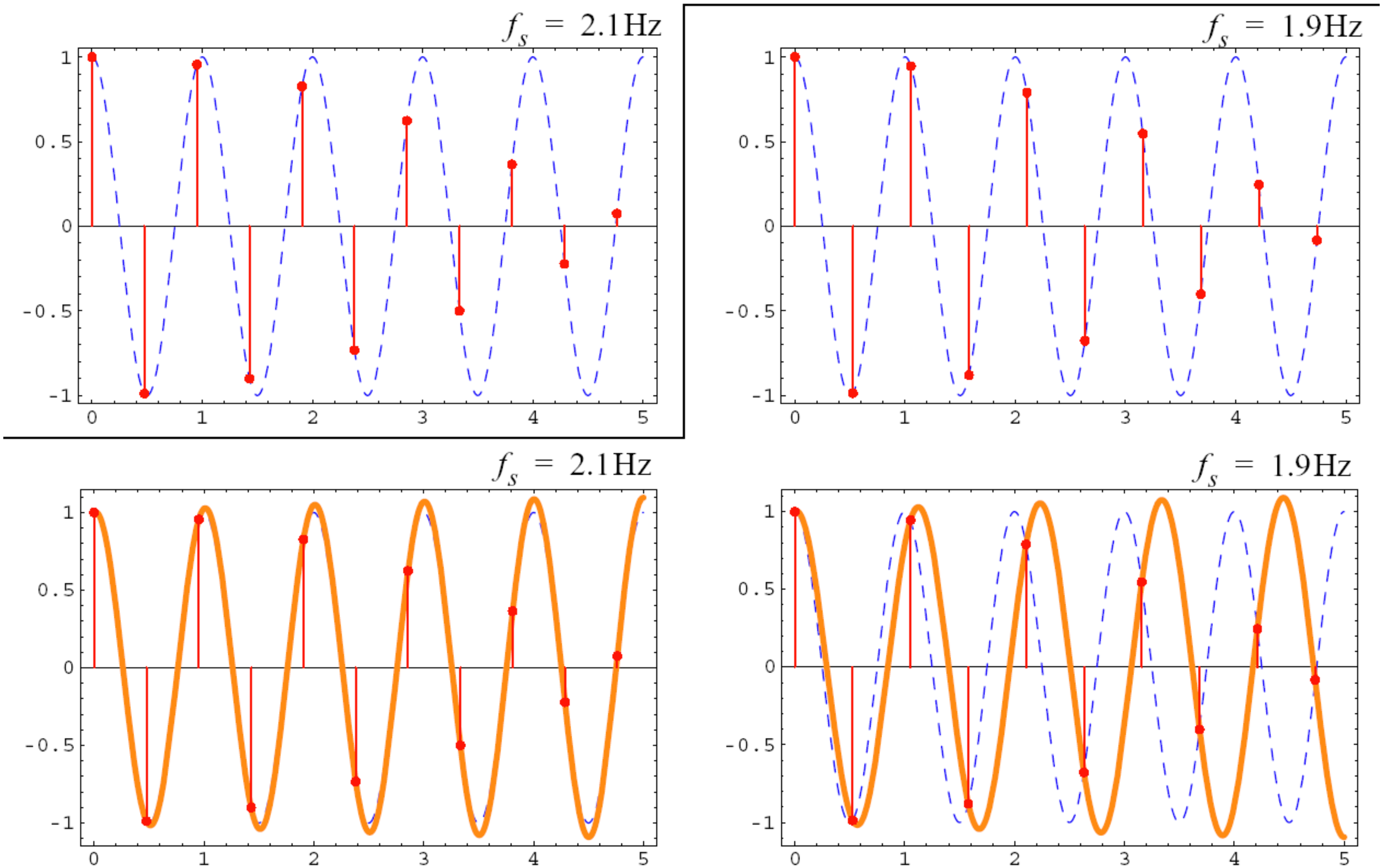
Παράδειγμα 1

- Έστω συνημιτονικό σήμα συχνότητας 1 Hz του οποίου λαμβάνονται δείγματα με συχνότητα f_s = 5, 3, 2.1, 1.9, 1.4 και 1.1 Hz
- Ανασκευάστε το σήμα από τα δείγματά του

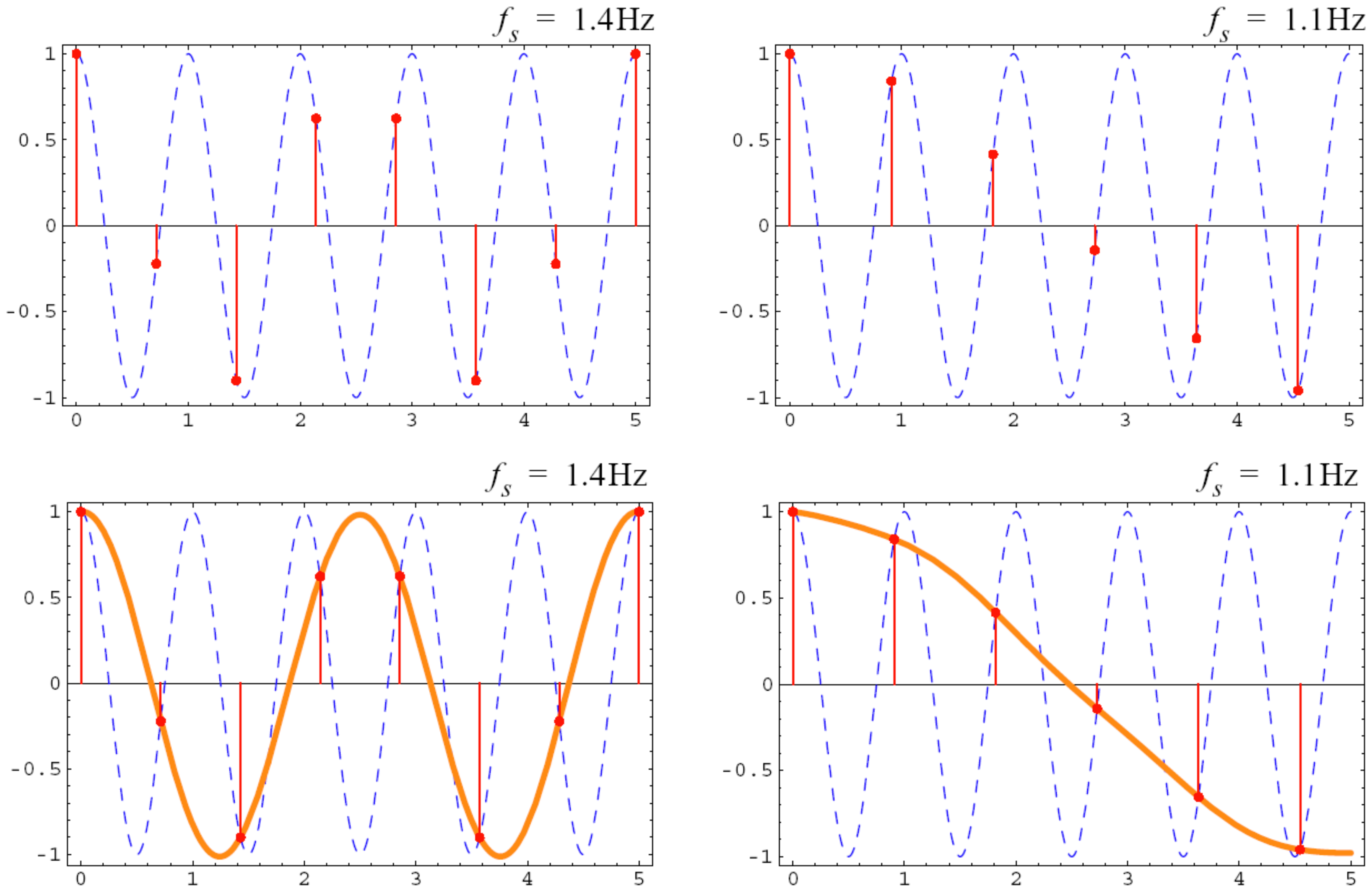
Παράδειγμα 1 - Συχνότητα δειγματοληψίας > 2 Hz



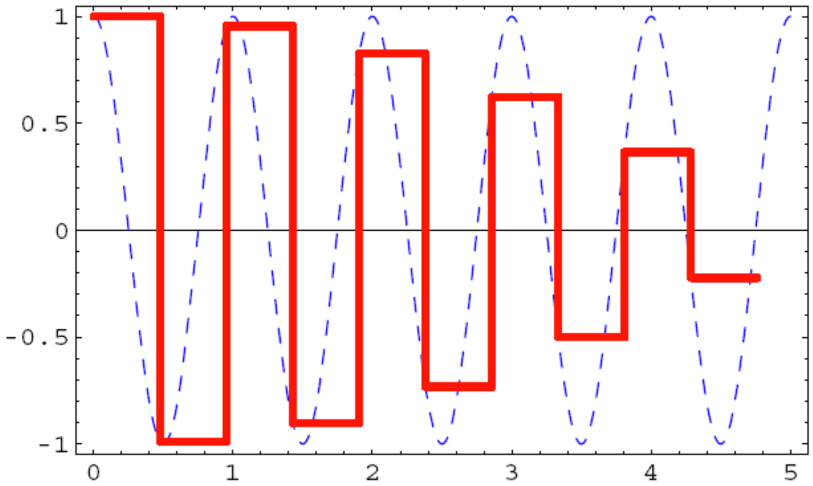
Παράδειγμα 1 - Συχνότητα δειγματοληψίας ~ 2 Hz



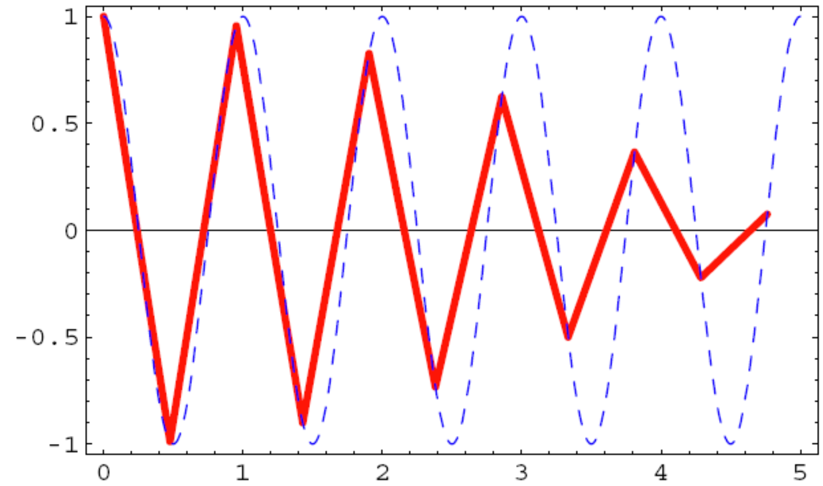
Παράδειγμα 1 - Συχνότητα δειγματοληψίας < 2 Hz



Κακές αναπαραστάσεις

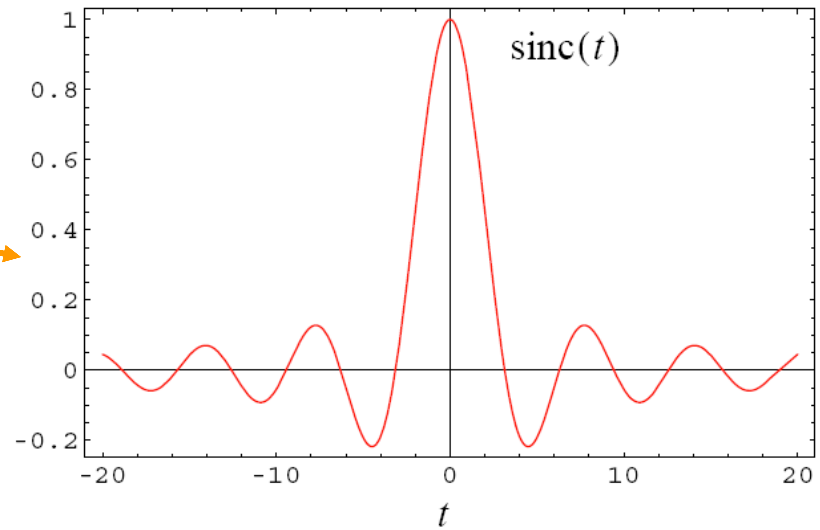


$f_s = 2.1\text{Hz}$



$f_s = 2.1\text{Hz}$

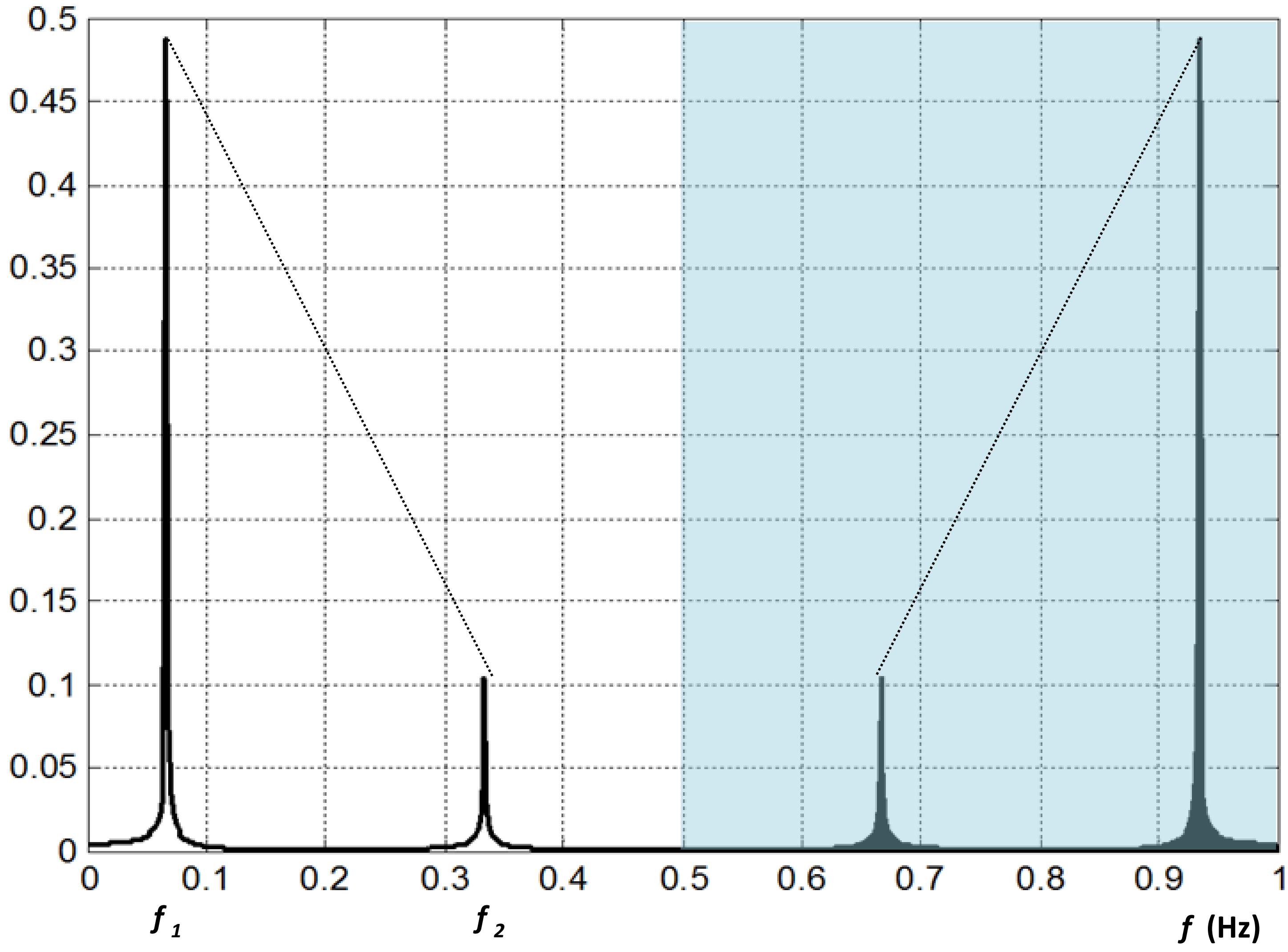
Τα δείγματα πρέπει να πολλαπλασιαστούν με



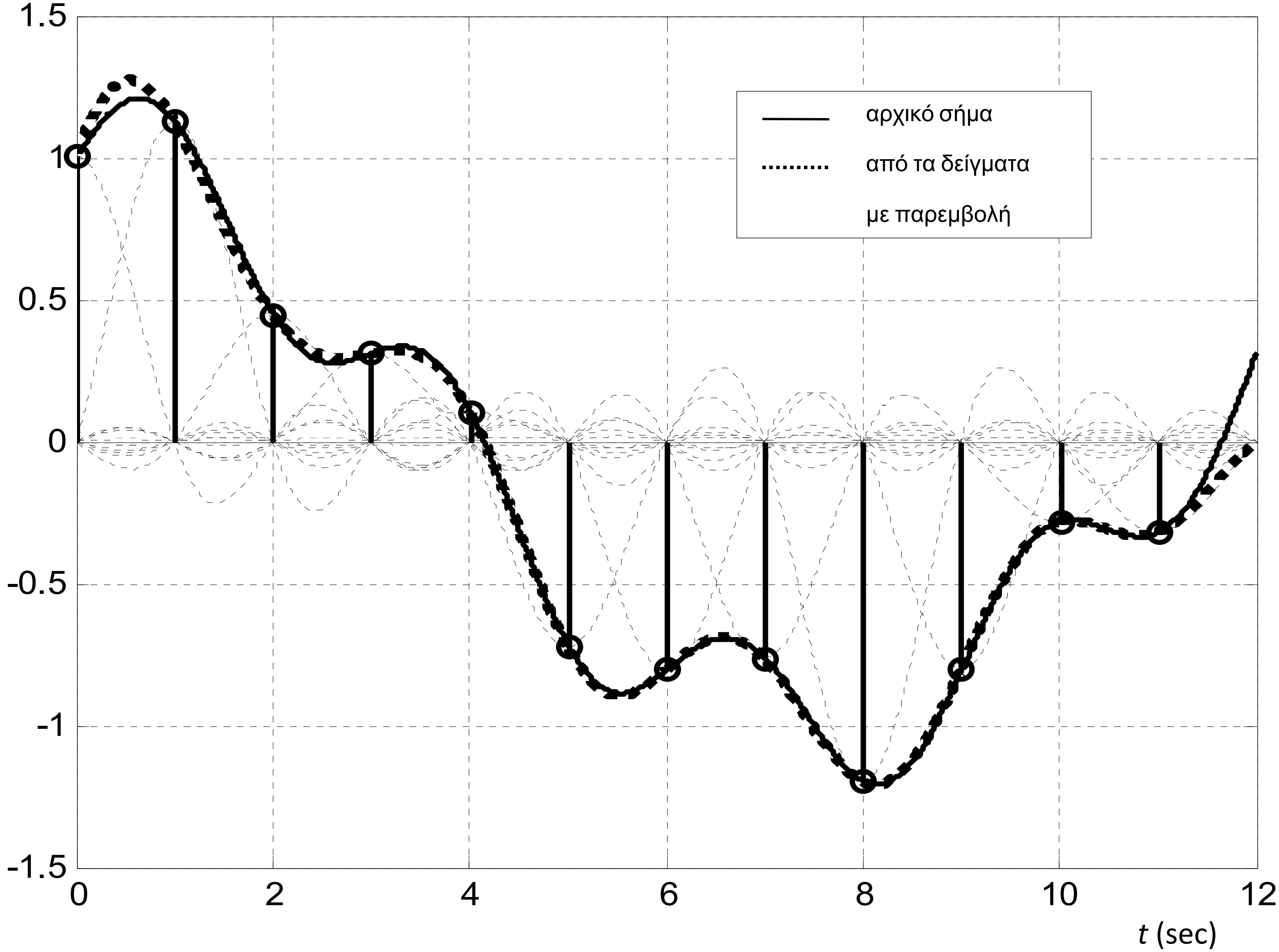
Παράδειγμα 2

- Έστω σήμα που προκύπτει ως άθροισμα δύο ημιτονικών κυματομορφών συχνότητας f_1=0.067 Hz και f_2=0.333 Hz

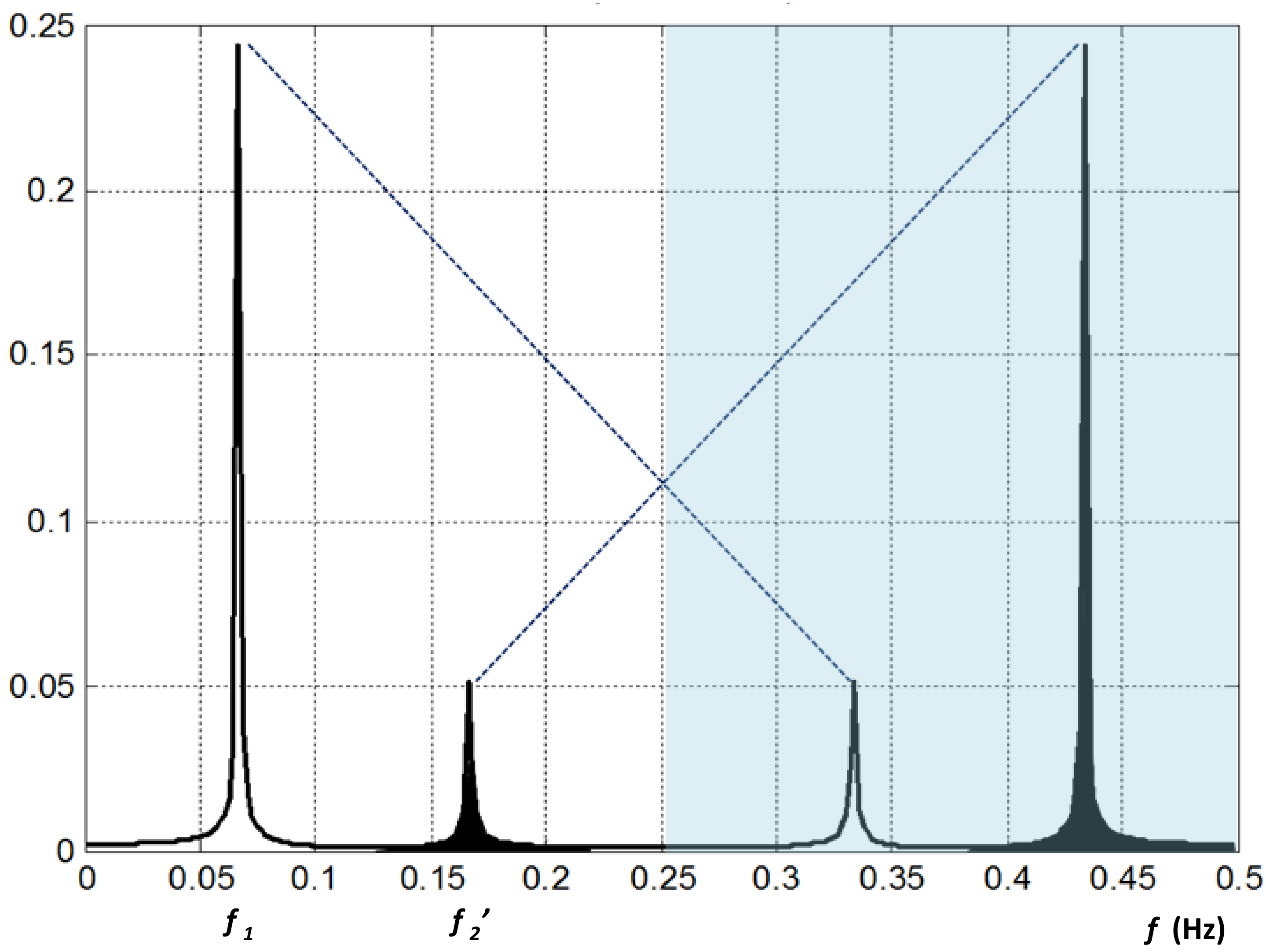
Παράδειγμα 2 – πεδίο συχνότητας



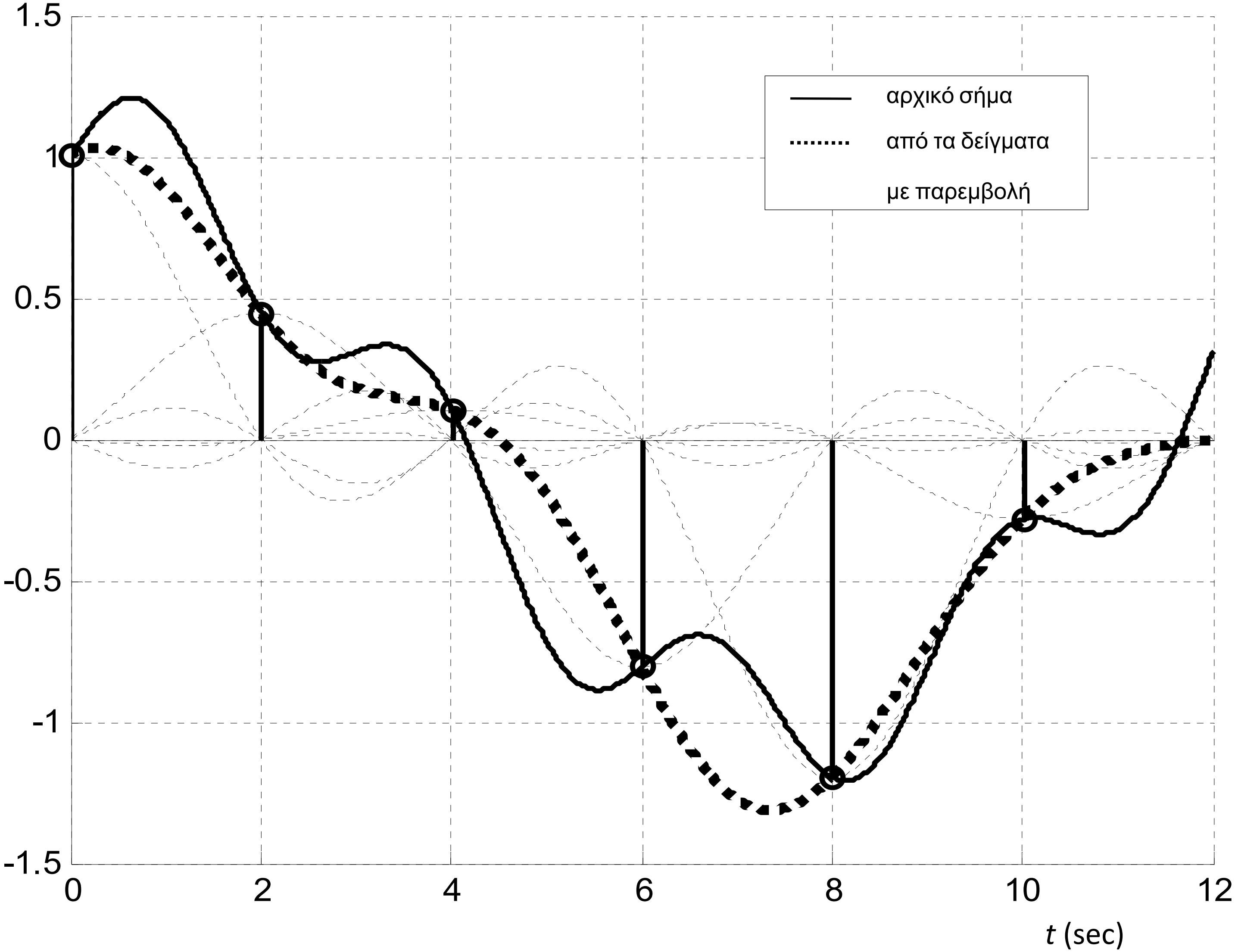
Παράδειγμα 2 – Ανακατασκευή στο πεδίο χρόνου (f_s=1 Hz)



Παράδειγμα 2 – Επικάλυψη δειγματοληψία με (f_s=0.5 Hz)

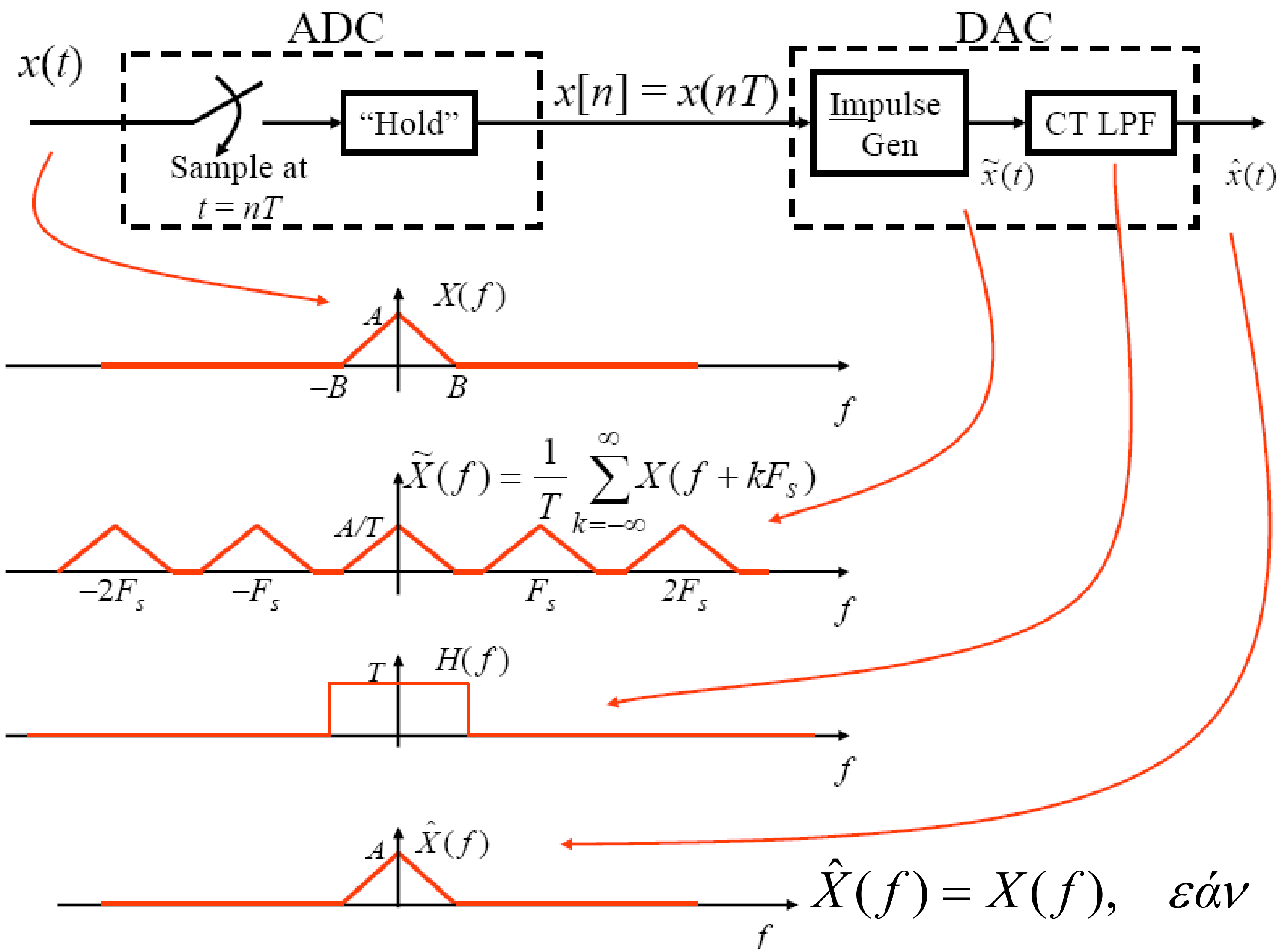


Παράδειγμα 2 – Επικάλυψη στο πεδίο του χρόνου



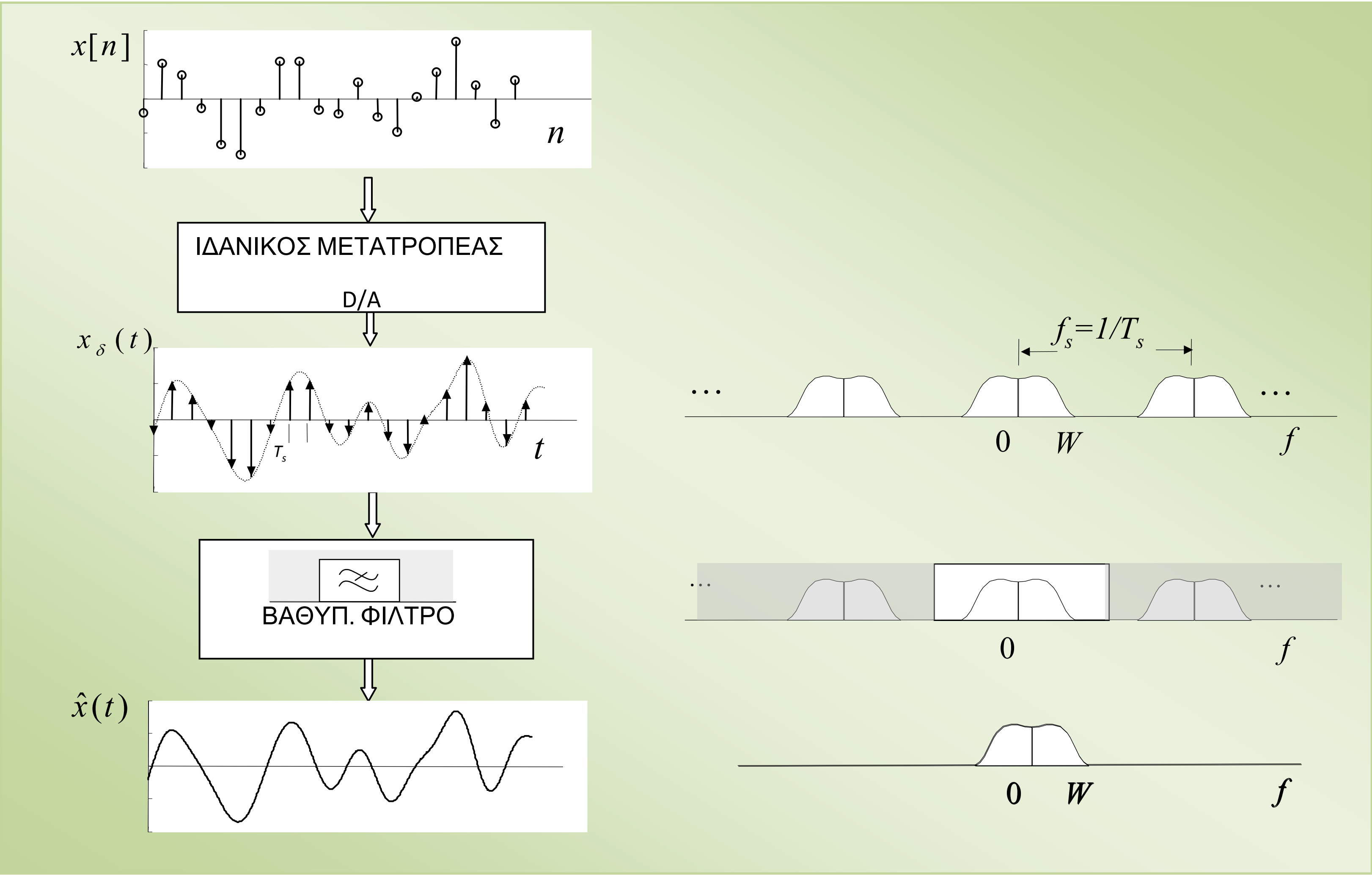
Σχέση δειγματοληψίας και μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Δειγματοληψία και ανακατασκευή

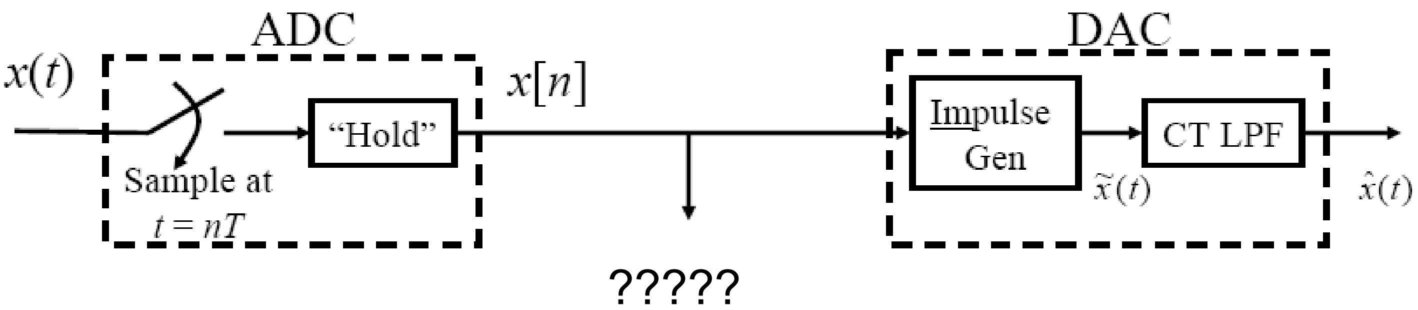


$$\hat{X}(f) = X(f), \quad \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad F_s \geq 2B$$

Ανακατασκευή από τα δείγματα



Τι ισχύει με τα δείγματα;



$$X_{\delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\exp(-j2\pi n f T_s)$$

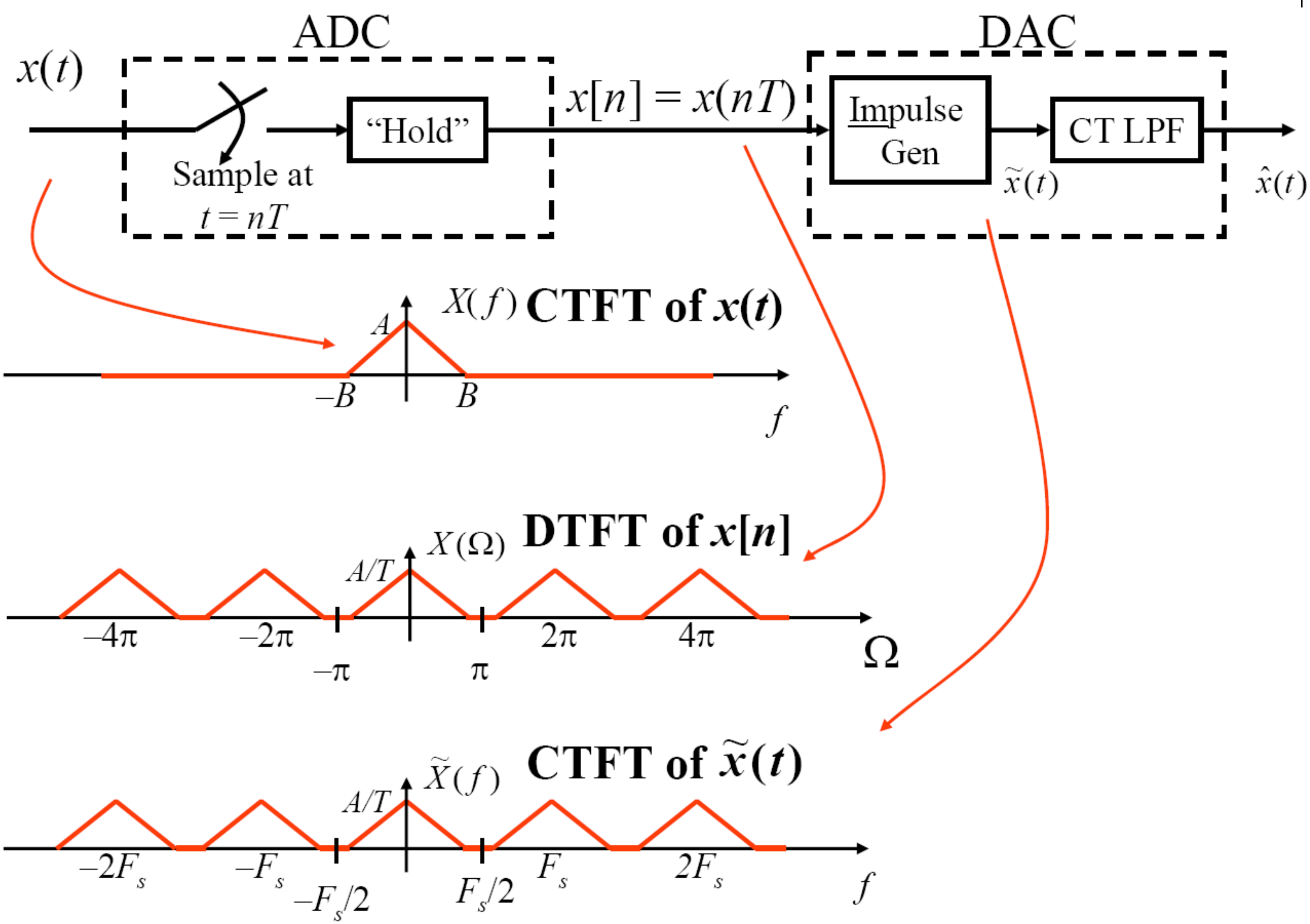
DTFT

- Η δειγματοληψία αποτελεί τη βάση για τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

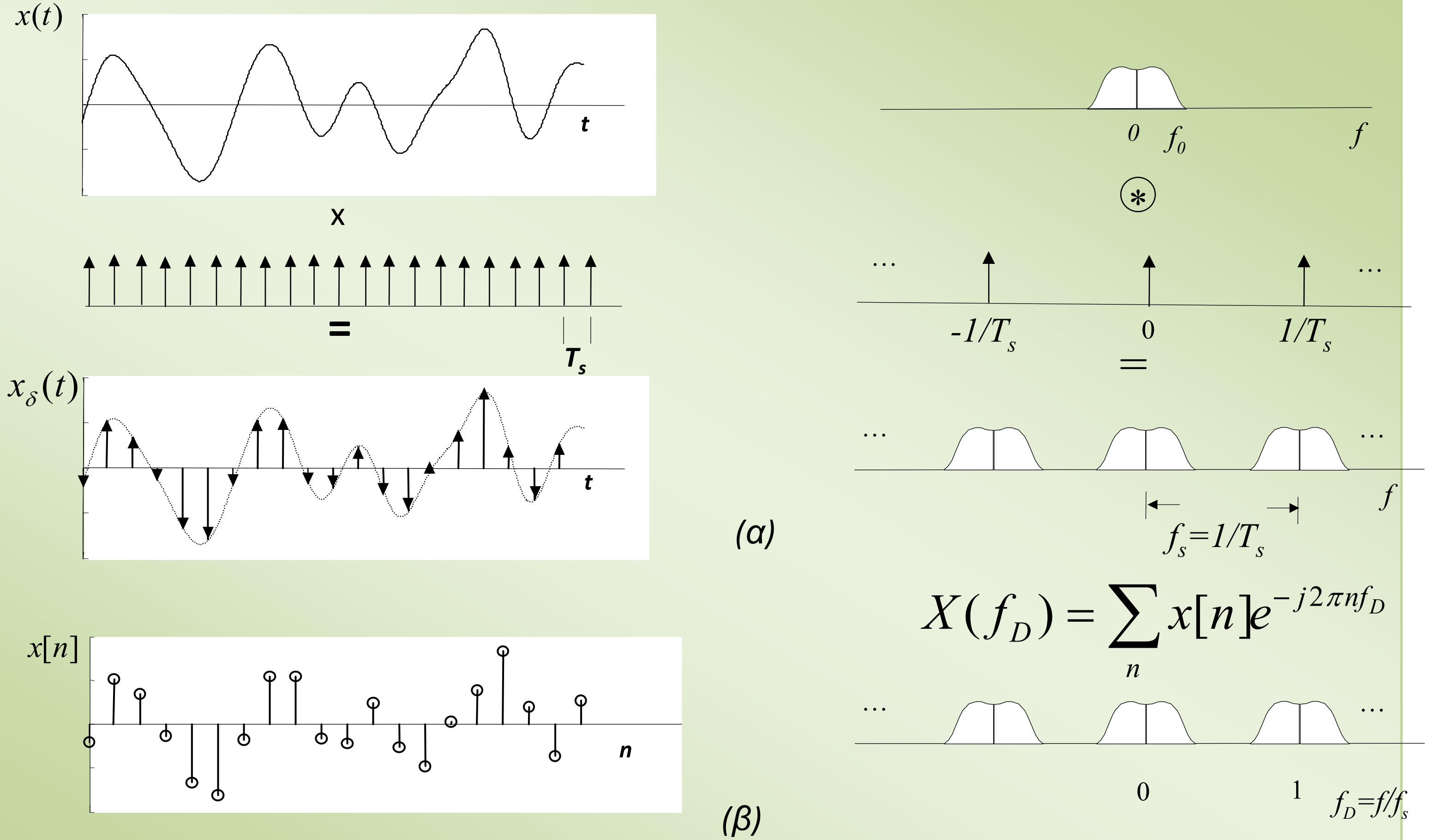
- DTFT $$X(\Omega) \triangleq \sum_{n} x[n] e^{-jn\Omega}$$

- IDTFT $$x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega$$

Η φυσική σημασία του DTFT



Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)



$$X(f_D) = \sum_n x[n] e^{-j2\pi n f_D}$$

Πρακτικά θέματα δειγματοληψίας

Προβλήματα κατά τη δειγματοληψία

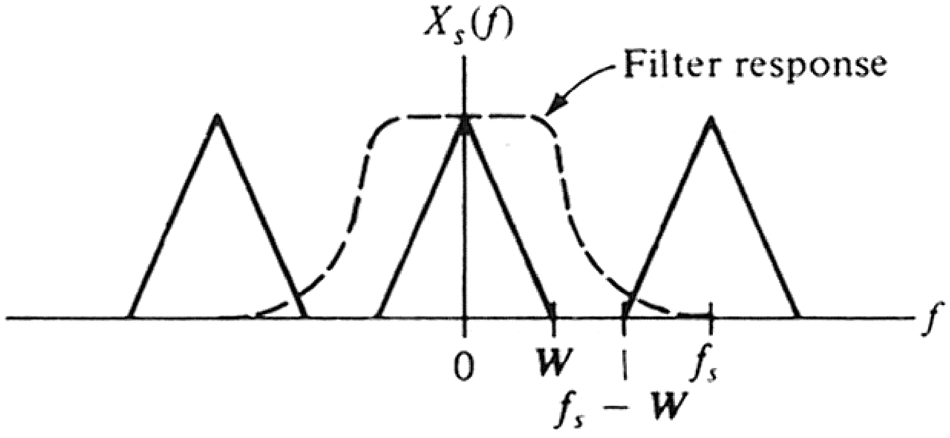
- Η συνάρτηση δειγματοληψίας αποτελείται από παλμούς πεπερασμένου πλάτους και διάρκειας αντί κρουστικές συναρτήσεις
  - Οδηγεί σε ποικίλα συστήματα διαμόρφωσης
- Το φίλτρο ανάκτησης δεν είναι ιδανικό
- Η επικάλυψη πρέπει να αποφευχθεί
- Τα σήματα είναι χρονικά πεπερασμένα, άρα το φάσμα τους δεν μπορεί να είναι βαθυπερατό

Μη ιδανικοί παλμοί δειγματοληψίας

- Η μορφή των παλμών δειγματοληψίας δεν επηρεάζει τη διαδικασία, υπό την προϋπόθεση ότι το διαμορφωμένο σήμα προκύπτει ως γινόμενο του σήματος πληροφορίας με περιοδική συνάρτηση τραίνου παλμών
  - Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι η δειγματοληψία με παλμούς επίπεδης κορυφής (flat-top sampling)
  - → διαμόρφωση PAM
- Για την αναπαραγωγή μπορεί να απαιτηθεί ισοστάθμιση (equalization)

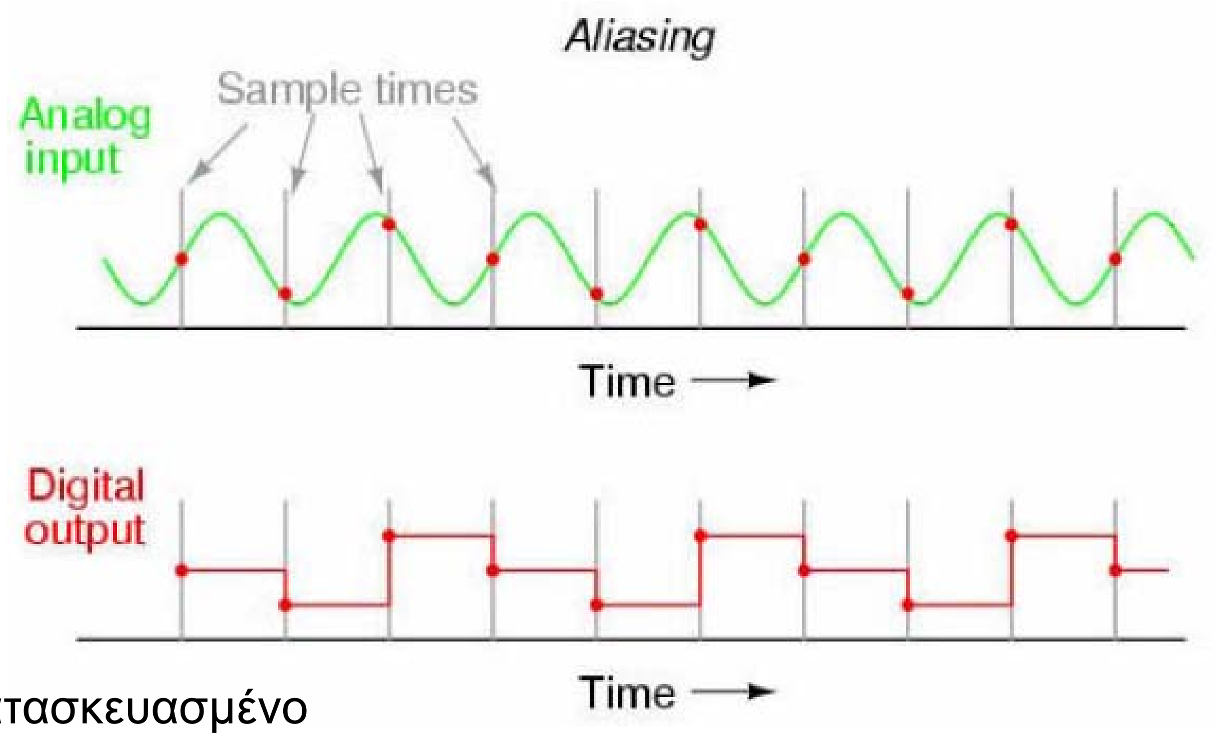
Μη ιδανικό φίλτρο ανάκτησης

- Οι ανεπιθύμητες συχνότητες που περνούν από το φίλτρο εμφανίζονται ως υψίσυχνος θόρυβος

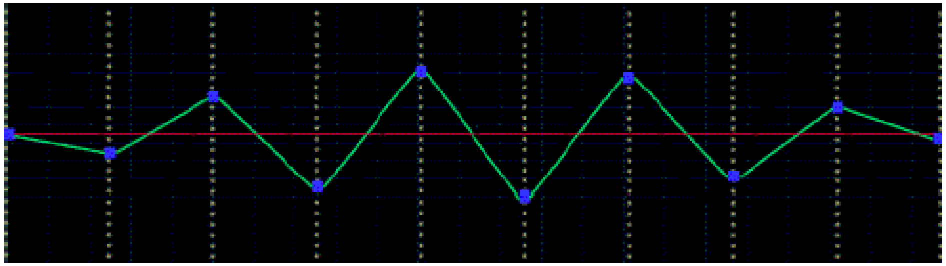


Αποφυγή επικάλυψης

Επικάλυψη



Ανακατασκευασμένο σήμα



Το πρόβλημα

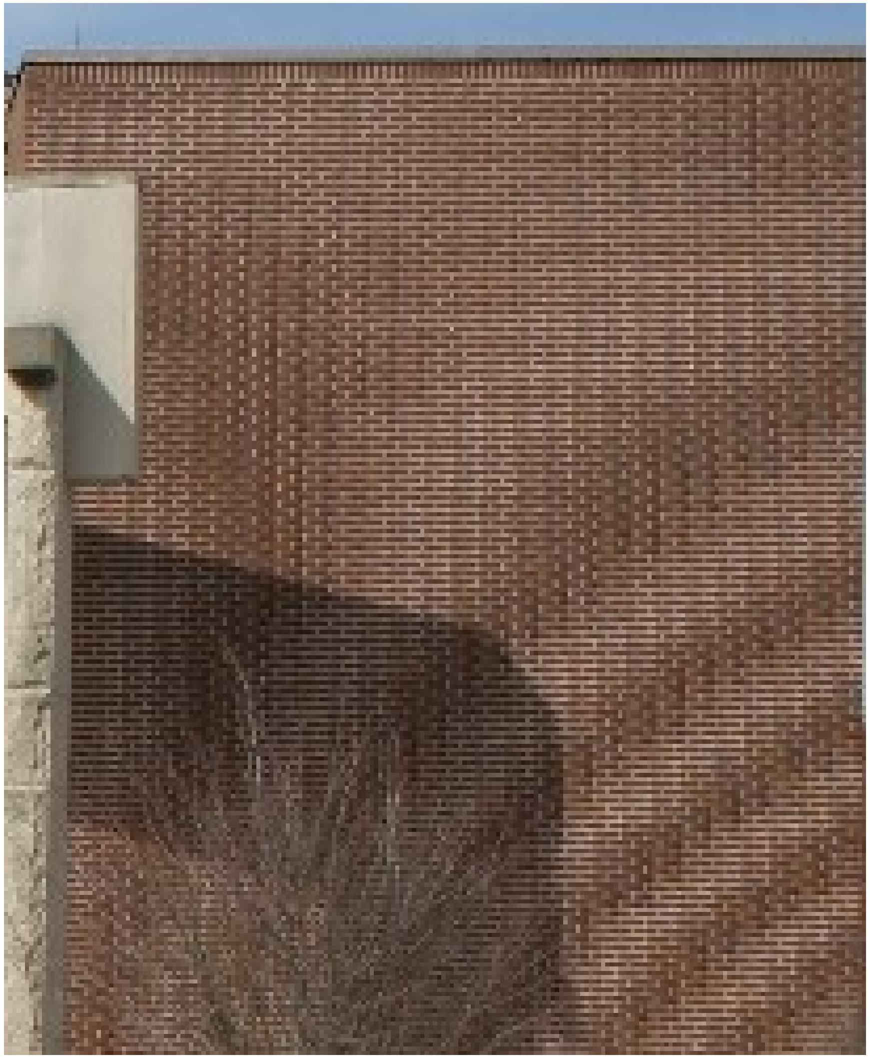
- Χρησιμοποιούμε $f_s>2W$ για να αποφύγουμε την επικάλυψη
  - Υποθέτει ότι το σήμα είναι βαθυπερατό με $W<f_s/2$
- Όμως, θόρυβος και άλλες υψηλές $(>f_s/2)$ συχνότητες συνυπάρχουν με το σήμα
  - μετά τη δειγματοληψία θα καταλήξουν στην περιοχή $-W$ έως W
- Το σήμα πρέπει να γίνει βαθυπερατό πριν τη δειγματοληψία

Αποφυγή επικάλυψης

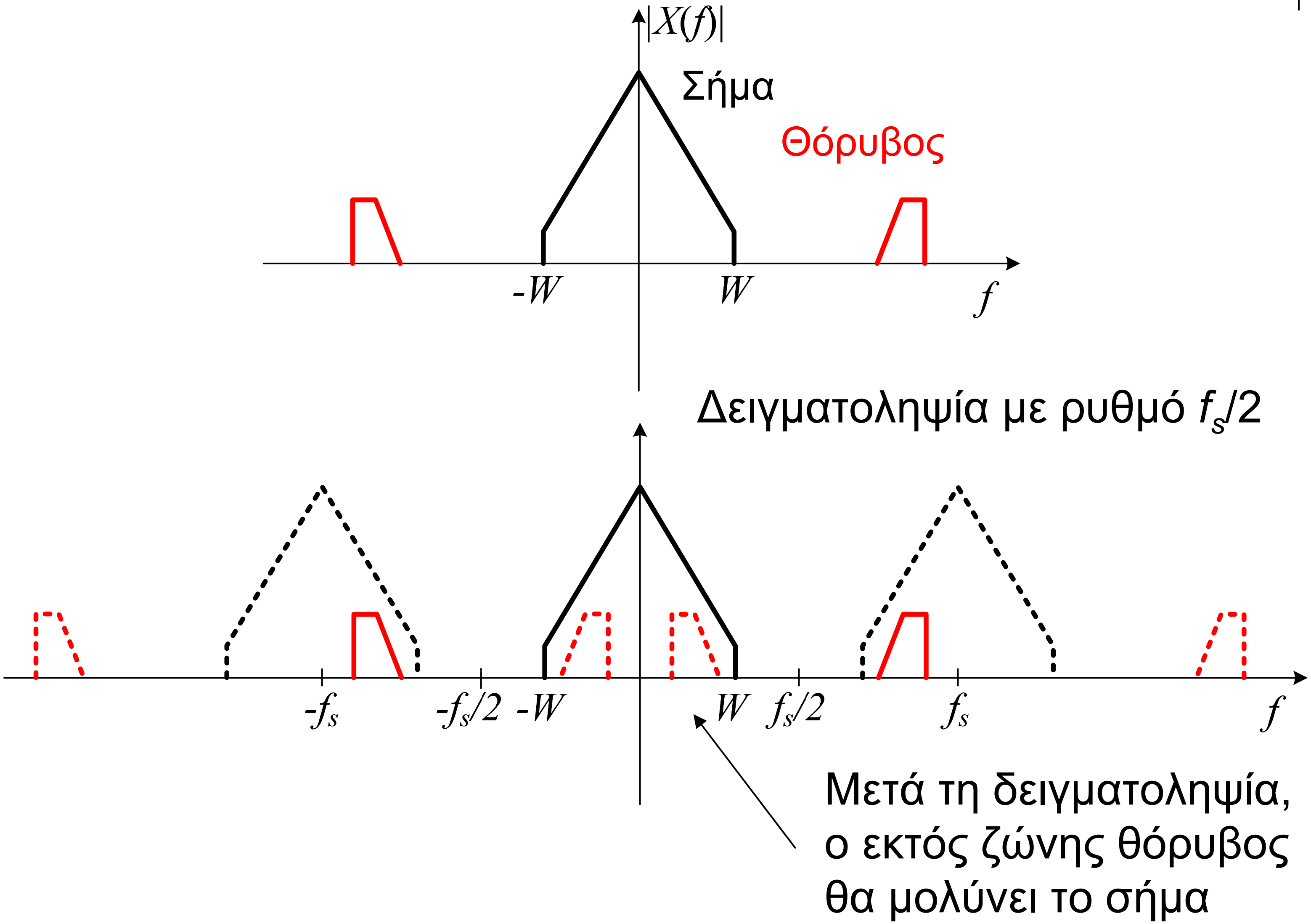
- Στη δειγματοληψία σημάτων μουσικής
  - Εάν το μουσικό τμήμα περιέχει υψηλές συχνότητες, που δεν γίνονται ακουστές, μετά τη δειγματοληψία αυτές θα ακουστούν ως χαμηλές συχνότητες
- Στη δειγματοληψία σημάτων βίντεο και στις κινηματογραφικές ταινίες
  - η επικάλυψη εμφανίζεται ως το φαινόμενο της αργά ή αντίστροφα κινούμενης ρόδας

Αποφυγή επικάλυψης

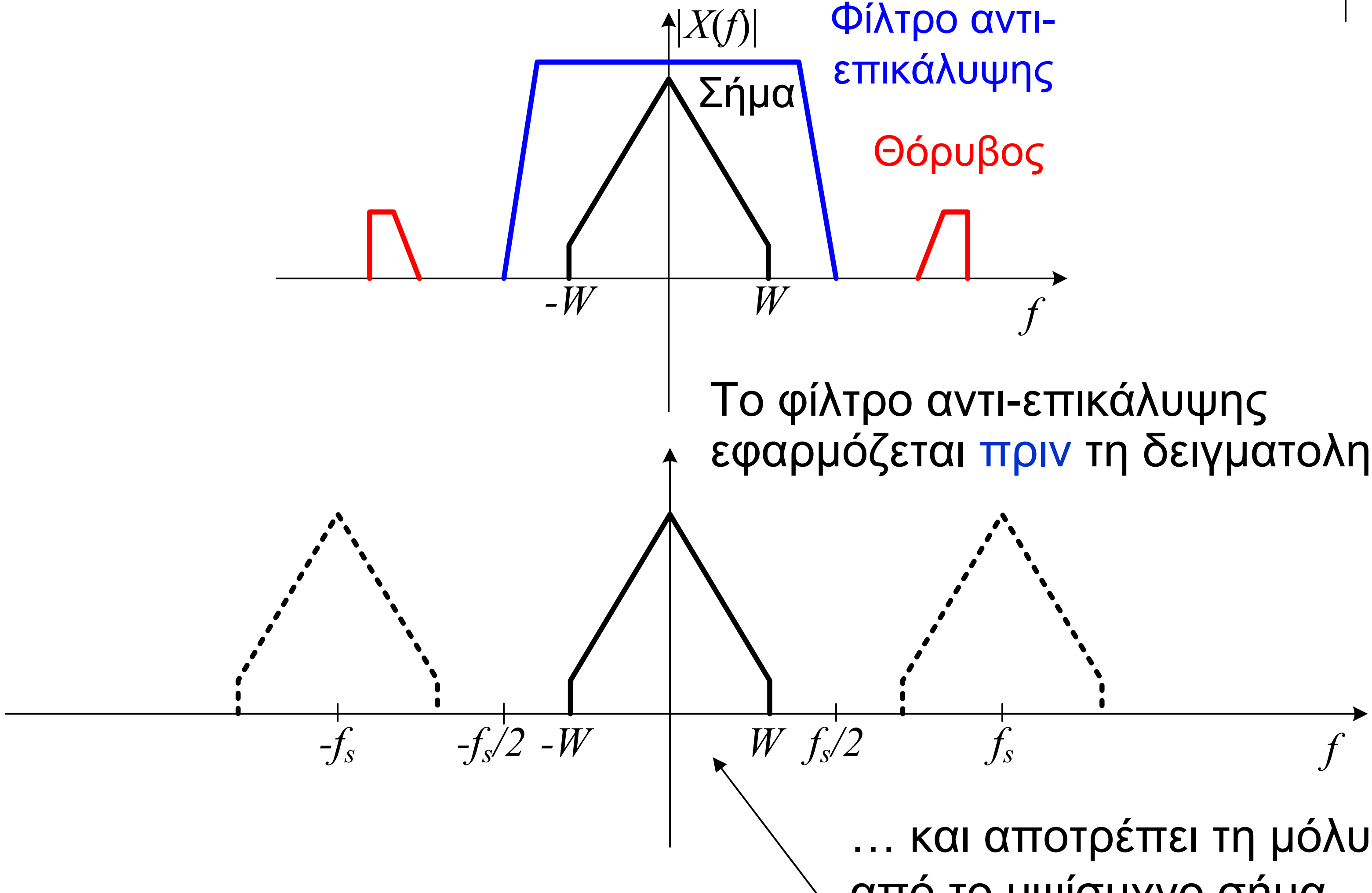
- Τα προηγούμενα παραδείγματα αφορούν τη χρονική εκδοχή της παραλλαγής
- Στη χωρική εκδοχή της εμφανίζεται στις ψηφιακές φωτογραφίες και είναι γνωστή ως μορφές Moiré
    - Ανάγκη για φίλτρο αντι-επικάλυψης (anti-aliasing)



Γιατί απαιτείται φίλτρο αντι-επικάλυψης



Το φίλτρο αντι-επικάλυψης



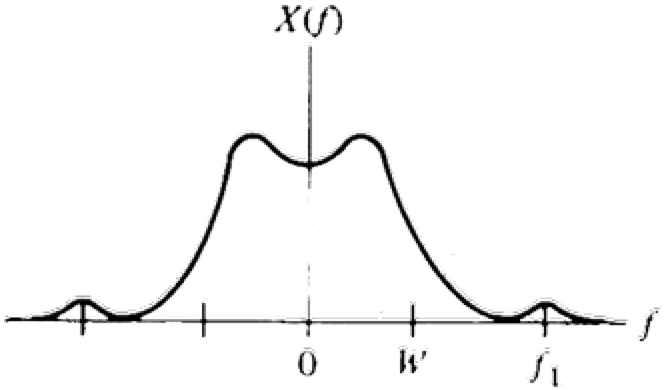
Το φίλτρο αντι-επικάλυψης εφαρμόζεται πριν τη δειγματοληψία …

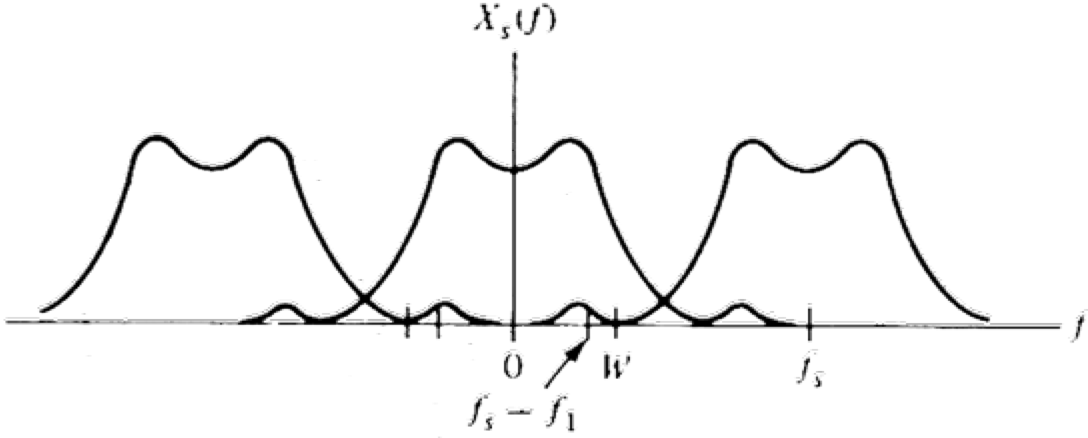
… και αποτρέπει τη μόλυνση από το υψίσυχνο σήμα

Χρονικά πεπερασμένα σήματα

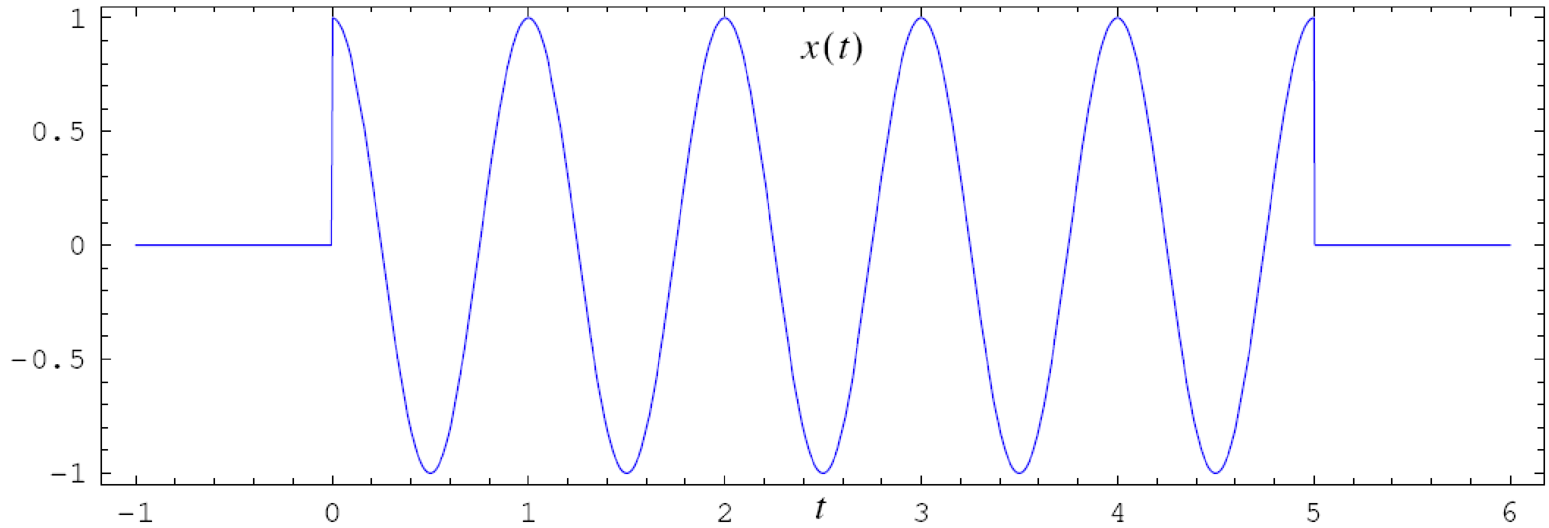
Χρονικά πεπερασμένο σήμα

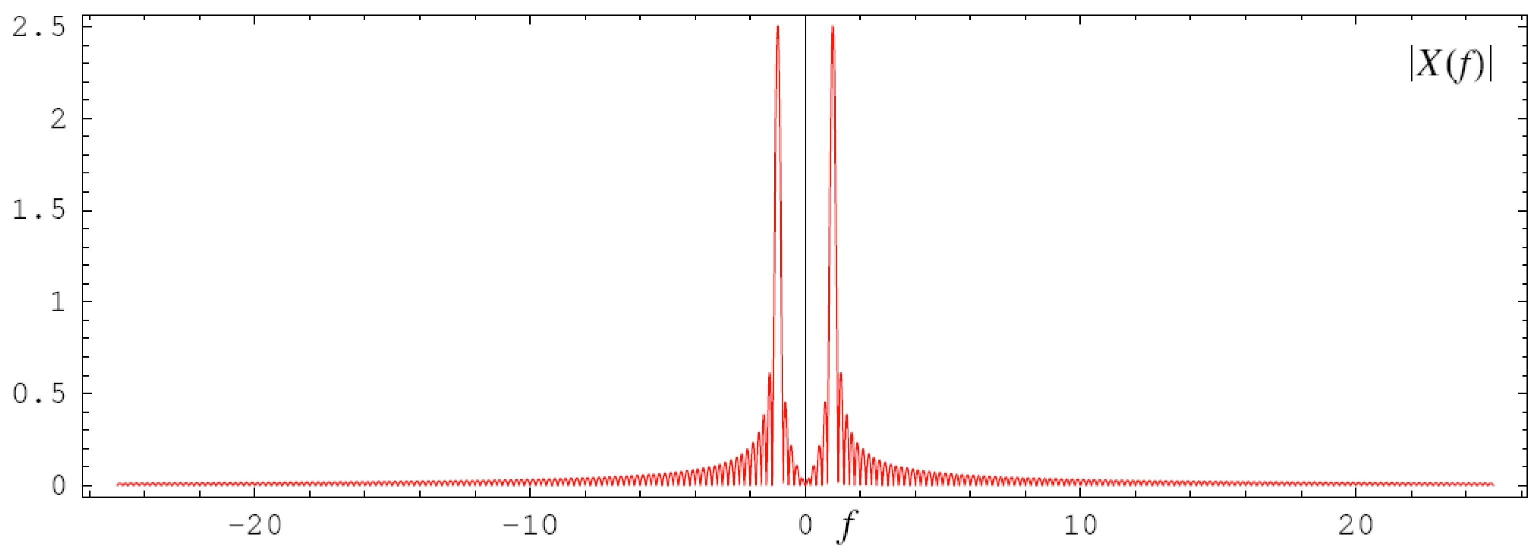
- Οδηγεί σε επικάλυψη (aliasing), δηλαδή, αναδίπλωση του φάσματος
- Υψηλές συχνότητες εμφανίζονται ως χαμηλότερες συχνότητες εντός του φάσματος του σήματος πληροφορίας
- Ανάγκη για φίλτρο αντι-επικάλυψης (anti-aliasing) πριν τη δειγματοληψία





Το φάσμα ενός χρονικά περιορισμένου συνημιτονικού σήματος 1 Hz





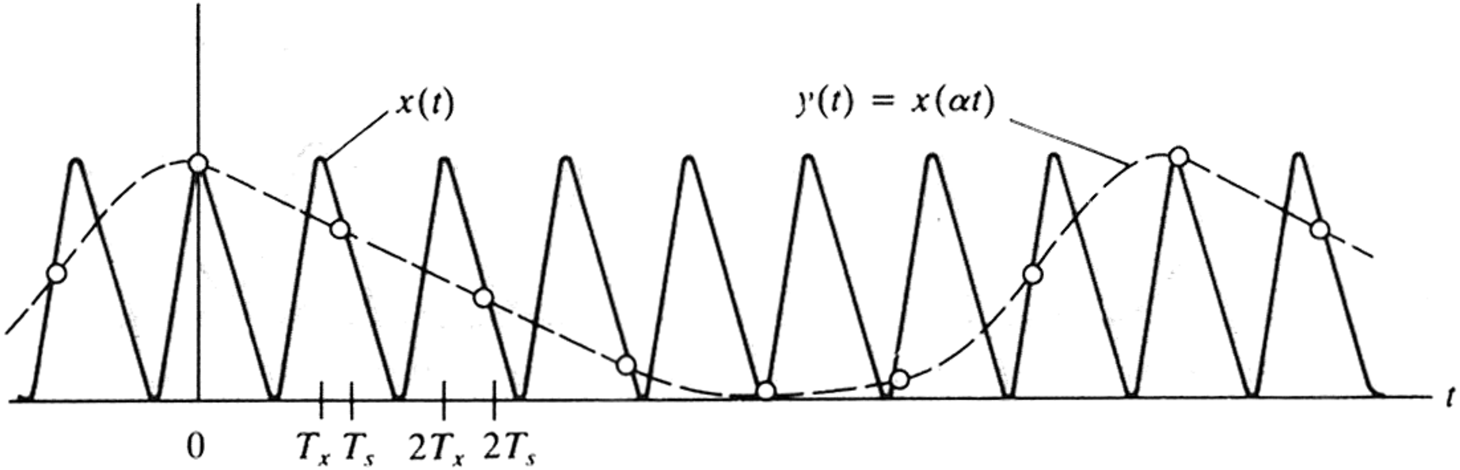
Υπο-δειγματοληψία

Υπο-δειγματοληψία

- Η δειγματοληψία με ρυθμό μικρότερο του διπλασίου της μεγαλύτερης συχνότητας ενός σήματος έχει ενδιαφέρουσες εφαρμογές, εάν η αναδίπλωση γίνει με προσοχή
  - Παλμογράφος δειγματοληψίας
  - Ζωνοπερατά σήματα

Παλμογράφος δειγματοληψίας

- Μια πρακτική χρήση της αναδίπλωσης (aliasing)
- Χρήση μικρής συχνότητας δειγματοληψίας f_s για παρατήρηση σημάτων μεγάλης συχνότητας f_x

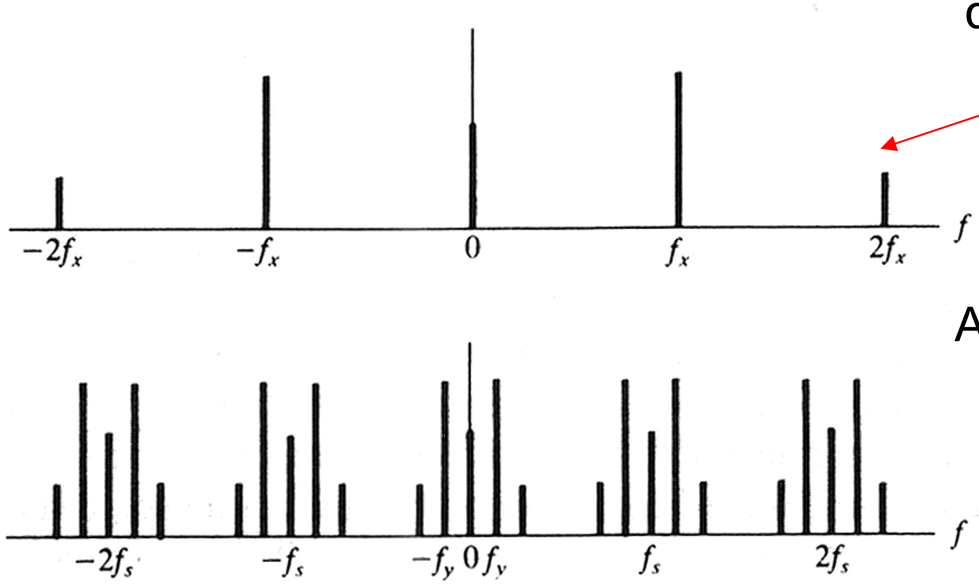


όπου $f_s=(1\text{-}\alpha)f_x$, $0<\alpha<1$

Παλμογράφος δειγματοληψίας

- Η δειγματοληψία μετακινεί το φάσμα του αρχικού σήματος αριστερά και δεξιά κατά nf_s σε σημεία που απέχουν $f_y=|f_x-f_s|=\pm \alpha f_s$ από τις αρμονικές της συχνότητας δειγματοληψίας

Κρατάμε τις m αρμονικές, εδώ $m=2$



Αρκεί $a<1/(2m+1)$ για να μην έχουμε επικάλυψη

- Βαθυπερατό φίλτρο ανακτά το $y(t)=x(\alpha t)$

Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων

Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων

- Ζωνοπερατό σήμα εύρους ζώνης W με συχνότητες στην περιοχή από f_L έως f_H ($0<f_L<f_H$, $W= f_H-f_L$) μπορεί να ανακτηθεί από δείγματα που λαμβάνονται με ρυθμό

$$\frac{2f_{\mathrm{H}}}{n} < f_s < \frac{2f_L}{n-1}$$

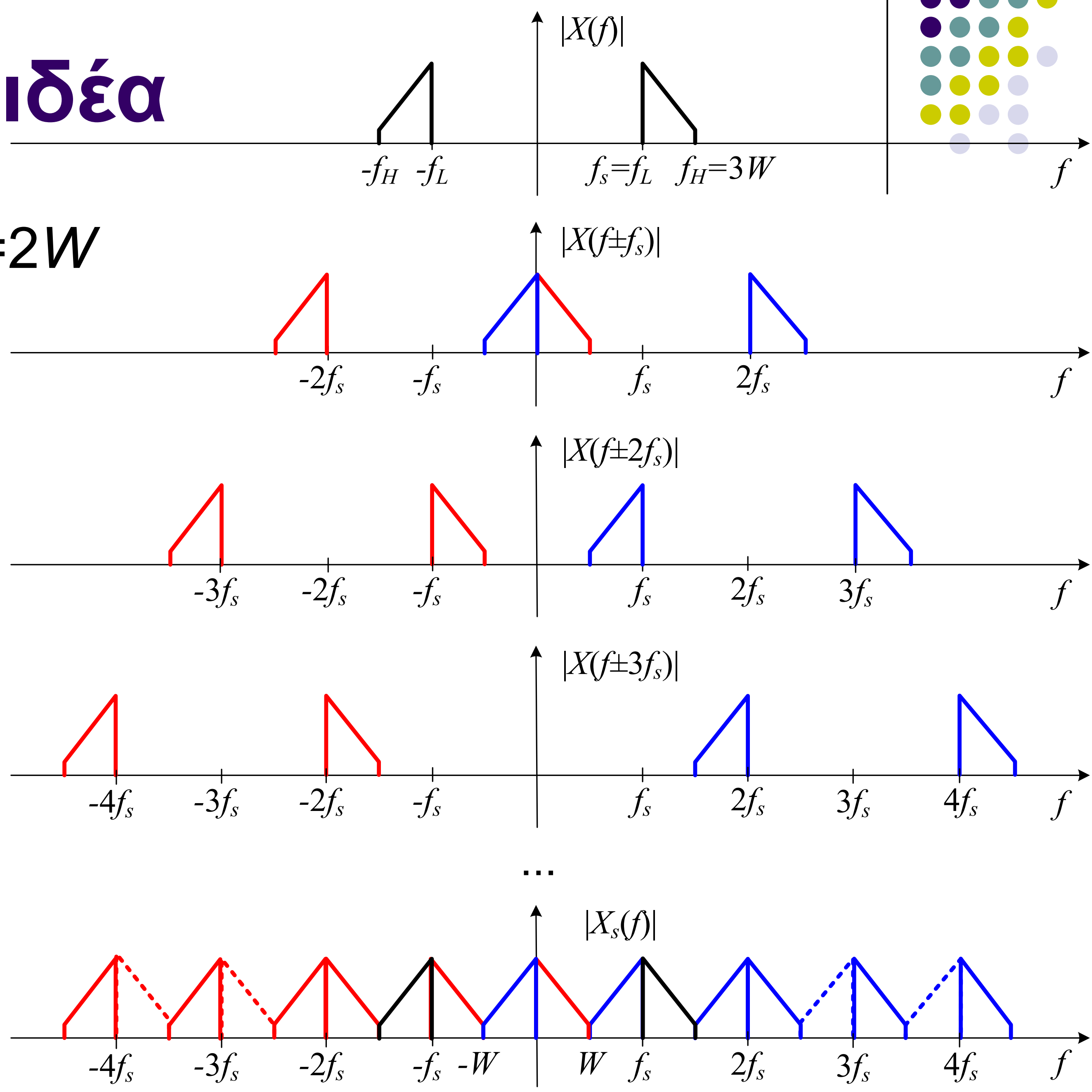
- όπου n =1,2,… ακέραιος τέτοιος ώστε $n \le \frac{f_H}{W}$

- και το φίλτρο ανάκτησης έχει κρουστική απόκριση

$$(n+1)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(n+1)t}{T_s}\right) - n\,\mathrm{sinc}\left(\frac{nt}{T_s}\right)$$

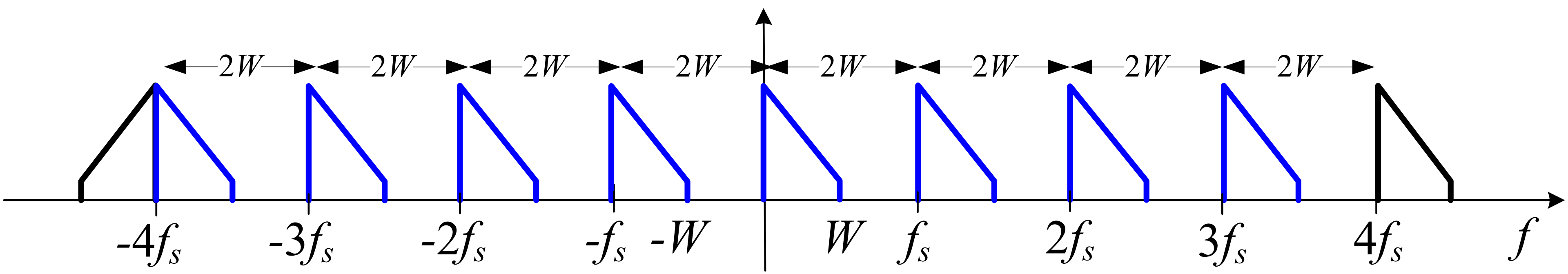
Η βασική ιδέα

- Έστω f_H=3W, f_s=2W



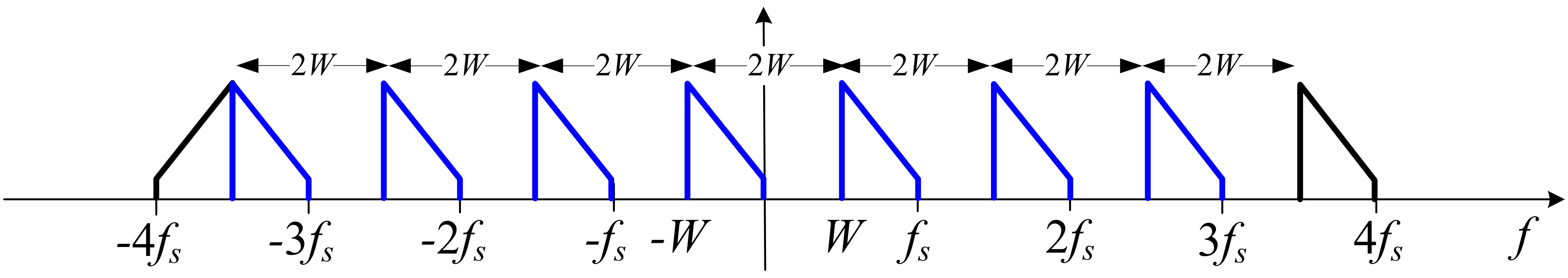
Η απλή περίπτωση f_H=nW

- Έστω $f_H=nW$ με n περιττό ακέραιο
- Η επιλογή $f_s=2W$ οδηγεί σε πλήρωση με αντίγραφα του φάσματος του ζωνοπερατού σήματος



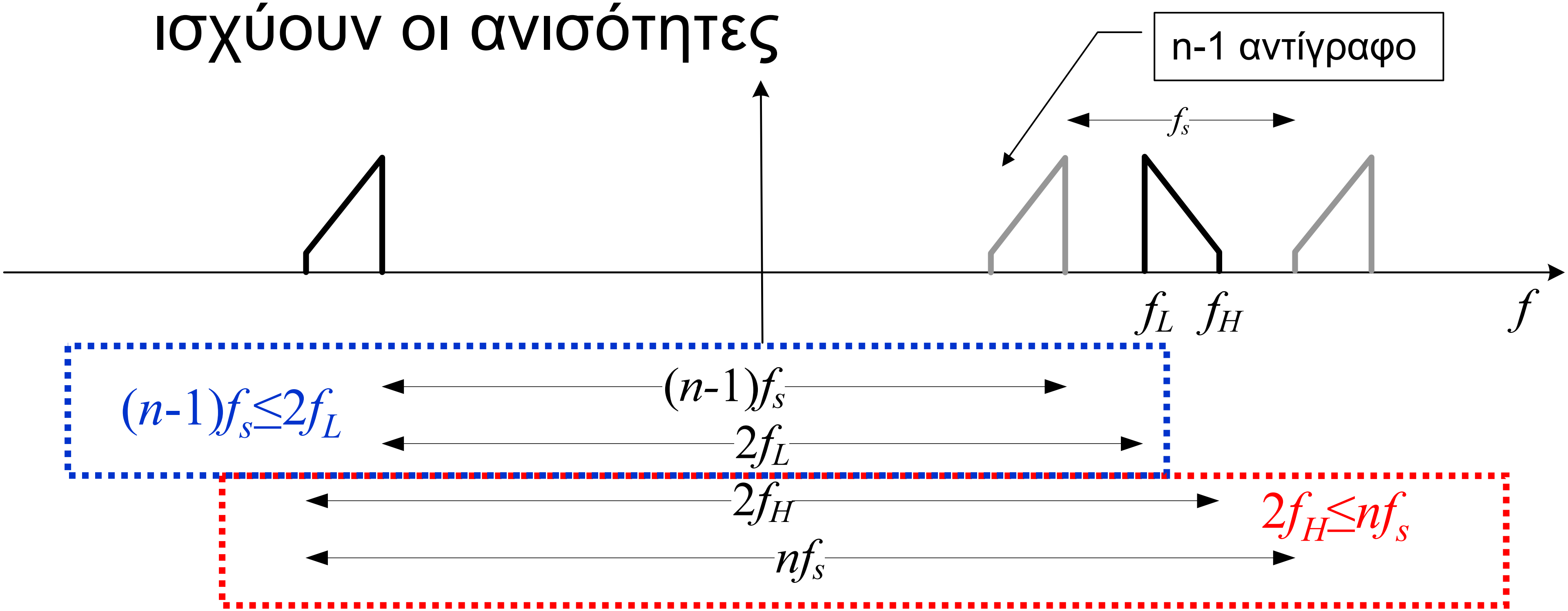
Η απλή περίπτωση $f_H=nW$

- Έστω $f_H=nW$ με n άρτιο ακέραιο
- Η επιλογή $f_s=2W$ οδηγεί και πάλι σε πλήρωση με αντίγραφα του φάσματος του ζωνοπερατού σήματος
- Στην περιοχή 0 έως W όμως έχουμε αντιστροφή του φάσματος



Η γενική περίπτωση $f_H \neq nW$

- Έστω f_H δεν είναι πολλαπλάσιο του W
- για να μην έχουμε επικάλυψη πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες



Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων

- Οι ανισότητες μπορούν να γραφούν ως

$$\frac{2f_{\mathrm{H}}}{n} \le f_s \le \frac{2f_L}{n-1}$$

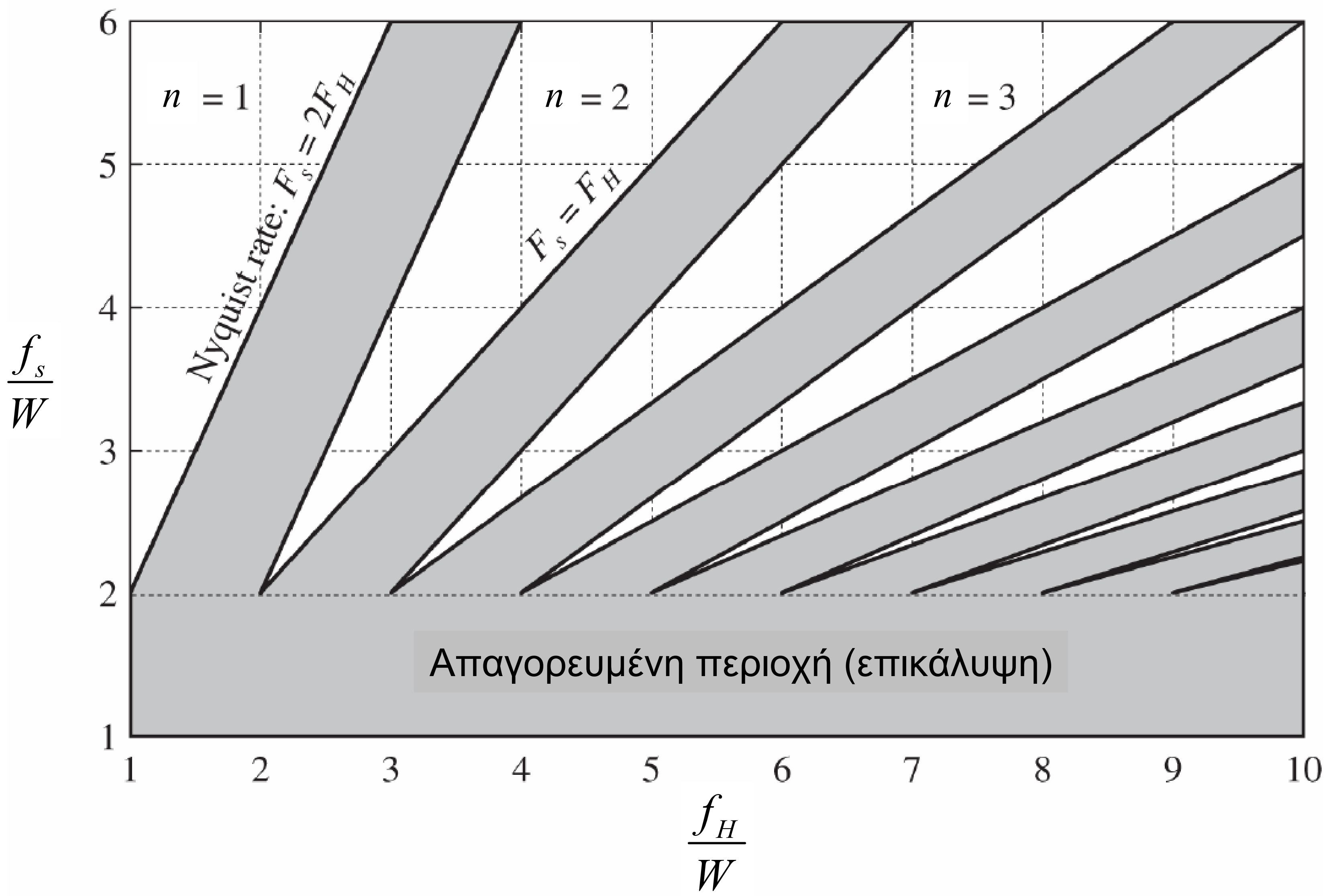
- Επειδή, $f_H = f_L + W$ αντικαθιστώντας

$$\frac{2f_{\mathrm{H}}}{n} \le f_s \le \frac{2(f_H - W)}{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{f_{\mathrm{H}}}{n} \le \frac{(f_H - W)}{n-1} \Rightarrow (n-1)f_{\mathrm{H}} \le n(f_H - W)$$

$$\Rightarrow n \le \frac{W}{f_{\mathrm{H}}}$$

Συνθήκες μη επικάλυψης



Παράδειγμα για σήμα FM

- Στη ραδιοφωνία FM έχουμε f_L = 88 MHz, f_H = 108 MHz, W = 20 MHz, οπότε

$$n < 5,4 = \frac{108}{20}$$

- Για n=5, 43,2 MHz < f_s < 44 MHz
- Για n=4, 54 MHz < f_s < 58,67 MHz
- Για n=3, 72 MHz < f_s < 88 MHz
- Για n=2, 108 MHz < f_s < 176 MHz
- Για n=1, 216 MHz < f_s (ρυθμός Nyquist)